

생체모방 로봇을 위한 비선형 항법 필터

A Nonlinear Navigation Filter for Biomimetic Robot

성 상 만*
(Sang Man Seong¹)

¹Korea University of Technology and Education

Abstract: A nonlinear navigation filter for biomimetic robot using analytic approximation of mean and covariance of state variable is proposed. The approximations are performed at the time update step in the filter structure. The mean is approximated to the 3rd order of Taylor's series expansion of true mean and the covariance is approximated to the 3rd order either. The famous EKF is a nonlinear filtering method approximating the mean to 1st order and the covariance to the 3rd order. The UKF approximate them to the higher orders by numerical method. The proposed method derived a analytical approximation of them for navigation system and therefore don't need so called sigma point transformation in UKF. The simulation results show that the proposed method can be a good alternative of UKF in the systems which require less computational burden.

Keywords: biomimetic robot, analytic approximation, nonlinear filter, navigation system, EKF, UKF

I. 서론

이동형 생체모방 로봇 시스템의 경우에 항체의 위치, 속도, 자세 정보를 정확하게 구하기 위하여 항법 시스템의 역할이 중요하다. 항법 시스템이 비선형시스템이므로 비선형 필터를 사용해야 하는데 그 중에서 EKF가 널리 사용되어 왔다. EKF는 비선형 시스템을 선형화하여 사용하는 방법으로서 테일러 급수로 전개하였을 때 평균과 1차식까지 그리고 공분산을 3차식 까지 근사하는 방법이다. 최근에는 평균과 공분산의 근사를 조금 더 정확하게 하여 필터 성능을 향상시키는 UKF가 제안되었다[1-4]. UKF는 unscented 변환에 그 기초를 두고 있다. Unscented 변환은 비선형 변환에 의해 변환된 변수의 평균과 공분산을 구할 때 시그마 점(sigma point)이라고 불리는 몇 개의 점을 비선형 관계식으로 변환한 후 그 변환된 점들의 샘플 평균과 샘플 공분산으로서 그 근사값을 구하는 방법이다. Unscented 변환은 테일러 급수로 전개하였을 때 평균을 3차항까지 정확하게 근사한다. 공분산의 경우에 두 방법 모두 3차항까지 정확하게 근사하나 unscented 변환은 4차 이상의 고차항에서의 오차가 작다. UKF는 근사화 오차를 줄임으로써 EKF보다 나은 성능을 보이나 unscented 변환을 수행하는 과정에서 공분산을 Cholesky 분해를 하고 또한 이를 통해 구해진 시그마 점 각각에 대하여 비선형 시스템 식에 대입하여 변환 결과를 계산해야 한다는 단점이 있다. UKF를 이용한 항법 필터링은 최근 10년간 많은 관심속에서 연구되어 왔다[7-9]. 그런데 소형의 생체모방 시스템은 계산량이 중요하므로 UKF를

대체하면서도 필터 성능이 크게 저하되지 않는 방법이 필요하다.

본 논문에서는 항법시스템을 위한 비선형 필터링에서 평균과 분산의 근사를 해석적으로 수행하는 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 평균 및 공분산을 근사할 때 3차항까지 정확하게 근사하는 해석적인 식을 유도하여 필터링에 적용하는 것이 핵심이다. 이 방법의 장점은 EKF에 비해 좀 더 정확하게 평균 및 공분산을 근사하면서 UKF에서 요구되는 unscented 변환이 필요하지 않아 계산량이 UKF에 비해 작다는 점이다. 논문의 구성은 II 장에 항법시스템, III 장에 해석적 근사를 이용한 비선형 항법 필터, IV 장에 시뮬레이션, 그리고 V 장에 결론 순서이다.

