韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 26집 제 4호, 2012. 11. 339-349

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 26, No. 4, Nov. 2012. 339-349

정수비를 이용한 음 생성 관련 교수계획

이 규 봉 (배재대학교)

특정 정수비 1 : 2 : 3 : 4는 동양과 서양을 막론하고 음의 생성에 중요한 역할을 했다. 유클리드 작도법을 이용한 음계보를 만들어 악기를 제작하고 소리를 들으면서 수학의 이론이 음악에 끼친 영향을 알게 한다. 대학의 교양수학이나 중등학교 대상의 교육에 사용할 수 있다.

1. 시작하며

음악과 수학은 전혀 다른 학문 분야로 생각할 수 있지만 의외로 유사한 점이 많다. 수학에는 수많은 기호가 사용된다. 이 기호의 뜻을 모르면 수학을 이해하는 것은 불가능하다. 그러나 그 뜻을 명확히 알면 많은 내용을 간단하게 함축시킬 수 있어 논리 전개에 매우 도움을 준다. 마찬가지로 음악에도 수많은 기호(음표)가 이용된다. 수학과 마찬가지로 그 기호를 모르면 전혀 악보를 읽을 수 없고 소리는 입에서 입으로 전해질 뿐이다.

음악은 감성적이라 할 수 있고 이에 반해 수학은 이성적이라 할 수 있으니 서로 상반된다고 볼 수 있다. 그러나 19세기 영국의 수학자 실베스터(J. J. Sylvester)는 "음악은 감성의 수학이고, 수학은 이성의 음악이다."라고 하여 상반됨에도 불구하고 서로 매우 밀접함을 말하였다. 그뿐 아니라 프랑스 작곡가 라모(J. P. Rameau)도 "음악과 그토록 오래 함께해 왔음에도 불구하고, 음악에 대한 지식을 진정으로 이해하게 된 것은 수학의 도움에 의해서였다."라 말하였으며, 작곡가 나운영도 '수학적 두뇌 없이는 음악을 할 수 없다.'라고 말한 것으로 보아 음악과 수학은 깊은 연관이 있다.

아리스토텔레스(Aristotle)는 천체가 내는 소리는 들을 수 없어 처음부터 음악의 고려 대상이 되지 않는다고 반박하였지만, 3세기 경 아프로디시아스(Aphrodisias)의 알렉산더(Alexander)는 항성이 만드는 소리는 그 운동이 느릴 경우 깊고 낮은 소리를 내며 운동이 빠를 경우 높은 소리를 낸다고 주장하였다.[1] 수학자이자 천문학자인 케플러(Kepler)는 지구가 내는 소리는 '미-파-미'라 하였고, 오늘날과 같은 현대적인 의미의 장조와 단조의 개념도 확립하였다.[2]

고대 그리스의 피타고라스(Pythagoras)는 수학과 음악을 최초로 연결하였다. 그는 수학은 절대적 수이고 음악은 응용적 수라고 하였다. 그는 이전부터 널리 알려진 완전8, 5, 4도 등의 잘 어울린 음정을 정수 비례로 나타내었고, 음높이와 소리를 내는 줄의 길이 사이에 반비례가 성립한다는 사실을 발견하여 음향학 이론에 큰 업적을 남겼다. 피타고라스 당시에는 줄의 길이로 음의 높고 낮음을 설명하였다. 같은 장력의 줄은 길이가 짧을수록 높은 음이 난다. 줄의 길이가 반으로 짧아지면(1 : 2) 한 옥타브 위의 음이 나고, 2/3로 짧아지면(2 : 3) 완전 5도

* 접수일(2012년 8월 20일), 수정일(1차: 2012년 8월 20일, 2차: 2012년 9월 11일), 게재확정일자(2012년 9월 18일)
* ZDM 분류 : F90
* MSC2000 분류 : 97
* 주제어 : 정수비, 피타고라스 음계, 삼분손익법, 유클리드 작도

1) 서우석 (2010).
2) 김홍종(2009).

위의 음, 3/4으로 짧아지면(3 : 4) 완전 4도 위의 음이 난다.[3)]

갈릴레오 갈릴레이(Galileo Galilei)는 같은 음높이의 소리를 내는 두 개의 줄 중 하나의 장력을 더 세게 하면 음높이가 비례해서 올라가고, 굵기를 달리하면 음높이가 제곱근에 반비례해서 변화한다는 사실을 알아냈다. 또한 그는 줄이 초당 진동하는 수(주파수)가 크면 음이 높고 작으면 음이 낮음을 발견하였다. 19세기에 푸리에(J. B. Fourier)는 음파의 움직임인 파동 이론의 기초가 되는 수학적 공식을 완성하여 보이지 않고 들리기만 하는 소리를 삼각함수를 이용하여 보여주었다.

