

## 자이로를 이용한 두 링크 도립진자의 자세안정화

### Stabilization of a Two-link Inverted Pendulum with a Rate Gyro

조 백 규\*  
(BaekKyu Cho<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>Kookmin University

**Abstract:** Human generally uses three methods to keep balance. One of them is using reactive momentum such as swing an upper body or arms. In this study, we proposed a balancing controller for the reactive momentum method using an inverted pendulum. We simplified a human or a humanoid robot as a two-link inverted pendulum having two edges. In addition, we proposed a distinctive condition for controller transition. If a human is pushed, he has to change a balancing controller from using an ankle torque to using a reactive momentum or changing foot placement. When the balancing controller is changed from using an ankle torque to using a reactive momentum, it is required a proper timing to keep a stability and make smooth movement. In the experiment, the proposed controller and distinctive condition were verified.

**Keywords:** inverted pendulum, balancing, reactive momentum, rate gyro

#### 1. 서론

세계적으로 휴머노이드 로봇에 대한 많은 연구가 진행되고 있다. 이 분야는 인공지능, 비전, 보행 알고리즘 등 다양한 주제들을 포함한다. 휴머노이드 로봇의 최종 목표는 인간화이다. 다양한 주제를 통해 휴머노이드 로봇의 연구가 이뤄지고 있지만, 보행은 로봇의 인간화를 위해 필요한 기본적인 중요한 요소 중 하나이다. 이런 이유로 많은 일본 연구자들이 휴머노이드 로봇의 보행에 대한 연구에 많은 시간을 투자하고 있다[1-5].

다양한 외란에 대한 휴머노이드 로봇의 자세 안정화 능력은 안정적인 보행을 구현하기 위해 필수적인 요소이다. 인간은 일반적으로 몸의 균형을 잡기 위해 세가지 방법을 사용한다고 알려져 있다[6]. 첫 번째 방법은 발목 토크를 이용하는 방법이고, 두 번째 방법은 상체나 팔을 흔들며 발생하는 모멘텀을 이용한 방법이고, 세 번째 방법은 발바닥의 착지점을 바꾸는 방법이다. 인간은 상황에 따라 적절한 방법을 선택하여 사용하기 때문에, 안정적인 자세 안정화를 유지한다. 만약 외란이 작으면, 인간은 보통 발목 토크만을 사용하여 균형을 유지한다. ZMP (Zero-Moment Point)가 지지영역 안에 위치하도록 제어할 수 있으면, 인간은 발목 토크만으로 균형을 유지할 수 있다. 그러나 순간적으로 큰 외란이 가해지게 되면, 가상의 ZMP 또한 인간의 지지영역을 순간적으로 벗어나게 된다. 이는 발목 토크만으로 균형을 유지할 수 없음을 의미한다. 이런 경우, 발목 토크 대신 모멘텀을 이용하거나 발바닥의 착지점을 바꾸는 방법을 이용한다.

몇몇 연구자들은 휴머노이드 로봇을 위한 발바닥의 착지점 변경에 대한 연구를 수행하였다. J. Pratt et al은 'Capture point'와 'Capture region'이란 개념을 도입하였고, 발바닥의 착

지점 변경을 통해 로봇의 균형을 안정적으로 유지하려고 시도하였다[7]. A. Kuo는 관상면(coronal plane)에서 3차원 passive walker에 착지점 변경 방법을 적용하여 안정적인 보행을 구현하였다[8]. 이전 연구에서 저자는 에너지 보존 법칙을 이용하여 착지점 변경에 대한 제어기를 개발하였고, 이를 휴머노이드 로봇, 휴보2의 제자리 뒹뒹기에 적용하여 타당성을 검증하였다[9]. 그 밖에 착지점 변경에 관한 다른 연구들이 이족 로봇(biped robot)을 통해 수행되었다.

앞에서 언급한 바와 같이, ZMP가 지지영역을 벗어났을 때, 모멘텀을 이용하는 방법은 로봇 혹은 인간의 균형을 유지하기 위한 대안이 되는 방법이다. 예를 들어 인간이 외력에 의해 밀리면, 그는 상체나 팔을 휘둘러 몸의 균형을 쉽게 유지할 수 있다.

이 논문에서 저자는 모멘텀을 이용한 균형 유지 알고리즘을 제안하였다. 본 알고리즘을 실제 휴머노이드 로봇에 적용하기에 앞서, 좀 더 단순한 모델을 통해 알고리즘을 개발하고 실제 실험을 통해 그 타당성을 검증하였다. 이 논문에서 휴머노이드 로봇은 두 개의 날(edge)이 장착된 두 개의 링크로 이루어진 도립진자로 단순화하였다. 도립진자의 두 링크는 휴머노이드 로봇의 상체와 하체를 각각 의미하고, 두 개의 날은 로봇의 두발을 의미한다. 상대적으로 로봇의 발은 폭이 좁기 때문에 날로 가정하였다. 이 도립진자는 두 링크 사이에 장착된 구동기에 의해 제어되며, 이는 인간이 허리의 움직임을 통해 균형을 유지하는 것과 유사하다.