II. 항법시스템

항법시스템은 동체좌표계에서 측정되는 가속도와 각속도를 입력으로 하며 이들 값으로부터 속도 및 자세를 계산하는 식으로 표현할 수 있다[5]. 먼저 속도 계산식은 다음과 같다.

$$\dot{V}_e^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V_e^n + g^n \quad (1)$$

여기에서 $V_e^n = [V_N \ V_E \ V_D]$ 은 지구에 대한 항체의 속도를 항법 좌표계에서 나타낸 것이고, C_b^n 는 동체좌표계(body frame)에서 항법좌표계(navigation frame)으로의 좌표변환행렬을 나타내며, f^b 는 항체의 가속도를 동체 좌표계에서 표시한 것이며, g^n 은 항법 좌표계에서 나타낸 중력 벡터이다. ω_{ie}^n 는 관성좌표계(inertial frame)에 대한 지구고정좌표계(earth centered earth fixed frame)의 회전각속도를 항법좌표계에서 나타낸 것이며 ω_{en}^n 는 지구고정좌표계에 대한 항법좌표계의 회전을 항법좌표계에서 나타낸 것으로 각각 다음

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 11. 15., 수정: 2011. 12. 5., 채택확정: 2011. 12. 20.

성상만: 한국기술교육대학교(ssman@kut.ac.kr)

* 본 논문은 지역혁신인력양성사업 및 한국기술교육대학교 교육연구진흥비프로그램에서 지원하여 연구하였음.

과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\omega_{ie}^n &= [\Omega \cos L \ 0 \ -\Omega \sin L]^T \\ \omega_{en}^n &= [\dot{l} \cos L \ -\dot{L} \ -\dot{l} \sin L]^T\end{aligned}\quad (2)$$

여기에서 Ω 는 지구자전각속도, L 은 위도, 그리고 l 은 경도를 나타낸다.

자세 계산은 계산량이 적고 정규화가 간단하다는 장점이 있는 쿼터니온 방법을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} C(q) \{ \omega_{ib}^b - C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \} \quad (3)$$

여기에서 $q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 는 동체좌표계에서 항법좌표계로의 변환을 나타내는 쿼터니온, $C(q)$ 는 다음과 같이 정의되는 행렬이다.

$$C(q) \equiv \begin{bmatrix} -q_1 - q_2 - q_3 \\ q_0 - q_3 \ q_2 \\ q_3 \ q_0 - q_1 \\ -q_2 \ q_1 \ q_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ω_{ib}^b 는 관성좌표계에 대한 항체의 회전을 동체좌표계로 나타낸 것이다. C_b^n 다음과 같은 쿼터니온으로 나타내면 다음과 같다.

$$C_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

가속도계 및 자이로스코프에 포함된 오차를 고려하면 식 (1)과 (3)에서 f^b 와 ω_{ib}^b 는 측정값과 오차값으로 나누어야 한다. 참값과 측정값의 관계를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f^b &= f_{meas}^b + (\delta f^b + w_a) \\ \omega_{ib}^b &= \omega_{ib_meas}^b + (\delta \omega_{ib}^b + w_g)\end{aligned}\quad (6)$$

여기에서 f_{meas}^b 와 $\omega_{ib_meas}^b$ 는 각각 가속도 측정값과 각속도 측정값이다. δf^b 와 $\delta \omega_{ib}^b$ 는 이들에 포함된 랜덤상수오차로 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\dot{\delta f^b} &= 0 \\ \dot{\delta \omega_{ib}^b} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

또한 w_a 와 w_g 는 백색 가우시안 잡음이다. 이상의 결과를 종합하면 항법시스템은 다음과 같은 비선형 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = f(x, u) + Gw \quad (8)$$

여기에서 x 와 u 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$x = [V_c^{nT} \ q^T \ \nabla^T \ \rho^T]^T \quad (9)$$

$$u = [f_{meas}^b \ \omega_{ib_meas}^b]^T \quad (10)$$

w 는 잡음 성분으로 $w = [w_a^T \ w_g^T]^T$ 이다. G 는 다음과 같

이 정의된다.

$$G \equiv \begin{bmatrix} C_b^n & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & Q \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (8)을 오일러 방법등으로 이산화하면 다음과 같은 이산화된 식을 얻을 수 있다.

$$x_{k+1} = f_d(x_k, u_k) + Gw_k \quad (12)$$

w_k 는 백색 가우시안 잡음을 가정한다.

측정값은 3축에 대한 속도 및 요각이라고 가정하면 다음과 같은 측정치를 얻는다.

$$y = [V_c^{nT} \ \psi] \quad (13)$$

여기에서 ψ 는 요각으로서 쿼터니온과의 관계식은 다음과 같다.

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{2q_1 q_2 + 2q_0 q_3}{q_1^2 + q_0^2 - q_3^2 - q_2^2} \right) \quad (14)$$

요각 측정식은 비선형이므로 필터식에서 이에 대한 고려가 필요하다.