소리가 처음 울리면 제일 낮은 주파수인 기본음이 울리며 동시에 그 주파수의 2배, 3배, … 되는 음들이 함께 나온다. 이렇듯 소리에 섞여 나오는 다른 높이의 아주 약한 소리들을 배음(overtones)이라 한다. 이러한 배음은 음색을 결정한다. 우리가 악기의 소리를 구별할 수 있는 것도 악기마다 갖고 있는 고유한 배음구조 때문이다. 눈은 대칭적으로 균형이 잘 잡힌 모양에서 아름다움을 느끼듯이, 귀는 배음구조라는 음의 균형에서 듣기 좋은 느낌을 갖는다. 19세기 헤름홀츠(Hermann Helmholtz)는 이 배음구조를 수학적으로 확실하게 설명하였다. 배음구조의 원음에 가까운 소리들이 서로 어울릴 때는 잘 어울린 화음(협화음)이 되고, 원음에서 멀어질수록 잘 어울리지 않는 화음(불협화음)이 되는데, 그리스 시대 수학자들은 두 쇳덩이의 무게 비율이 간단할수록 쇳덩이의 소리는 잘 어울리는 화음이 된다는 사실을 알았다.[4)]

이 논문의 목적은 수학교육적인 면에서 음의 생성에 기여하는 수의 특정 정수비를 유클리드 작도법에 의하여 작도하고, 이를 이용한 음계보를 만들어 악기를 제작하는 것이다. 이 악기의 줄을 튕기면서 정수비에 따른 소리들이 어떻게 다른지 직접 들어보며 음악에 끼친 수학의 역할을 살펴보는 것이다. 그러기 위해 2장에서는 동서양을 막론하고 특정 정수비가 어떻게 음계 생성에 이용되었는지, 그리고 한 옥타브는 왜 12음으로 구성되었는지 설명한다. 3장에서는 음계생성에 필요한 특정한 비의 유클리드 작도법을 제시하고 설명하며, 4장에서는 악기틀과 음계보를 만들어 악기를 만드는 과정에 대해 설명한다. 마지막으로 5장에서 마무리를 한다.

2. 동서양의 음계와 특정 정수비

우리가 지금 사용하고 있는 7음계 '도, 레, 미, 파, 솔, 라, 시'와 'C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B'와 같이 반음을 포함한 12음계는 서양에서 들어온 음계이다. 한 옥타브를 12음으로 나눌 때는 보통 음명으로 말하고, 7음이나 5음으로 나눌 때는 계명으로 말한다. 따라서 'C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B'는 음명이고 '도, 레, 미, 파, 솔, 라, 시'는 계명이다.

우리나라 전통음계도 서양음계와 마찬가지로 12음으로 되어있다. 이 음들을 율명(律名)이라 하며 황종(黃鍾)을 기본음으로 한 12율명[5)]은 다음과 같다.

황종(黃鍾), 대려(大呂), 태주(太蔟), 협종(夾鍾), 고선(姑洗), 중려(仲呂)
유빈(蕤賓), 임종(林鍾), 이칙(夷則), 남려(南呂), 무역(無射), 응종(應鍾)

이 율명의 앞 글자를 따서 간단히 12음을 다음과 같이 표기한다.[6)]

---

3) 어느 음에서 그 음을 포함하여 네 번 째 위 음으로 두 개의 온음과 하나의 반음이 포함되면 완전4도라 하고, 다섯 번 째 위 음으로 세 개의 온음과 하나의 반음이 포함되면 완전5도라 한다. '도(C)'와 '파(F)'는 완전4도, '도(C)'와 '솔(G)'는 완전5도이다. 그러나 '솔(G)'과 한 옥타브 위 '도(C)'는 완전4도이다.

4) 백대웅 (2010)

5) 이동복. 서양음악에서는 음양의 개념이 없으나, 동양음악에서는 양성인 율과 음성인 려(呂)가 있어 십이율려명이라고도 한다.

6) 이 음보다 한 옥타브 높으면 삼수변 '氵'을 , 낮으면 사람 인 변 '亻'을 왼쪽에 붙여 구분한다. (예) 潢, 僙

황, 대, 태, 협, 고, 중, 유, 임, 이, 남, 무, 응

서양의 7음계와 달리 우리 전통음악에서 주로 사용한 음계는 5음계였다. 주요 5음은 '황, 태, 고, 임, 남'이며 이를 계명으로 '궁, 상, 각, 치, 우'라고 한다. '황'을 서양 음계의 'C' 음으로 하여 비교하면 서양의 음명과 우리의 율명은 다음과 같이 비교된다.7)

<표 1> 서양의 음명과 전통음악의 율명의 비교

황	대	태	협	고	중	유	임	이	남	무	응
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B

서양에서는 기원전 3500년 전부터 울림이 좋은 음 간격을 찾아서 조율을 했고, 옥타브 사이의 음들을 적당한 간격으로 나누어 다음 옥타브 위에 반복하여 썼다. 이러한 음계는 피타고라스에 의해서 엄격한 수학적 원칙을 기본으로 음계를 생성하였다.