한편, 발목 토크를 통해 로봇의 균형을 유지하던 중 외란 등의 이유로 모멘텀을 이용한 방법으로 제어방법을 전환할 때, 안정적이고 부드러운 전환을 위해 두 제어 방법의 전환 시점을 적절히 찾아 이용할 필요가 있다. 두 제어 방법의 전환 시점이 적절치 못하면, 로봇은 오히려 더 불안정해지고 부자연스러워질 수 있다. 따라서 우리는 발목토크를 이용한 방법에서 모멘텀을 이용한 방법으로 제어기를 전환할 때의 적절한 시점을 결정하기 위한 판별조건을 설명하였다.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 11. 17., 수정: 2011. 12. 15., 채택확정: 2011. 12. 27.

조백규: 국민대학교 기계시스템공학부(BaekKyuCho@kookmin.ac.kr)

※ 2011년도 국민대학교 신진교수 연구지원금으로 수행된 연구임.

이 논문의 구성은 다음과 같다. II 장은 휴머노이드 로봇의 단순화 모델, 두 개의 링크로 이루어진 도립진자를 설명하고, 모멘텀을 이용한 방법을 위한 제어기를 설명한다. III 장은 발목토크를 이용한 방법에서 모멘텀을 이용한 방법으로의 제어기 전환 시점을 위한 판별조건을 설명한다. IV 장은 제한한 방법들을 이용한 실험을 설명한다. V 장은 결론을 통해 이 논문을 마무리한다.

**II. 도립진자의 자세안정화 (모멘텀을 이용한 방법)**

**1. 인간의 단순화 시스템**

인간 또는 휴머노이드 로봇은 크게 두 부분 - 하체와 상체 - 으로 나눌 수 있다. 또한 하체부분은 두 다리로 이루어져 있다. 이런 관점에서 그림 1과 같이 인간은 두 개의 날을 갖는 두 개의 링크로 이루어진 도립진자로 단순화할 수 있다. 도립진자의 위 링크는 인간의 상체, 도립진자의 아래 링크는 인간의 하체 역할을 하며 두 날은 인간의 두 발의 역할을 한다. 그리고 두 링크 사이에 관절은 인간의 허리 역할을 한다. 인간은 몸의 균형을 유지하기 위해 전정기관을 사용한다. 하지만, 전정기관은 지면에 대한 절대각도를 측정하지 못한다. 이와 같은 전정기관을 모사하기 위해, 도립진자 시스템에 레이트 자이로를 사용한다. 도립진자 시스템에서 두 링크 사이의 상대 각도는 엔코더에 의해 측정이 되며, 레이트 자이로는 지면에 대한 도립진자의 아래 링크의 각속도를 측정한다. 이 논문에서 우리는 도립진자 시스템을 이용하여 인간의 3가지 균형 잡는 방법 중 모멘텀을 이용한 방법에 대해 설명한다.

**2. 도립진자의 운동 방정식**

시스템의 운동방정식을 유도하기 위해, 시스템의 파라미터와 좌표계 설정이 필요하다. 그림 2는 시스템, 시스템의 파라미터, 그리고 좌표계를 보여준다.  $m_1$ 은 아래 링크의 질량,  $m_2$ 는 모터와 감속기의 질량,  $m_3$ 는 위 링크의 질량, 그리고  $m_4$ 는 위 링크 위쪽에 부착된 무게 추의 질량을 나타낸다.  $\theta_{11}$ 은 지면의 수직방향 축에 대한 아래 링크의 각도 그리고  $\theta_{22}$ 는 아래 링크에 대한 위 링크의 상대각도를 나타낸다. 또한  $l_2$ 는 위 링크의 길이를 나타내며,  $l_{11}$ 은 날과 아래 링크를 포함한 길이를 나타낸다.



그림 1. 두 날을 갖은 두 개의 링크로 이루어진 도립진자 시스템.

Fig. 1. Two-link inverted pendulum having two edges.

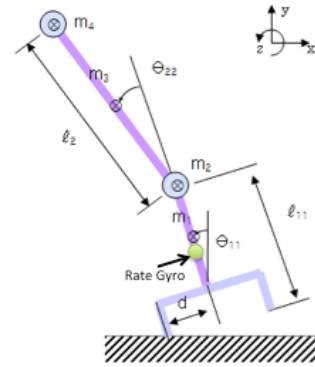


그림 2. 시스템의 파라미터와 좌표계.

Fig. 2. Parameter and coordinate axes of the system.

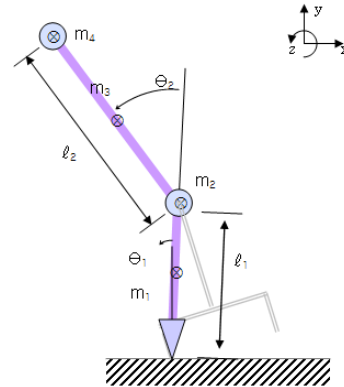


그림 3. 단순화한 도립진자 시스템.

Fig. 3. Simplified inverted pendulum.

하지만 도립진자 시스템의 두 날은 시스템의 운동 방정식을 더 복잡하게 만든다. 이 논문에서 우리는 한 발 지지 상태에서의 균형에 초점을 두었기 때문에, 그림 3에서 보여지는 것과 같이 실제 도립진자 시스템은 단순한 도립진자 시스템으로 단순화할 수 있다. 아래 링크와 지지하는 날은 함께 가상의 링크로 가정하였다. 가상의 링크의 길이는  $l_1$ , 그리고 지면의 수직 축에 대한 가상의 링크의 각도는  $\theta_1$ 으로 정의하였다.