III. 해석적 근사를 이용한 비선형 항법 필터

필터링은 시간갱신 단계와 측정치갱신 단계로 나눌 수 있다.

1. 시간 갱신 식

시간갱신 단계는 k 시간에서의 상태변수의 평균과 공분산이 주어져 있을 때 $k+1$ 시간에서의 상태변수 및 공분산의 사전 추정값(apriori estimate) 구하는 단계이다.

먼저 상태변수 사전 추정값을 구하기 위해서는 다음과 같은 식을 구해야 한다.

$$\hat{x}_{k+1(-)} = \overline{f_d(x_k, u_k) + Gw_k} \Big|_{x_k = \bar{x}_k} = \overline{f_d(x_k, u_k)} \Big|_{x_k = \bar{x}_k} \quad (15)$$

여기에서 w_k 가 백색잡음이라는 가정과 G 와는 독립이라는 사실이 사용되었다. 식 (15)를 테일러 급수를 전개하여 3차 항까지 근사하고 1차 및 3차 항은 0이 됨을 이용하면 다음과 같다[6].

$$\bar{f}_d \approx f_d(\bar{x}_k, u_k) + \frac{1}{2!} E[D_x^2 f_d] \quad (16)$$

$$E[D_x^2 f_d] = \sum_{i,j=1}^n P_{ij} \frac{\partial^2 f_d}{\partial x_i \partial x_j} \quad (17)$$

여기에서 n 은 시스템 차수이며 \tilde{x} 는 추정오차 P_{ij} 는 k 시간에 구해진 사후(aposteriori) 공분산의 i, j 항을 의미한다.

EKF는 식 (16)의 1차항까지 근사하는 것이며 UKF는 식 (16)에 제시된 항까지는 정확하게 근사하면서 부가적인 항이 더해지는 방법이다. UKF는 시그마 점을 구하여 수치적으로 \bar{f}_d 를 구하므로 계산량이 많이 필요하다. 본 논문에서는 식 (16)을 해석적으로 직접 유도하여 사용한다. 이를 위

하여 시스템 식 f_d 를 속도에 의한 항 F_v 와 쿼터니온에 의한 항 F_q 로 나누어 $\partial^2 f_d / \partial x_i \partial x_j$ 를 계산하면 부록과 같다.

공분산의 사전 추정값을 구하는 식은 다음과 같다.

$$P_{k+1(-)} = E[(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1(-)})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1(-)})^T] \quad (18)$$

식 (18)을 3차항까지 근사하면 다음과 같다[6].

$$P_{k+1(-)} \approx E[(D_x f_d)(D_x f_d)^T] + GQG^T \quad (19)$$

$$E[(D_x f_d)(D_x f_d)^T] = \frac{\partial f_d}{\partial x} \Big|_{x=x_k} P_{k(+)} \frac{\partial f_d^T}{\partial x} \Big|_{x=x_k} \quad (20)$$

여기에서 Q 는 공정잡음 ω_k 의 공분산 행렬이다. 식 (19)는 EKF와 동일하며 UKF는 이 식에 추가적인 항이 덧붙여진다. 식 (20)의 $\partial f_d / \partial x$ 도 유도 결과를 부록에 정리하였다.

2. 측정값 갱신 식

측정값 갱신 식은 식 (13)이 비선형 식이므로 상태변수의 오차를 이용하여 오차모델을 이용하여 구성한다. 이는 EKF의 측정값 갱신 방법과 동일하다. 속도, 쿼터니온, 요각의 오차를 각각 δV_e^n , δq , 그리고 $\delta \psi$ 로 나타내어 측정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta y &= H \begin{bmatrix} \delta V_e^n \\ \delta q \end{bmatrix} + v \\ H &= \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \partial \psi / \partial q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서 v 는 측정잡음이며 백색 가우시안 잡음으로 가정하며 공분산 행렬은 R 이라고 가정한다.