앞서 설명했듯이 줄을 튕기면 배음들이 함께 나온다. 피타고라스는 옥타브 관계가 아닌 울림 중 가장 좋은 것을 찾아 주어진 줄의 길이를 2:3의 비율로 줄이거나 늘리는 방법으로 음계를 만들었다.8) 이 방법을 구체적으로 살펴보면, 다음과 같은 두 가지 방법이 있다.9)

올려쌓는 방법 줄의 길이를 2/3로 줄이고, 또 다시 2/3로 줄이는 과정을 반복하되 그 길이가 원래 줄의 길이의 반 이하로 작아지면 두 배를 한다.

내려쌓는 방법 줄의 길이를 3/2로 늘리고, 또 다시 3/2로 늘리는 과정을 반복하되 그 길이가 원래 줄의 길이의 두 배보다 크면 반으로 나눈다.

구체적으로 살펴보자. 올려쌓는 방법에서 음을 내는 처음 줄의 길이를 1이라고 하자. 그 다음의 줄의 길이는 2/3이다. 그 다음의 줄의 길이는 4/9이나 이것은 1/2보다 작으므로(옥타브 위) 두 배하여 8/9이 된다. 처음 음을 C라고 하면 처음 생성된 음은 완전5도 높은 G음이 된다. 그 다음 과정에 한 옥타브 높은 D음이 생성되나 이를 두 배 했으므로 같은 옥타브 안의 D음이 생성된다. 이와 같은 과정을 또 다시 반복하면 <표 2>를 얻는다.10) 12번 째 생성된 음은 처음 음과 같지 않고 실제는 조금 높은 음이 된다.

---

7) 윤명원 외 4인 (2008). '黃'은 아악이나 당악에서는 C, 향악에서는 Eb, 민속악에서는 F에 가깝다.

8) Ulrich Michels (2000).

9) 필자는 음을 높여 가며 음계를 만들어 올려쌓는 방법이라 했고, 반대로 음을 내려가며 쌓아서 내려쌓는 방법이라 했다.

10) 이규봉 (2010). 길이의 비는 주파수 비의 역수이다.

<표 2> 올려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계와 길이의 비

단계	길이의 비		생성된 음
	소수형	분수형	
0	1	1	C
1	0.6667	2/3	G
2	0.8889	8/9	D
3	0.5926	16/27	A
4	0.7901	64/81	E
5	0.5267	128/243	B
6	0.7023	512/729	$F^{\#}$
7	0.9364	2048/2187	$C^{\#}$
8	0.6243	4096/6561	$G^{\#}$
9	0.8324	16384/19683	$D^{\#}$
10	0.5549	32768/59049	$A^{\#}$
11	0.7399	131072/177147	F
12	0.9865	524288/531441	

올려쌓는 방법과 내려쌓는 방법에서 같은 길이의 줄을 사용하면 내려쌓는 방법으로 생성된 음이 한 옥타브 아래가 된다. 따라서 올려쌓는 방법과 비교하기 위해서 내려쌓는 방법의 처음 줄의 길이를 1/2이라고 하자. 그러면 그 다음의 줄의 길이는 3/4이다. 그 다음은 9/8이나 이것은 1보다 크므로(옥타브 아래) 반으로 나누어 9/16가 된다. 처음 음을 C라고 하면 첫 번째 음은 완전5도 낮은 F음이 된다. 그 다음 과정에 한 옥타브 낮은 Bb음이 생성되나 반으로 나누었으므로 같은 옥타브 안의 Bb음이 생성된다. 이와 같은 과정을 또 다시 반복하면 <표 3>을 얻는다. 마지막으로 생성되는 음 역시 처음 음과 같지 않고 실제는 조금 낮은 음이 된다. 기준음을 1로 보았을 때 이 차이는 1.0136이 된다. 이 비를 '피타고라스 콤마'라 한다. 올려쌓는 방법으로 음을 만들었을 때 12번째 음은 기준음보다 피타고라스 콤마만큼 높은 음을 내고, 내려쌓는 방법으로 음을 만들었을 때 12번째 음은 기본음보다 피타고라스 콤마만큼 낮은 음을 낸다. 이론적인 옥타브보다는 실제적으로 느끼는 옥타브는 조금 높음을 알 수 있다.