라그랑지안 방법을 통해 아래와 같이 두 링크로 이루어진 도립진자의 운동방정식을 구하였다.

$$\begin{bmatrix} 2M_1 + 2M_2 + 2M_3 \cos \theta_2 & 2M_2 + M_3 \cos \theta_2 \\ 2M_2 + M_3 \cos \theta_2 & 2M_2 + J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_3 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ M_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 + B\dot{\theta}_2 - \frac{K_f}{R} K_b \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_4 \sin \theta_1 + M_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ M_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{R} V \end{bmatrix} \quad (1)$$

표 1. 시스템 파라미터.

Table 1. System parameters.

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$l_1$	$l_2$	Gear ratio
0.020	0.346	0.035	0.348	0.155	0.200	111
$J_1$		$J_2$		$J_3$		$J_4$
$4.01 \times 10^{-5}$		$1.56 \times 10^{-4}$		$1.17 \times 10^{-4}$		$1.57 \times 10^{-4}$
$J_m$	B	$K_t$	$K_b$	R	g	Backlash
0.015	0	2.986	2.986	7.9	9.8	1 degree

여기서

$$M_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}J_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{2}J_2^2 + \frac{1}{2}m_3l_1^2 + \frac{1}{2}m_4l_1^2$$

$$M_2 = \frac{1}{2}m_3\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}J_3 + \frac{1}{2}m_4l_2^2 + \frac{1}{2}J_4$$

$$M_3 = \frac{1}{2}m_3l_1l_2 + m_4l_1l_2$$

$$M_4 = -m_1g\frac{l_1}{2} - m_2gl_1 - m_3gl_1 - m_4gl_1$$

$$M_5 = -m_3g\frac{l_2}{2} - m_4gl_2.$$

또한  $V$ 는 모터의 입력 전압이고,  $J_1$ 은 아래 링크의 관성모멘트,  $J_2$ 는 모터의 관성모멘트,  $J_3$ 은 위 링크의 관성모멘트,  $J_4$ 는 상체의 무게 추의 관성모멘트, 그리고  $J_m$ 은 모터의 로터의 관성모멘트를 나타낸다. 그리고  $B$ 는 모터의 댐핑계수,  $K_t$ 는 모터의 토크상수,  $K_b$ 는 역기전력 상수,  $R$ 은 모터의 저항값을 나타낸다. 마지막으로,  $g$ 는 중력가속도를 나타낸다. 각 파라미터의 값들은 표 1에 자세히 기술하였다.

### 3. 운동방정식의 선형화

두 링크로 이루어진 도립진자는 비선형 시스템이다. 만약 시스템이 작은 영역 안에서 움직인다면, 비선형 시스템을 선형화할 수 있다. 운동방정식의 선형화를 위하여, 식 (1)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{R}V \end{bmatrix}$$

그리고 이는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \left( -C + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t}{R}V \end{bmatrix} \right)$$

위 식을 이용하여, 어떤 특정 상태와 입력  $-\theta_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{20}, \ddot{\theta}_{10}, \ddot{\theta}_{20}$ , 그리고  $V_0$ 에 대해, 테일러 급수를 이용하여 선형화된 운동방정식을 구한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{10} \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_{10} \\ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{20} \\ \ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_{20} \end{bmatrix} = \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \\ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_1}{\partial V} \\ 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}_2}{\partial V} \end{bmatrix} (V - V_0)$$

여기서 각 편미분식은 편미분 후,  $\theta_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{20}, \ddot{\theta}_{10}, \ddot{\theta}_{20}$ , 그리고  $V_0$ 을 대입하여 정량적인 값을 얻는다.

만약 특정 상태가 평형상태(equilibrium states)이면, 특정 상태 중 각속도와 각가속도는 다음과 같이 0이 된다.

$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{20} = \ddot{\theta}_{10} = \ddot{\theta}_{20} = 0 \quad (3)$$

따라서 식 (3)을 식 (2) 대입함으로써, 다음과 같이  $\theta_{10}, \theta_{20}$ , 그리고  $V_0$ 의 관계식을 찾을 수 있다.

$$\theta_{10} = \tan^{-1} \frac{-M_5 \sin \theta_{20}}{M_4 + M_5 \sin \theta_{20}} \quad (4)$$

$$V_0 = \frac{R}{K_t} M_5 \sin(\theta_{10} + \theta_{20})$$

예를 들어  $\theta_{20}$ 를  $-20$ 도 ( $-0.349$ 라디안)으로 설정을 하면, 평형 상태를 이루기 위해  $\theta_{10}$ 은  $7.8$ 도 ( $0.136$ 라디안)가 된다. 그리고, 이 값들을 이용하여 다음과 같은 선형화된 시스템의 상태방정식을 얻게 된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 37.70 & 0 & 3.36 & 29.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8.37 & 0 & 20.64 & -62.71 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.86 \\ 0 \\ 21.0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{and } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{10} \\ \theta_2 - \theta_{20} \\ \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 - 0.136 \\ \dot{\theta}_1 - 0 \\ \theta_2 + 0.349 \\ \dot{\theta}_2 - 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{u}(t) = V$$

### 4. 제어기 설계

LQR (Linear Quadratic Regulation) 제어기법을 이용하여 제어기를 설계하였다. 성능지표 식은 다음과 같다.