식 (21)에서 사용하여 상태변수 오차를 추정하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K &= P_{k+1(-)} H^T [H P_{k+1(-)} H^T + R]^{-1} \\ \delta \hat{x}_{k+1} &= K [y_{meas} - \hat{y}_{k+1(-)}] \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서 y_{meas} 는 속도 및 요각 측정값이며 $\hat{y}_{k+1(-)}$ 는 시간 갱신 단계에서 구한 속도 및 쿼터니온 추정치로부터 계산한 속도 및 요각이다. 시간 갱신에서 구한 상태변수 사전 추정값과 식 (22)로부터 구한 $\delta \hat{x}_{k+1}$ 을 이용하여 상태변수 사후 추정값은 다음과 같이 구할 수 있다.

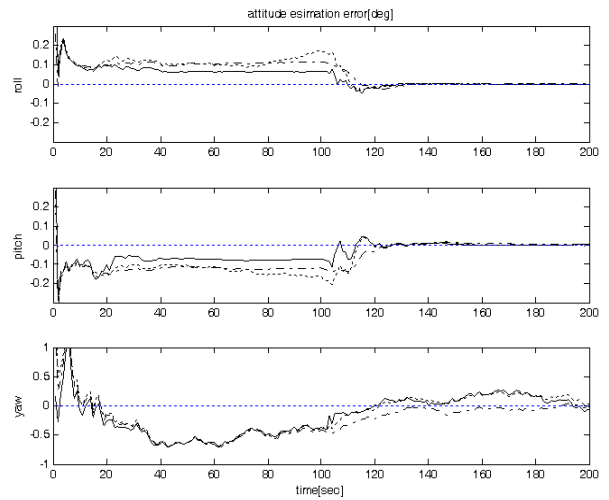
$$\hat{x}_{k+1(+)} = \hat{x}_{k+1(-)} + \delta \hat{x}_{k+1} \quad (23)$$

구해진 상태변수 사후 추정값 중 가속도계 및 자이로 바이어스 오차는 가속도계 및 자이로의 측정치의 바이어스 보상값에 더해진다. 이는 식 (15)의 시간갱신 식에서 가속도계 및 자이로 측정값을 사용할 때 참값에 가깝도록 유지하는 역할을 한다.

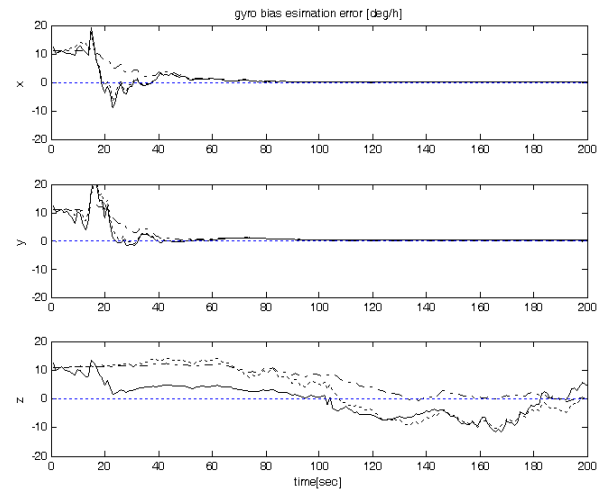
이상의 결과를 요약하면 시간갱신에서는 EKF에서 발생할 수 있는 평균 근사화 오차를 식 (17)에 의해 해석적으로 보상하는 방법을 제시하였으며 측정값 갱신에서는 측정식이 비선형임을 고려하여 상태변수의 오차모델을 이용하여 상태변수 사후 추정값을 구하는 EKF 방법을 사용하는 새로운 필터링 방법을 제시하였다.

IV. 시뮬레이션

시뮬레이션을 통하여 제안한 방법과 기존의 EKF 및 UKF와 성능을 비교한다. 시뮬레이션에서 사용된 궤적은 등속 직진 운동을 하다가 100초에서 원운동을 하도록 하였으며 전체 200초 동안의 시뮬레이션을 하였다. 초기오차는 자세오차로서 롤 및 피치각 오차 10deg, 요각 오차 20deg를 사용하였고 속도오차는 1ft/sec를 사용하였다. 또한 가속도계 바이어스 초기오차는 2000 μg , 자이로스코프 바이어스 초기오차는 2deg/h를 사용하였다. 센서 오차로서 가속도계는 바이어스 1000 μg , 백색잡음 분산은 (30 μg)²을 사용하였으며 자이로스코프는 바이어스 1deg/h, 백색잡음 분산은 (0.3deg/h)²를 사용하였다. 속도계 백색잡음 분산은 (0.1ft/sec)² 그리고 요 자세각 측정센서 백색잡음 분산은 (2deg)²을 사용하였다.