<표 3> 내려쌓는 방법으로 만든 피타고라스 음계와 길이의 비

단계	길이의 비		생성된 음
	소수형	분수형	
0	0.5000	1/2	C
1	0.7500	3/4	F
2	0.5625	9/16	Bb
3	0.8438	27/32	Eb
4	0.6328	81/128	Ab
5	0.9492	243/256	Db
6	0.7119	729/1024	Gb
7	0.5339	2187/4096	B
8	0.8009	6561/8192	E
9	0.6007	19683/32768	A
10	0.9010	59049/65536	D
11	0.6758	177147/262144	G
12	0.5068	531441/1048576	

중국을 포함한 우리나라에서 사용되는 음계는 삼분손익법(三分損益法)을 이용하여 생성되었다. 삼분손익법은 기준이 되는 길이의 1/3을 덜어내거나 더하면서 음을 생성하는 방법이다. 이는 중국의 고서인 <관자>와 <율려신서> 등, 그리고 조선 성종 때 만든 <악학궤범>에 기록되어 있다.

삼분손익법 기본 율관의 길이를 2/3배 작게 하고, 다시 그 길이를 4/3배로 크게 하는 과정을 반복하되 그 길이가 기본 율관 길이의 반 이하로 작아지면 그 전 단계를 한 번 더 시행한다.

삼분손익법에서 2/3배 작게 하는 것은 삼분손일(三分損一)에 해당하고, 4/3배로 크게 하는 것은 삼분익일(三分益一)에 해당된다. 처음 줄의 길이를 1이라고 하면 그 다음 음의 줄의 길이는 삼분손일하여 2/3이고, 그 다음 음은 삼분익일하여 $2/3 \times 4/3 = 8/9$이 된다. 세 번째 음은 16/27, 네 번째 음은 64/81이다. 다섯 번째 음은 128/243이다. 그러나 여섯 번째 음은 $128/243 \times 2/3 = 256/729$으로 1/2보다 작다. 그러므로 삼분손일(2/3) 대신 삼분익일(4/3) 하여 $128/243 \times 4/3 = 512/729$가 된다. 이것은 올려쌓기 방법에서 1/2보다 작으면 두 배하는 것과 같다. 이후 과정 역시 모두 같다. 따라서 삼분손익법과 파타고라스 방법에서 올려쌓은 방법은 기본적으로 같다. 차이점이라 할 것 같으면 피타고라스 방법은 삼분익일을 하지 않고 삼분손일만 한다는 것이다. 하지만 그 결과는 똑같다.

정약용의 <악서고존>에 의하면 <관자>에 삼분손익법이 맨 먼저 나타난다고 하고, 삼분손익법은 손일부터 하지 않고 익일부터 먼저 한다고 되어 있다.[11] 기본음을 삼분손일하면 그 길이가 2/3가 되고, 익일하면 4/3가 되므로 삼분손일한 것에 대하여 삼분익일한 것은 그 길이가 두 배가 된다. 따라서 기본음을 삼분손일 한 음은 기본음을 삼분익일 한 음의 옥타브가 되며, 기본음을 삼분손일 한 음은 기본음의 옥타브 음을 삼분익일한 음과 같다. 그러므로 삼분손익법에서 삼분손일을 먼저 하든 삼분익일을 먼저 하든 결과는 같다.

기본음인 황의 길이를 81로 시작하면 임은 54, 태는 72, 남은 48, 고는 64가 된다. 64는 3의 배수가 아니므로 그 다음 음부터는 정수로 되지 않는다. 이 다섯 음을 정음(正音)이라 하며 전통음악에서 주로 사용되는 음이다.

3. 음계 생성에 필요한 유클리드 작도법

올려쌓기에서 길이를 2/3로 줄이는 것은 주어진 선분의 2:1 내분점이고 두 배를 하는 것은 2:1 외분점이다. 내려쌓기에서 중점은 1:1 내분점이고, 길이를 2/3로 늘리는 것은 주어진 선분의 3:1 외분점이다. 삼분손익법에서는 삼분손일에 해당하는 2:1 내분점과 삼분익일에 해당하는 4:1 외분점이 필요하다. 음계 생성에 필요한 작도는 여러 방법이 있으나 본 논문에서는 다음과 같이 하였다.

선분 $\overline{AB}$ 위의 끝 점 A에서의 수직선은 다음과 같이 할 수 있다. 점 A에서 선분 연장선 위의 같은 거리에 있는 양쪽 두 점을 잡는다. 그 두 점을 중심으로 반지름이 같은 원을 그린다. 두 원이 만나는 두 점을 직선으로 연결한다.