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt$$

LQR 제어기법은 성능지표 식의  $\mathbf{Q}$  행렬과  $\mathbf{R}$  행렬의 패널티 비율을 적절히 조절함으로써 제어특성을 손쉽게 바꿀 수 있는 장점이 있다. 따라서 본 연구의 목적에 맞는 제어기를

손쉽게 선정하기 위하여 LQR 기법을 이용하였다. 이 시스템의 제어 목적은 평형상태에서 자세를 잘 유지하는 것이기 때문에, Q 행렬에서 위치에 대한 패널티를 속도에 대한 패널티에 비해 크게 주었다. 성능지표 식의 Q와 R은 다음과 같이 설정하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ and } R = I$$

최종적으로 제어기는 다음과 같다.

$$u = -Kx$$

$$K = \begin{bmatrix} -556.3 & -95.7 & -217.3 & -44.3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

따라서 두 개의 링크로 이루어진 도립진자는 위의 제어기를 이용하여 특정한 평형상태에서 시스템의 균형을 유지한다. 앞에서 설명과 마찬가지로, 다양한 평형상태에 대해 앞의 과정을 되풀이 하면, 다양한 평형상태에 대해서도 도립진자는 자세 안정화를 취할 수 있다.

### III. 제어기 변환에 대한 판별

앞장에서는 도립진자의 자세안정화에 대해 설명하였다. 이는 인간의 세가지 자세 안정화 방법 중, 모멘텀을 이용한 방법에 해당한다. 하지만 인간의 경우, 일반적인 상황에서 두발로 서 있을 경우에는 발목 토크를 이용하여 자세 안정화를 취한다. 그리고 갑작스러운 외란이 시스템에 가해져 ZMP가 지지영역을 벗어났을 때 모멘텀을 이용한 자세 안정화를 이용한다. 따라서 로봇 시스템에서도 이와 같은 발목 토크를 이용한 제어기에서 모멘텀을 이용한 제어기로의 전환이 필요하다. 이때, 제어기 전환의 적절한 시점을 찾는 것이 중요하다. 적절치 못한 곳에서 제어를 전환하게 되면, 오히려 시스템을 더 불안정하게 만들 수 있으며, 시스템이 더 부자연모습을 취할 수 있기 때문이다. 이런 이유로 시스템의 안정적인 제어기 변환을 위한 판별식이 필요하다.

#### 1. 레이트 자이로의 영향

인간의 전정기관을 모사하기 위해 레이트 자이로를 사용한다. 이 시스템에 사용되는 레이트 자이로는 Silicon Sensing Company에서 개발된 CRS03-02이다. CRS03-02의 측정 범위는  $\pm 100^\circ/\text{sec}$ 이다. 각속도가 이 범위를 벗어나게 되면, 센서 신호의 포화상태(saturation)에 도달한다. 레이트 자이로의 측정 범위가 상대적으로 좁기 때문에, 이 포화상태는 시스템의 안정성에 크게 영향을 미친다. 즉, 포화상태는 모멘텀을 이용한 자세 안정화 방법을 이용하는데 제한을 준다. 이런 이유로 모멘텀을 이용한 자세 안정화 방법의 사용 유무를 판별할 판별식을 찾아야 하며, 이 판별식은 묘사함수(describing function)를 이용하여 구한다[10]. ZMP가 지지영역을 벗어났음에도 불구하고 자세 안정화를 위해 모멘텀을 이용한 방법을 사용하지 못할 경우에는 착지점 변환 방법을 이용해야 할 것이다.

#### 2. 포화상태에 대한 묘사함수

포화상태의 비선형성은 다음과 같은 식의 묘사함수를 갖는다[10].

$$\alpha(A) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{A_{sat.}}{A} + \frac{A_{sat.}}{A} \sqrt{1 - \frac{A_{sat.}^2}{A^2}} \right], \text{ if } 0 \leq \frac{A_{sat.}}{A} < 1$$

$$\alpha(A) = 1, \text{ if } \frac{A_{sat.}}{A} \geq 1$$

여기서 A는 삼각함수 입력 신호의 진폭을 나타내고  $A_{sat.}$ 는 포화상태의 상한치수를 나타낸다. 그리고 입력 진폭이 상한치수를 많이 벗어나면 벗어날수록, 묘사함수의 출력,  $\alpha$ 는 더욱 더 작아진다.

#### 3. 나이퀴스트 분석

레이트 자이로의 포화상태를 고려하여 그림 4와 같이 시스템의 블록다이어그램을 표현하였다.

G는 모터와 도립진자로 이루어진 시스템의 전달함수이고, K는 제어기의 전달함수, 그리고 P는 레이트 자이로의 포화상태를 고려한 전달함수이다.