(a) Attitude estimation error. (real: UKF, dotted: EKF, dash-dotted: proposed)



(b) Gyro bias estimation error. (real: UKF, dotted: EKF, dash-dotted: proposed)

그림 1. UKF, EKF, 그리고 제안한 방법에 의한 추정 결과 비교. Fig. 1. Comparison of estimation results by UKF, EKF, and proposed method.

시뮬레이션 결과는 그림 1에 제시하였다. 먼저 자세 오차를 보면 항체가 직직 운동을 하는 100초 이전 구간에서 자세오차가 3가지 방법 모두 초기 오차에 비해 줄어들었으나 약간의 바이어스를 가지고 있음을 알 수 있다. 이때 오차의 크기는 UKF < 제안한 방법 < EKF 순임을 확인 할 수 있다. 원운동을 시작하는 100초 이후의 구간에서는 오차들이 0으로 수렴하기 시작하는데 롤 및 피치각은 3가지 방법에 큰 차이가 없다. 요각은 UKF와 EKF가 유사한데 이들 방법에 비하여 제안한 방법은 오차가 좀 더 작음을 알 수 있다. 따라서 전구간에서 보면 제안한 방법 및 UKF가 EKF 보다는 성능이 나음을 알 수 있고 제안한 방법과 UKF의 비교에서는 100초 이전에는 UKF가 나으나 그 이후에는 제안한 방법이 조금 더 나음을 알 수 있다.

자이로 바이어스 오차를 보면 x 및 y 축 바이어스는 3가지 방법 모두 50초 이전에 0으로 수렴하여 유사하다. z 축 바이어스는 직진구간인 100초까지는 오차의 크기는 UKF가 가장 작고 제안한 방법 및 EKF는 유사함을 볼 수 있다. 다만 제안한 방법이 UKF 및 EKF에 비해서 약간 느리게 수렴함을 알 수 있다. 원운동 구간인 100초 이후에는 UKF와 EKF가 유사한데 이들 방법에 비하여 제안한 방법은 오차가 좀 더 작음을 알 수 있다. 따라서 전구간에서 보면 자세 각과 마찬가지로 UKF가 EKF 보다는 성능이 나음을 알 수 있고 제안한 방법과 UKF의 비교에서는 100초 이전에는 UKF가 나으나 그 이후에는 제안한 방법이 조금 더 나음을 알 수 있다.

시뮬레이션 결과를 종합하면 제안한 방법과 UKF는 모두 EKF 보다는 성능이 나음을 알 수 있고 제안한 방법과 UKF의 비교에서는 초기 오차가 큰 구간에서는 UKF가 나은 성능을 보이며 초기 오차가 작은 구간에서는 제안한 방법이 우위를 보이고 있음을 알 수 있다.

V. 결론

항법시스템을 위한 비선형 필터링에서 평균과 분산의 근사를 해석적으로 수행하는 방법을 제안하였다. 제안하는 방법은 평균 및 공분산을 근사할 때 3차항까지 정확하게 근사하는 해석적인 식을 유도하여 필터링에 적용하는 것이 핵심이다. 이 방법의 장점은 EKF에 비해 좀 더 정확하게 평균 및 공분산을 근사하면서 UKF에서 요구되는 unscented 변환이 필요하지 않아 계산량이 UKF에 비해 작다는 점이다. 시뮬레이션 결과를 보면 제안한 방법이 EKF보다는 성능이 나으며 UKF와 비교해보면 초기 오차가 큰 구간에서는 UKF가 나은 성능을 보이며 초기 오차가 작은 구간에서는 제안한 방법이 우위를 보이고 있음을 알 수 있다. 그러므로 제안한 방법이 UKF에 비해 계산량이 작다는 점과 성능도 유사한 결과를 보이므로 생체모방로봇에서 UKF를 대신할 수 있는 좋은 방법이라고 판단된다.

참고문헌

[1] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," *Proc. Am. Contr. Conf., Seattle, WA*, pp. 1628-1632, 1995.