2:1 내분점과 2:1 외분점은 다음과 같이 구하면 작도하기 편리하다. 양 끝점 A와 B에서 수직선을 그린다. B에서 내린 수직선 위에 D를 잡고, 선분 $\overline{BD}$ 길이의 두 배에 해당하는 C를 A에서 올린 수직선 위에 택한다. C와 D를 직선으로 연결할 때 $\overline{AB}$와 만나는 점 A_1이 2:1 내분점이다. 선분 $\overline{AA_1}$의 2:1 외분점은 점 A_1을 중심으로 선분 $\overline{AA_1}$의 길이를 반지름으로 하여 호를 그릴 때 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점 A_2이다.

11) 백대웅 (2010). 재인용

$1:1$ 내분점과 $3:1$ 외분점은 다음과 같이 구한다. 선분 $\overline{AB}$의 끝점 A에서 수직선을 위로, B에서 수직선을 아래로 그린다. 아래 위 수직선의 같은 길이의 점을 서로 연결하여 만나는 점 O가 $1:1$ 내분점이다. 점 B를 중심으로 선분 $\overline{BO}$의 길이를 반지름으로 하여 호를 그릴 때 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점 B_1이 $\overline{AB}$의 $3:1$ 외분점이다.

$2:1$ 외분점은 선분 $\overline{AB}$의 끝 점을 중심으로 선분 $\overline{AB}$의 길이를 반지름으로 하여 호를 그릴 때 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점 B_1이 $\overline{AB}$의 $2:1$ 외분점이다

$2:1$ 내분점을 구한 후 $4:1$ 외분점은 다음과 같이 구한다. A_1을 선분 $\overline{AB}$의 $2:1$ 내분점 점이라 하면, 점 B을 중심으로 선분 $\overline{BA_1}$의 길이를 반지름으로 하여 호를 그릴 때 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점 B_1이 $4:1$ 외분점이다.

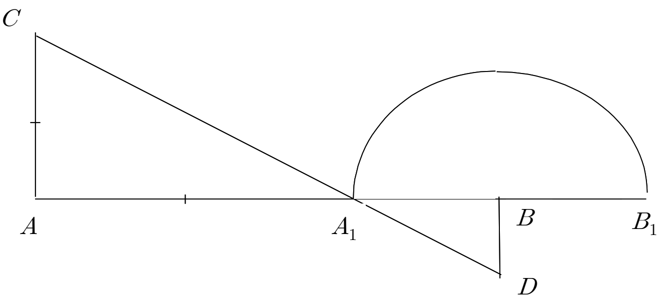

그림 1 선분 $\overline{AB}$의 $2:1$ 내분점과 $4:1$ 외분점

4. 유클리드 작도법에 의한 악기틀 제작

악기틀을 제작하는 데는 두 가지로 나뉜다. 악기 몸체를 만드는 것과 음을 생성하는 음계보를 만드는 것이다. 음계보를 악기 몸체에 붙인 후 음계보에 표시된 곳을 누르고 줄을 튕기면 관련된 음이 생성된다. 따라서 몸체는 미리 만들어 두고 수업 시간에는 음계보만 만들어 몸체에 부친다. 음계보에 표시한대로 음을 생성하면 앞에서 설명한대로 비율에 따라 관련된 음이 나옴을 확인할 수 있다. 또한 설명만 다르지 피타고라스 방법의 올려쌓기 방법과 삼분손익법에 의한 음계보는 정확히 일치함을 볼 수 있다.

4.1 악기 몸체 제작

악기 몸체는 기본적으로 줄을 튕겨 소리를 낼 수 있게 만들면 된다. 만드는 방법은 다양하나 필자는 다음과 같이 제작하였다. 이에 필요한 자료는 “길쭉한 나무 판, 기타 조율키, 기타 줄, 작은 자 두 개, 작은 막대”이다. 그러나 반드시 제시한대로 재료를 준비해 만들 필요는 없다. 가능한 악기 몸체를 만드는 재료는 주변에서 쉽게 구할 수 있는 것으로 하는 것이 좋다.

그림 2 준비물

길쭉한 나무 판은 소리 울림판 역할을 하며, 나무 판 양 끝에 설치할 작은 자는 기타 줄을 양쪽에 거는데 사용된다. 작은 막대는 줄과 나무판 사이에 끼워 줄을 누르는 역할을 한다. 기타의 예를 들면 작은 자는 기타 맨 위 줄을 지지하는 상현주(nut)와 맨 아래 줄을 지지하는 하현주(saddle) 역할을 하며, 작은 막대는 기타 중간 중간에 있는 기러기 발(fret)의 역할을 한다. 나무판 위에 설치할 기타 조율키는 선을 조이고 푸는 역할을 한다. 악기 몸체는 다음과 같이 제작할 수 있다.