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1} B,$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ and } K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}^T$$

여기서

$$g_1 = \frac{-9.86s^2 + 274}{s^4 + 62.7s^3 - 58.3s^2 - 2118s + 806.2}$$

$$g_2 = \frac{-9.86s^3 + 274s}{s^4 + 62.7s^3 - 58.3s^2 - 2118s + 806.2}$$

$$g_3 = \frac{21s^2 - 709.2}{s^4 + 62.7s^3 - 58.3s^2 - 2118s + 806.2}$$

$$g_4 = \frac{21s^3 - 709.2s}{s^4 + 62.7s^3 - 58.3s^2 - 2118s + 806.2}$$

따라서 그림 4의 제어시스템의 특성방정식은 다음과 같다.

$$1 + k_1g_1 + \alpha k_2g_2 + k_3g_3 + k_4g_4 = 0 \quad (8)$$

나이퀴스트 분석을 위해서, 식 (8)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

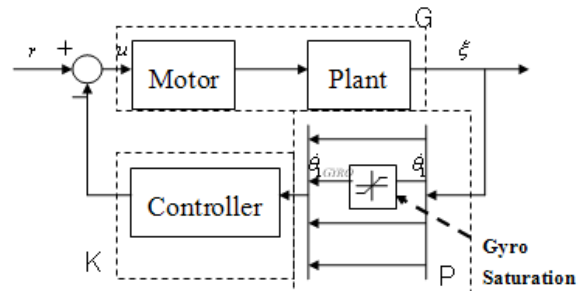


그림 4. 포화상태를 고려한 시스템의 블록다이어그램.

Fig. 4. Block diagram considering the saturation of a gyro.

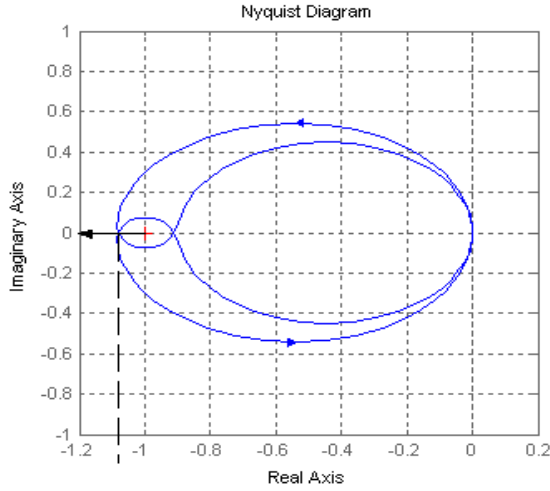


그림 5. 식 (8)의 나이퀴스트 선도.

Fig. 5. Nyquist plot of Eq. (8).

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{k_2 g_2}{1 + k_1 g_1 + k_3 g_3 + k_4 g_4} \quad (9)$$

그림 5는 식 (9)의 나이퀴스트 선도를 보여준다. 식 (9)의 좌변의 나이퀴스트 선도는 순환곡선(looped curve)이고, 우변의 나이퀴스트 선도는 -1부터 음의 무한대로 향하는 직선으로 표현된다.

식 (9)의 우변은 RHP (Right Half Plane)에 두 개의 극점을 갖는다. 시스템의 안정성을 위해서는 식 (9)의 좌변은 식 (9)의 우변의 나이퀴스트 선도에 의해 두 번 감싸져야 한다. 그러므로,

$$\begin{aligned} -1.08 < -\frac{1}{\alpha} \leq -1 \\ \therefore \alpha > 0.93. \end{aligned} \quad (10)$$

식 (7)과 식 (10)에 의해, 시스템의 안정성을 위한 A의 경계 조건은 다음과 같다.

$$-107.5 < A < 107.5 \quad (^\circ/s) \quad (11)$$

여기서 Asat.는 100°/sec이다.

따라서 시스템의 안정성을 위한 레이트 자이로의 입력,  $\dot{\theta}_1$ , 의 제어 가능한 범위는 다음과 같다.

$$-107.5 < \dot{\theta}_1 < 107.5 \quad (^\circ/s) \quad (12)$$

지면에 대한 아래 링크의 각속도가 위의 범위에 존재하면, 도립진자는 한 날로 자세 안정화를 취하게 된다.

#### 4. 판별조건

발목 토크를 이용한 자세 안정화 방법에서 모멘텀을 이용한 자세 안정화로 변환하기 위한 시점을 결정해야 한다. 이는 제어기 변환 시 시스템의 안정성 확보와 시스템의 부드러운 움직임을 위해 고려해야 할 중요한 요소이다. 즉, 두 링크로 이루어진 도립진자의 초기조건이 어떤 값이냐에 따라, 자세 안정화가 가능할 수도 있고 그렇지 못 할 수도 있게 된다. 초기조건이 적절치 못하면, 로봇의 균형유지를 위한 제어과정 중,  $\dot{\theta}_1$ 이 식 (12)의 영역을 벗어나게 되고 시스템은 결국

넘어질 것이다. 단지,  $\dot{\theta}_1$ 의 초기값이 식 (12)의 영역 안에 존재한다고 해결되는 문제가 아니라, 제어가 이뤄지는 모든 시간 동안  $\dot{\theta}_1$ 이 위의 범위 안에 있어야 한다. 이런 이유로, 제어기 변환의 적절한 시점 결정은, 모멘텀(상체)을 이용한 균형 유지 방법의 초기조건을 어떻게 잡느냐의 문제로 해석할 수 있다.