- [2] Y. Wu, D. Hu, M. Wu, and X. Hu, "Unscented Kalman filtering for additive noise case: augmented versus non-augmented," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 5, 2005.
- [3] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, 2000.
- [4] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," *Proc. of the IEEE*, vol. 92, no. 3, 2004.
- [5] D. H. Tiierton and J. L. Weston, *Strapdown Inertial Navaigation Technology - 2nd Edition*, The Institution of Electrical Engineers, 2004.
- [6] D. J. Simon, *Optimal State Estimation - Kalman, H infinity, and Nonlinear Approaches*, John & Wiley, 2006.
- [7] W. Y. Kang, K. J. Kim, and C. G. Park, "Performance analysis of in-flight alignment using UKF," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 12, no. 11, 2006.
- [8] Q. Wei, F. Jiancheng, X. Fan, and S. Wei, "Hybrid simulation system study of SINS/CNS integrated navigation," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 23, no. 2, 2008.
- [9] F. Gul, F. Jiancheng, and A. A. Gaho, "GPS/INS navigation data fusion using quaternion model and unscented Kalman filter," *Proc. of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 2006.

부록

시스템 식을 속도 부분 F_V 와 쿼터니온 부분 F_q 로 나타내면 다음과 같다.

$$F_V = C_b^n f_{meas}^b + C_b^n \delta f^b - (2\omega_{ic}^n + \omega_{en}^n) \times V_e^n + g^n \quad (A.1)$$

$$F_q = \frac{1}{2} C(q) \omega_{nb}^b + \frac{1}{2} C(q) \delta \omega_{ib}^b \quad (A.2)$$

앞으로의 전개를 위하여 필요한 변수를 다음과 같이 정의하자.

$$f_{meas}^b = [f_x \ f_y \ f_z]^T \quad (A.3)$$

$$2\omega_{ic}^n + \omega_{en}^n = [\alpha_n \ \alpha_e \ \alpha_d]^T \quad (A.4)$$

$$\omega_{nb}^b = [\beta_x \ \beta_y \ \beta_z]^T \quad (A.5)$$

그러면 F_V 와 F_q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_V = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)(f_x + \delta f_x) + 2(q_1 q_2 - q_0 q_3)(f_y + \delta f_y) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3)(f_x + \delta f_x) + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)(f_y + \delta f_y) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2)(f_x + \delta f_x) + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1)(f_y + \delta f_y) \\ + 2(q_1 q_3 + q_0 q_2)(f_z + \delta f_z) \\ + 2(q_2 q_3 - q_0 q_1)(f_z + \delta f_z) \\ + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)(f_z + \delta f_z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha_d v_e + \alpha_e v_d \\ \alpha_d v_n - \alpha_n v_d \\ -\alpha_e v_n + \alpha_n v_e \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$F_q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1(\beta_x + \delta\omega_x) - q_2(\beta_y + \delta\omega_y) - q_3(\beta_z + \delta\omega_z) \\ q_0(\beta_x + \delta\omega_x) - q_3(\beta_y + \delta\omega_y) + q_2(\beta_z + \delta\omega_z) \\ q_3(\beta_x + \delta\omega_x) + q_0(\beta_y + \delta\omega_y) - q_1(\beta_z + \delta\omega_z) \\ -q_2(\beta_x + \delta\omega_x) + q_1(\beta_y + \delta\omega_y) + q_0(\beta_z + \delta\omega_z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

F_V 를 각 상태변수로 한번 편미분한 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F_V}{\partial V} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_d & -\alpha_c \\ -\alpha_d & 0 & \alpha_n \\ \alpha_c & -\alpha_n & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial F_V}{\partial q} = \begin{bmatrix} 2q_0f_x - 2q_3f_y + 2q_2f_z & 2q_1f_x + 2q_2f_y + 2q_3f_z \\ 2q_3f_x + 2q_0f_y - 2q_1f_z & 2q_2f_x - 2q_1f_y - 2q_0f_z \\ -2q_2f_x + 2q_1f_y + 2q_0f_z & 2q_3f_x + 2q_0f_y - 2q_1f_z \\ -2q_2f_x + 2q_1f_y + 2q_0f_z - 2q_3f_x - 2q_0f_y + 2q_1f_z \\ 2q_1f_x + 2q_2f_y + 2q_3f_z & 2q_0f_x - 2q_3f_y + 2q_2f_z \\ -2q_0f_x + 2q_3f_y - 2q_2f_z & 2q_1f_x + 2q_2f_y + 2q_3f_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial F_V}{\partial \delta f} = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial F_V}{\partial \delta \omega} = 0 \quad (\text{A.11})$$