(1) 길쭉한 나무 판의 한 쪽 끝에 줄을 조일 수 있는 기타 조율키(guitar tunning keys)를 달고 다른 한 쪽 끝엔 줄을 고정할 수 있는 장치(bridge)를 만든다.
(2) 기타 조율키의 바로 안쪽과 줄을 고정하는 장치의 안쪽에 적당한 깊이의 홈을 파고 이 홈에 작은 자를 끼워 위로 조금 나오게 한 후 고정한다.
(3) 기타 줄을 나무 판 위에 걸고 기타 조율키로 조인다.

완성된 악기 몸체는 그림 3과 같다. 나무 판 위에 구멍은 없어도 좋다. 그러나 구멍이 있는 것과 없는 것의 소리 크기를 비교해 보는 것도 교육적으로 효과가 있다. 나무 판의 크기는 별 상관이 없지만 제작한 실물의 크기는 홈과 홈 사이를 81cm로 하였다.


그림 3 완성된 악기 몸체

4.2 음계보 제작

음계보 제작에 필요한 도구는 세밀한 연필(또는 프러스 펜), 컴퍼스, 악기 몸체 길이에 따른 크기의 자와 종이이다. 자의 크기는 홈과 홈 사이의 길이보다 좀 더 크면 된다. 악기 몸체 길이만한 크기의 종이에 홈과 홈 사이의 길이만큼 선분을 그린다. 상현주에 있는 끝점을 A로 보고 하현주에 있는 끝점을 B라고 하면 이 선분은 $\overline{AB}$가 된다.

삼분손익법이나 피타고라스 방법의 올려쌓는 방법에 의한 음계보는 다음과 같이 작성할 수 있다. 여기서 점 A는 거리를 측정하는 기준점이 된다.

(1) 주어진 선분 $\overline{AB}$의 중점(1 : 1 내분점) O를 택한다.
(2) 주어진 선분 $\overline{AB}$의 2 : 1 내분점 A_1을 작도한다.
(3) 선분 $\overline{AA_1}$의 2 : 1 내분점 A_2를 작도하되 주어진 O보다 작으면 두 배 한다.
(4) A_2를 B로 보고 위 과정 (2)와 (3)을 반복하여 A_3부터 A_{11}까지 구한다.

종이 아래 부분에 적당한 크기의 선분 $\overline{AB}$를 그린다. 왼쪽 끝점 A 위와 오른쪽 끝점 B 아래로 수직선분을 그리되, A 위의 선분의 크기는 B 아래 선분의 크기보다 두 배가 되게 한다(눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있다.). $\overline{AB}$와 나란한 보조선 $\overline{EF}$를 아래에 그린다. 그림 4에서 C는 $\overline{AD}$의 중점이다.

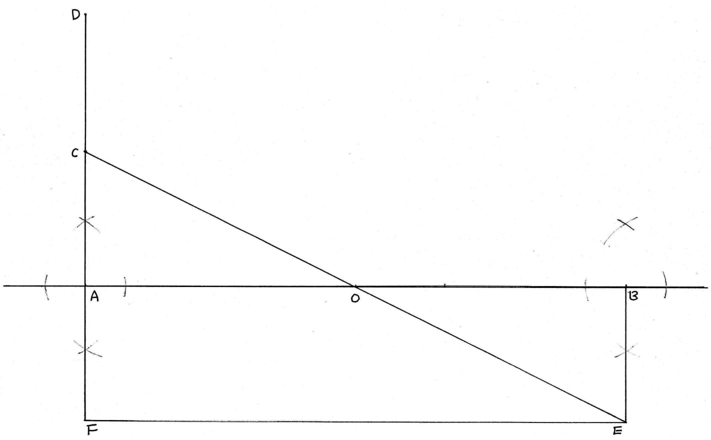

그림 4 올려쌓기 방법의 음계보 준비

점 C와 E를 잇는 직선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 O라 하자. 이 점은 1 : 1 내분점으로 중점이다. 점 D와 E를 잇는 직선이 $\overline{AB}$와 만나는 점은 2 : 1 내분점으로 A_1라 하자. A_1 아래 수직선이 $\overline{EF}$와 만나는 점에서 다시 점 D와 연결하면 $\overline{AB}$와 만나는 점은 선분 $\overline{AA_1}$의2 : 1 내분점이다. 이 점이 O보다 작으면(즉 왼쪽에 있으면) 컴퍼스를 이용하여 두 배를 해준다. 이 점을 A_2라 하자. A_2를 B로 보고 위 과정을 반복하여 A_3부터 A_{11}까지 구하면 다음 그림 6과 같은 결과가 나온다.