임의의 평형상태  $\mathbf{x}_{eq}$ 에서 식 (1)을 선형화하면 식 (2)로 표현된다. 이는 식 (5)와 같이 상태방정식으로 표현된다. 제어기 (6)을 식 (5)에 적용하면 다음과 같이 제어된 시스템의 상태방정식을 얻게 된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (13)$$

임의의 초기조건,  $[\theta_{1\_init}, \dot{\theta}_{1\_init}, \theta_{2\_init}, \dot{\theta}_{2\_init}]^T$ , 에 대한 식 (13)의 해는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t} \mathbf{x}_{init} \quad (14)$$

여기서

$$\mathbf{x}_{init} = \begin{bmatrix} \theta_{1\_init} \\ \dot{\theta}_{1\_init} \\ \theta_{2\_init} \\ \dot{\theta}_{2\_init} \end{bmatrix} - \mathbf{x}_{eq}$$

만약  $\mathbf{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t}$ 을 F로 정의하면, 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) & f_{14}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) & f_{24}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) & f_{34}(t) \\ f_{41}(t) & f_{42}(t) & f_{43}(t) & f_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

실베스터 전개(sylvester's expansion)에 의해, F는 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{F}_2 e^{\lambda_2 t} + \mathbf{F}_3 e^{\lambda_3 t} + \mathbf{F}_4 e^{\lambda_4 t} \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{F}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) - \lambda_j \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_j} \text{ and}$$

$\lambda_i = \text{eigenvalues of } \mathbf{A} - \mathbf{BK}.$

최종적으로, 시스템이 제어될 때  $\dot{\theta}_1$ 의 시간에 대한 변화는 다음과 같은 식으로 구해진다.

$$\dot{\theta}_1(t) = \left[ f_{21}(t) \quad f_{22}(t) \quad f_{23}(t) \quad f_{24}(t) \right] \mathbf{x}_{init} \quad (17)$$

따라서 식 (17)이 식 (12)의 범위 안에 존재하면 모멘텀을 이용한 방식을 통해 시스템을 제어할 수 있다.

예를 들어 평형상태가  $[0.136 \ 0 \ -0.349 \ 0]^T$ 일 때에 대해 생각해 보면 시스템의 파라미터와 선형화된 운동방정식을 통해 다음과 같이 제어된 시스템의 고유 값과 식 (17)의 각 항의 값을 갖게 된다.

$$\begin{aligned} f_{21}(t) &= 96.9e^{2t} + 18.3e^{2t} - 910.0e^{2t} + 794.8e^{2t} \\ f_{22}(t) &= 16.7e^{2t} + 3.15e^{2t} - 156.1e^{2t} + 137.2e^{2t} \\ f_{23}(t) &= 38.1e^{2t} + 7.8e^{2t} - 363.2e^{2t} + 317.3e^{2t} \\ f_{24}(t) &= 7.3e^{2t} + 1.5e^{2t} - 72.3e^{2t} + 63.6e^{2t} \end{aligned}$$

여기서

$$\lambda_1 = -63.5, \lambda_2 = -1.2, \lambda_3 = -5.9, \text{ and } \lambda_4 = -5.8$$

시스템의 안정적인 제어를 위해, 식 (12)를 이용하여 다음과 같은 조건이 만족되어야 한다.

$$|\dot{\theta}_1(t)| = \left| \begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} x_{init} \right| < 107.5(\text{°/s}) \quad (18)$$

따라서 다음과 같이 초기조건에 대한 판별식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} |\dot{\theta}_1(t)| &= \left| \begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} x_{init} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix} \right| |x_{init}| \\ &\leq \left[ \max|f_{21}| \max|f_{22}| \max|f_{23}| \max|f_{24}| \right] |x_{init}| \\ &= \max|f_{21}| |x_{init}(1)| + \max|f_{22}| |x_{init}(2)| \\ &\quad + \max|f_{23}| |x_{init}(3)| + \max|f_{24}| |x_{init}(4)| \\ &< 107.5(\text{°/s}) \end{aligned}$$

$f_{21}, f_{22}, f_{23}$ , 그리고  $f_{24}$ 의 최댓값이 63.5, 10.2, 24.9 그리고 4.7 이므로, 최종적으로 식 (18)은 다음과 같이 바뀐다.

$$63.5|x_{init}(1)| + 10.2|x_{init}(2)| + 24.9|x_{init}(3)| + 4.7|x_{init}(4)| < 107.5(\text{°/s}) = 1.86(\text{rad/s}) \quad (19)$$

따라서 두발로 서있는 등 발목으로 자세 균형을 유지하다가 외란에 의해 로봇이 밀려 한발지지 상태로 상체의 움직임만을 통해 자세 제어를 해야 하는 경우, 시스템의 상태(states)가 식 (19)을 만족하는 시점에서 제어기를 변환하면 안정적인 자세 유지를 할 수 있다.