F_q 를 각 상태변수로 한번 편미분한 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F_q}{\partial V} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial F_q}{\partial q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\beta_x + \delta\omega_x) & -(\beta_y + \delta\omega_y) & -(\beta_z + \delta\omega_z) \\ (\beta_x + \delta\omega_x) & 0 & (\beta_z + \delta\omega_z) & -(\beta_y + \delta\omega_y) \\ (\beta_y + \delta\omega_y) & -(\beta_z + \delta\omega_z) & 0 & (\beta_x + \delta\omega_x) \\ (\beta_z + \delta\omega_z) & (\beta_y + \delta\omega_y) & -(\beta_x + \delta\omega_x) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial F_q}{\partial \delta f} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial F_q}{\partial \delta \omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

F_V 및 F_q 를 각 상태 변수로 두 번 편미분 하였을 때 0이 아닌 항들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial q_0} &= \begin{bmatrix} 200 \\ 020 \\ 002 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial q_1} = \begin{bmatrix} 000 \\ 00-2 \\ 020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial q_2} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 02 \\ 0 & 00 \\ -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial q_3} = \begin{bmatrix} 0-20 \\ 2 & 00 \\ 0 & 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \\ \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial q_0} &= \begin{bmatrix} 000 \\ 00-2 \\ 020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial q_1} = \begin{bmatrix} 2 & 00 \\ 0-2 & 0 \\ 0 & 0-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ &= \begin{bmatrix} 0-20 \\ 2 & 00 \\ 0 & 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial q_3} = \begin{bmatrix} 002 \\ 000 \\ 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial q_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 02 \\ 0 & 00 \\ -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial q_1} = \begin{bmatrix} 020 \\ 200 \\ 000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial q_2} \\ &= \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial q_3} = \begin{bmatrix} 000 \\ 002 \\ 020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial q_0} &= \begin{bmatrix} 0-20 \\ 2 & 00 \\ 0 & 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial q_1} = \begin{bmatrix} 002 \\ 000 \\ 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial q_2} \\ &= \begin{bmatrix} 000 \\ 002 \\ 020 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial q_3} = \begin{bmatrix} -2 & 00 \\ 0 & -20 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial \delta f_x} = 2 \begin{bmatrix} 10 & 00 \\ 00 & 01 \\ 00 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial \delta f_y} = 2 \begin{bmatrix} 000 & -1 \\ 100 & 0 \\ 010 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_0 \partial \delta f_z} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -100 \\ 1 & 0 & 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial \delta f_x} = 2 \begin{bmatrix} 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial \delta f_y} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -100 \\ 1 & 0 & 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_1 \partial \delta f_z} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 01 \\ -1 & 0 & 00 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial \delta f_x} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 00 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial \delta f_y} = 2 \begin{bmatrix} 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial \delta f_z} = 2 \begin{bmatrix} 10 & 00 \\ 00 & 01 \\ 00 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial \delta f_x} = 2 \begin{bmatrix} 000 & -1 \\ 100 & 0 \\ 010 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial q_2 \partial \delta f_y} = 2 \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & 00 & -1 \\ 0 & 01 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_3 \partial \delta f_z} = 2 \begin{bmatrix} 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial^2 F_V}{\partial \delta f_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 F_V}{\partial q_j \partial \delta f_i} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial^2 F_q}{\partial q_i \partial \delta \omega_j} = \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_j \partial q_i} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_x \partial q_0} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_x \partial q_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_x \partial q_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_x \partial q_3} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_y \partial q_0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_y \partial q_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_y \partial q_2} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_y \partial q_3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_z \partial q_0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_z \partial q_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_z \partial q_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 F_q}{\partial \delta \omega_z \partial q_3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(A.20)



성 상 만

1992년 서울대 제어계측공학과 졸업.
 1995년 동 대학원 석사. 2000년 서울
 대 전기공학부 박사. 2000년~2004년
 삼성전자 무선사업부. 2004년~현재 한
 국기술교육대학교 메카트로닉스공학부
 교수. 관심분야는 항법, 비선형필터,

시스템 식별 및 선형제어.