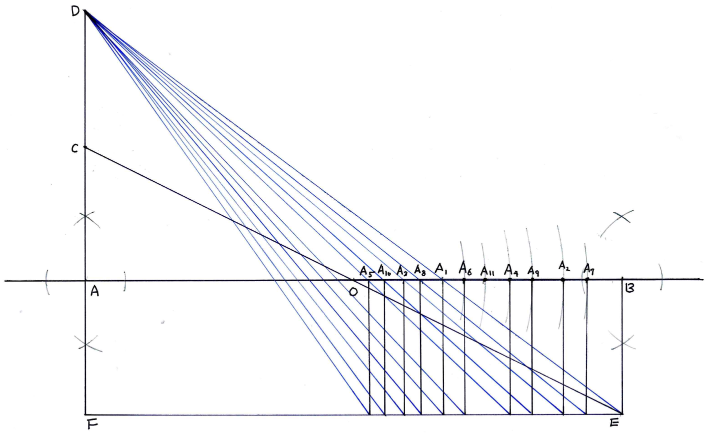

그림 5 올려쌓기 방법의 과정

원칙적으로는 매번 $\overline{EF}$에 수직선을 작도해야 하지만 시간이 부족할 때는 처음 몇 개만 작도하고 그 다음은 자를 이용할 수도 있다.

내려쌓는 방법에 의한 음계보는 다음과 같이 작성할 수 있다. 여기서도 점 A는 거리를 측정하는 기준점이다.

(1) 주어진 선분 $\overline{AB}$의 중점 O를 택한다.

(2) 주어진 선분 $\overline{AO}$의 $3:1$ 외분점 B_1을 작도한다.

(3) 선분 $\overline{AB_1}$의 $3:1$ 외분점 B_2을 작도하되 주어진 B보다 크면 반으로 한다.

(4) B_2를 O로 보고 위 과정 (2)와 (3)을 반복하여 B_3부터 B_{11}까지 구한다.

종이 아래에 왼쪽에 치우쳐서 적당한 크기의 선분을 그리되 오른쪽에 여분이 좀 남아있도록 한다. 왼쪽 끝점 A 위와 오른쪽 끝점 B 아래로 같은 크기의 수직선분을 그린다. $\overline{AB}$와 나란한 보조선 $\overline{EF}$를 아래에 충분히 길게 그린다.

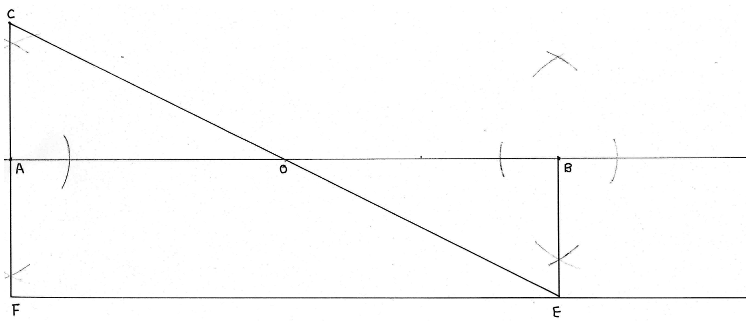

그림 6 내려쌓기 방법의 음계보 준비

점 C와 E를 잇는 직선이 $\overline{AB}$와 만나는 점은 중점으로 O이다. O 아래 수직선분이 $\overline{EF}$와 만나는 점과 C를 잇는 선분이 $\overline{AB}$와 만나는 점의 길이만큼 O에서 오른쪽으로 더한 점을 B_1이라 하자. 같은 방법으로 B_1 아래 수직선이 $\overline{EF}$와 만나는 점과 다시 점 C와 연결한 점의 길이만큼 B_1에서 더하면 B보다 크게 된다. 따라서 그 점 아래 수직선이 $\overline{EF}$와 만나는 점과 다시 점 C와 연결한 점이 $\overline{AB}$와 만나는 점이 B_2가 된다. 이와 같은 과정을 반복하면 그림 7과 같이 B_3부터 B_{11}까지 구할 수 있다.