#### IV. 실험

본 논문에서 제안한 방법을 실험을 통해 검증하였다. 실험 방법은 다음과 같다. 그림 6의 왼쪽과 같이, 두 개의 날을 갖는 도립진자가 두 날로 서 있도록 하였다. 시스템의 ZMP는 두 날 사이에 위치하므로 시스템은 안정적인이다. 이때, 도립진

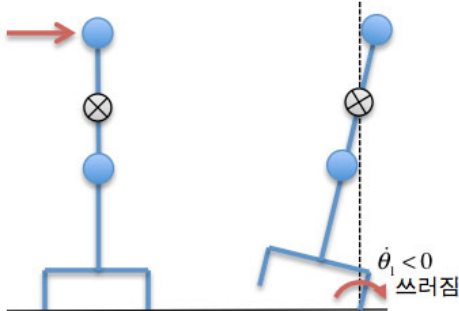


그림 6. 실험방법.

Fig. 6. Explanation of experiment.

자에 측면방향에서 외란을 가한다. 외란이 가해지면, 도립진자는 하나의 날로 서 있게 된다. 외란의 크기가 작으면 도립진자는 결국 원상태로 돌아와 다시 두 날로 서있게 되고, 외란의 크기가 크면 진자는 반대방향으로 쓰러져서 자세안정화를 취할 수 없는 상태가 된다. 후자는 그림 6의 오른쪽과 같이 진자의 질량 중심과 지지 날이 수직을 이룰 때  $\dot{\theta}_1$  가 음수 값을 가질 때 해당된다. 따라서 후자의 조건을 만족하면서 시스템의 상태가 식 (19)를 만족하는 할 때 모멘텀을 이용한 제어를 사용하여 한발지지 상태로 자세 안정화를 취하도록 하였다.

다수의 상황에 대해 실험을 실행하였으며, 표 2는 실험이 성공적으로 이루어진 경우 중, 대표적인 몇몇 경우에 대한 초기조건과 그 초기조건을 식 (19)에 대입하여 구한 판별 값을 나타낸다. 판별 값이 1.86보다 작았기 때문에 모멘텀을 이용한 제어를 수행하였고, 도립진자는 안정적으로 한 날 지지 자세 안정화를 이뤘다. 그림 7은 제어기가 구동되어 시스템이 한발 지지 자세 안정화를 취할 때의 시스템 상태 값을 나타낸다. 두 링크의 각도 값들은 작은 변화가 있지만 자세를 유지하기 위해 일정한 값을 유지하고 있으며 각속도 값들도 0을 유지하면서 0 주변에서 변화하고 있다.

그림 8은 실험과정을 보여준다. 처음 도립진자는 첫 번째 그림과 같이 안정적으로 서있다. 두 번째 그림과 같이, 외부로부터 시스템이 밀리면, 식 (19)의 판별조건을 통해 모멘텀을 이용한 제어기 사용 시점을 판별하였다. 마지막으로, 판별조건을 판별하여 네 번째 그림과 같이 상체의 움직임을 통해 시스템의 자세안정화를 취하였다.

표 2. 초기조건에 대한 판별 값.

Table 2. Distinctive value for initial conditions.

$\theta_{1\_init}$	$\dot{\theta}_{1\_init}$	$\theta_{2\_init}$	$\dot{\theta}_{2\_init}$	판별값
0.1370	-0.0015	-0.3517	0.0000	0.1689
0.1371	-0.0304	-0.3517	0.0000	0.4701
0.1368	0.0177	-0.3511	0.0000	0.3065
0.1379	-0.0355	-0.3540	0.0000	0.6302
0.1371	-0.0384	-0.3517	0.0000	0.5517
0.1394	-0.0351	-0.3580	0.0000	0.8209
0.1386	-0.0399	-0.3557	0.0000	0.7618

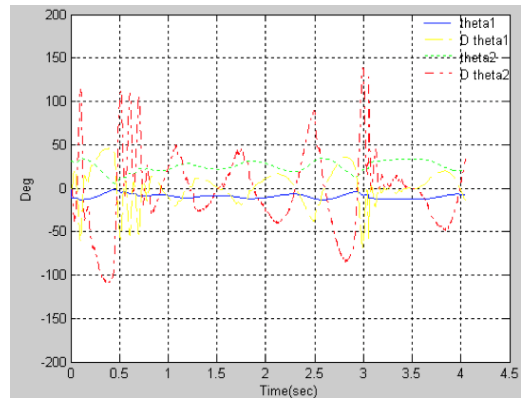


그림 7. 실험 그래프 (시스템 상태값).

Fig. 7. Experimental graph for the system states.

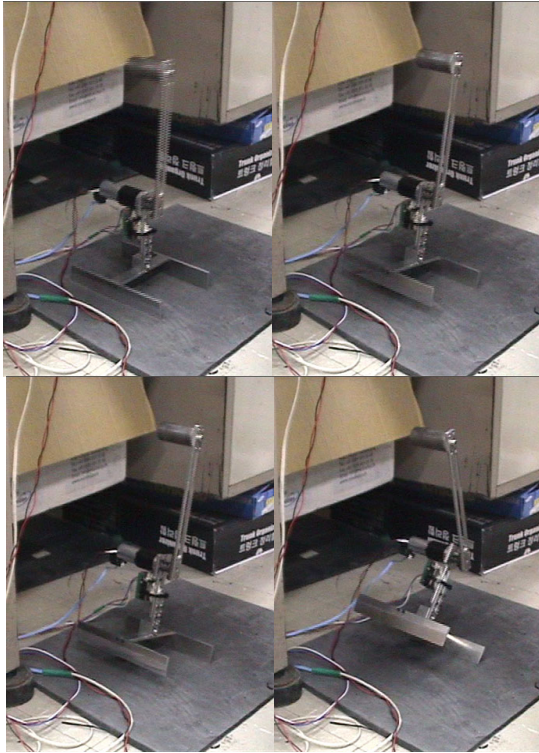


그림 8. 실험결과. 첫 번째 그림- 도립진자가 가만히 서있음; 두 번째 그림- 외부에서 진자를 밀음; 세 번째 그림- 판별 조건을 판단; 네 번째 그림- 판별 조건 판단 후 시스템제어.

Fig. 8. Experimental result. First picture - the pendulum stands up; second picture - pushed; third picture - calculating distinctive value; fourth picture - controlling the pendulum.

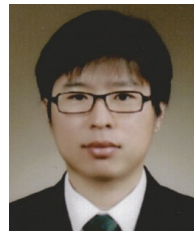
## V. 결론

두 개의 날을 갖는 두 링크로 이루어진 도립진자를 이용하여, 모멘텀을 이용한 - 상체를 이용한 - 제어 방법에 대해 기술하였다. 임의의 평형상태에 대해 시스템을 선형화하고 LQR 제어기법을 통해, 시스템의 자세 안정화를 구현하였다. 또한 발목토크(또는 두발지지)를 이용한 자세 안정화로부터 모멘텀을 이용한 자세 안정화로의 제어기 변환을 할 때, 시스템의 안정성 확보와 부드러운 제어기 변환을 위해, 자이로의 포화특성을 이용하여 제어기 변환시점의 판별조건을 제안하였다. 마지막으로 실험을 통하여 제안한 제어기의 타당성을 검증하였고 판별조건의 타당성을 검증하였다. 제안한 판별조건은 이상적인 모델을 통하여 찾은 것이기 때문에, 항상 잘 작동되지는 않았다. 앞으로 추가적인 센서와 센서신호의 효율적인 처리를 통해 판별조건 신뢰도를 높일 계획이며, 제안한 방법을 실제 휴머노이드 모델에 적용할 계획이다.

## 참고문헌

[1] H. Miura and I. Shimoyama, "Dynamic walk of a biped," *International Journal of Robotics Research*, vol. 3, no. 2, pp. 60-74, Apr. 1984.

- [2] A. Takahashi, M. Ishida, Y. Yamazaki, and I. Kato, "The realization of dynamic walking by biped walking robot WL-10RD," in *Proc. International Conference on Advanced Robotics*, pp. 459-466, 1985.
- [3] J. Furusho and A. Sano, "Sensor-based-control of a nine link biped," *International Journal of Robotics Research*, vol. 9, pp. 83-98, Apr. 1990.
- [4] S. Kajita, T. Yamaura, and A. Kobayashi, "Dynamic walking control of a biped robot along a potential energy conserving orbit," *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 8, pp. 431-438, Aug. 1992.
- [5] A. A. Grishin, A. M. Formalsky, A. V. Lensky, and S. V. Zhitomirsky, "Dynamic walking of a vehicle with two telescopic legs controlled by two drivers," *International Journal of Robotics Research*, vol. 13, pp. 137-147, Apr. 1994.
- [6] B. Stephens, "Humanoid push recovery," in *IEEE-RAS International Conference on Humanoid robots*, pp. 589-595, Nov. 2007.
- [7] J. Pratt, J. Carff, S. Drakunov, and A. Goswami, "Capture point: a step toward humanoid push recovery," in *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 200-207, Dec. 2006.
- [8] Arthur D. Kuo, "Stabilization of lateral motion in passive dynamic walking," *International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 9, pp. 917-930, 1999.
- [9] B.-K. Cho and J.-H. Oh, "Practical experiment of balancing for a hopping humanoid biped against various disturbances," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Taipei, Taiwan, pp. 4464-4470, Oct. 2010.
- [10] J.-Jacques E. Slotine and Weiping LI, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [11] S. C. Brown and K. M. Passino, "Intelligent control for an acrobat," *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, no. 18, pp. 209-248, 1997.
- [12] H. S. Kim, "A study on the Posture stabilization of single leg robot," Master Course, KAIST, 2003.
- [13] K. Y. Yi, "Posture control of double inverted Pendulum with a single actuator," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 5, no. 5, pp. 577-584, Jul. 1999.
- [14] P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone, *Linear-Quadratic Control*, Prentice Hall, 1998.



## 조백규

한국과학기술원(KAIST) 기계공학과에서 2002년, 2004년, 그리고 2009년에 학사, 석사, 박사. 2009년 일본 ATR (Advanced Telecommunications Research Institute International)에서 박사 후 과정. 2011년 미국 카네기 멜론 대학 Robotics Institute에서 박사 후 과정. 2011년 8월~현재 국민대학교 기계시스템공학부 전임강사로 재직 중. 관심분야는 로봇 설계 및 제어, 휴머노이드 로봇, 보행 및 주행 알고리즘 개발, 마이크로 프로세서.