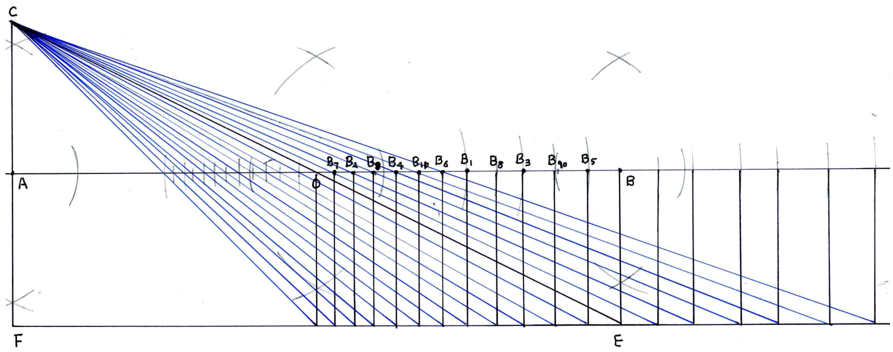

그림 7 내려쌓기 방법 과정

악기 몸체에 붙일 종이에 음계보를 작도하기 전에 A4 종이에 위와 같은 과정을 충분히 연습해 본다. 그런 후 같은 방법으로 악기 몸체의 홈과 홈 사이의 길이와 같은 종이에 음계의 위치를 그려본다. 위치가 적힌 선분을 따라 좁게 자른 후 몸체에 붙인다. 작은 막대를 악기의 줄과 몸체에 끼우고 표시된 곳 위에서 줄을 누른 후 음을 생성해 본다.

5. 마치며

본 논문은 대학에서의 교양수학이나 중등학생 대상의 수학교육에 적용할 수 있다. 완성된 악기틀에서 비율에 따른 음을 듣는 것도 중요하지만 음이 서로 다른 것을 함께 들으면서 화음이 잘 어울리는지 안 어울리는지 느끼게 하는 것도 중요하다. 이 학습과정을 거쳐 얻을 수 있는 효과는 학생들로 하여금 음계를 생성하는 기본원리와 잘 어울리는 화음과 어울리지 못하는 화음은 모두 정수비에 달려 있다는 사실을 깨닫게 하고 수학의 쓰임을 알게 하는 것이다.

악기틀을 제작할 때는 주변에서 쉽게 구할 수 있는 것으로 전체 크기는 임의로 할 수 있다. 충분한 시간이 있으면 악기틀을 학생과 함께 만들어 보는 것도 좋다.

악기틀에 붙일 음계보는 A4 용지에 충분히 연습해 본 후 만드는 것이 좋다. 작도할 때는 끝이 뾰족하고 세밀한 연필이나 프러스 펜을 사용한다. 자를 이용해 점과 점을 연결하는 직선을 그을 때와 컴퍼스를 이용하여 원을 그릴 때 자와 컴퍼스의 중심을 최대한 정확하게 점에 닿게 해야 한다.

음계보를 만들 때 미리 <표 2>와 <표 3>을 이용하여 선분의 길이에 맞는 수치를 미리 만들어 놓고 작도하여 나온 점과 비교해 보는 것도 좋다. 작도가 정확하지 않으면 수치와 일치하지 않는 경우가 종종 생긴다. 악기틀의 홈과 홈 사이의 길이가 81cm일 때는 악기틀에 붙일 삼분손익법에 의한 음계보를 작성할 때 <표 4>를 참고하여 작도의 오차를 줄인다. 2절에서 설명했듯이 '응'부터는 정확한 값이 아닌 반올림 한 값이다.

<표 4> 처음 길이가 81일 때 따른 상대적 길이와 대응하는 율명

단계	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
길이	81	54	72	48	64	43	57	76	51	67	45	60
율명	황	임	태	남	고	응	유	대	이	협	무	중

음을 생성하는 방법으로 피타고라스 방법이나 삼분손익법은 인간이 인위적으로 만들었다고 보기보다는 자연의 법칙으로 소리가 발생하는 원리를 그대로 이용한 것이다. 이 소리의 원리에 정수비가 포함되어 있다.

참 고 문 헌

김홍종 (2009). 문명 수학의 필하모니, 파주 : 효형출판.
백대웅 (2010). 인간과 음악, 서울 : 어울림.
서우석 (2010). 음악을 본다, 서울 : 서울대학교출판문화원.
윤명원 · 허화병 · 조창규 · 김동현 · 김요섭 (2008), 한국음악론, 파주 : 음악세계.
이동복 (미발간). 악학궤범의 권일에는 어떤 내용이 들어 있을까요?
이규봉 (2010), 동서양의 음의 생성을 통해본 정수비의 응용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(4), 923-937.
Ulrich Michels · 홍종수 옮김 (2000). 음악은이, 서울 : 음악춘추사.

A Teaching Program in Making Eastern and Western Musical Scales using Integer Ratio

Gyou Bong Lee
Dept. of Applied Math., Paichai University, Daejeon 302-175, Korea
E-mail : gblee@pcu.ac.kr

Integer ratios 1 : 2 : 3 : 4 are very important in making eastern and western musical scales. Suggest an educational program of Mathematics in middle school which shows how to make an musical instrument and musical scales by Euclidean constructions. It explains for Mathematics how to make musical notes.

* ZDM Classification : F90
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97
* Key Words : Euclidean construction, Pytagorian scales, Sambunsonikbub, scale