韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2012. 11. 제 51권, 제 4호, 429-453.

J. KSME(Math. Edu) ISSN 1225-1380
November. 2012, Vol. 51 No. 4, 429-453.

중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산의 원리에 따른 모델 선택에 관한 연구

김 익 표 (대구대학교)†
정 은 희 (대구대학교 교육대학원)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

수학적 개념은 구체적인 예와 함께 직관적인 관점으로부터 출발해서 학년 또는 단계가 올라감에 따라 추상화를 통하여 형식적인 관점과 함께 엄밀성을 추구하는 방향으로 지도되는 경우가 일반적이다(Skemp, 1987). 이와 같은 지도 방법은 수학화(Freudenthal, 1991)에 의하여 지지되어질 수 있는데, 정수 전체의 집합 Z와 n보다 작은 음이 아닌 정수 전체의 집합 Z_n 등이 가지고 있는 최소의 공통적인 성질들을 추상화함으로써 구성된 수 체계(Hungerford, 1997)인 환(ring)이라는 수학적 개념이 학교 수학의 전체 과정에서 소개되는 순서와 무관하지 않다. 주어진 방정식의 해를 가지는 체(field)는 항상 존재하며, 체의 기본적인 뼈대는 유리수 전체집합 Q 또는 Z_p(p는 소수)이다. 특히, Q는 Z를 바탕으로 구성되는 수 집합으로서 Z를 포함하는 최소의 체이다. 이것은 정역(integral domain)을 포함하는 최소의 체인 분수체(field of fractions)의 개념으로 확장된다. 수 체계들 사이의 이와 같은 구조적인 성질의 파악은 임의의 방정식에 대한 근의 공식의 존재성 문제를 해결하는데 결정적인 역할을 했다(Hungerford, 1974; Isaacs, 1994; NCTM, 2000). 미국 수학교사협의회(NCTM)의 교육과정 관련 규준집(NCTM, 1989, 2000)에서는 학생들에게 수 체계를 일관성 있는 지식 체계로 인식시킴으로써 수 체계의 확장에 대한 통찰력을 제공하기 위한 교사의 역할을 강조하고 있다. 우리나라에서도 중등학교 6차 수학과 교육과정(교육부, 1992)부터 2009년 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에 이르기까지 일관되게 정수의 사칙계산의 원리에 대한 학생들의 이해를 강조하고 있다. 그러나 현행 2007년 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에 따른 중학교 1학년 수학 교과서에는 정수의 사칙계산의 원리로서 구체적 상황 모델, 셈돌 모델, 수직선 모델 등과 같은 직관적 모델과 귀납적 외삽법, 역연산 관계에 의한 형식적 접근과 같은 다양한 방법들을 제시하고 있다(우정호・최병철, 2003). 이로 인하여 정수의 사칙계산 지도를 위한 모델 선택에 있어서 사칙계산에 내재되어있는 수 체계의 구조와 수 체계 사이의 관련성에 대한 이해의 촉진(NCTM, 1989)을 위한 선택보다는 학생들의 이해(김익표, 2008)와 부호 규칙의 기계적 암기와 계산의 숙달(우정호・최병철, 2003)에 치중하는 결과가 초래되었다. 중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도에 대한 대부분의 연구가 현재 사용되고 있는 직관적 모델에 대한 한계와 형식적 관점으로의 도입에 대한 새로운 방법의 모색을 주장하고 있다(우정호・최병철, 2003; 윤성재, 1992; 최병철・우정호, 2002; 김남희 외 2006; Freudenthal, 1973). 정수의 사칙계산 지도에 있어서 중학교에서 사용되는 모델과 고등학교의 형식적인 관점 사이의 연계성을 고려한 지도의 필요성에 대한 주장(김익표, 2008; 박임숙, 2001)에도 불구하고 지금까지 학생들에게 수 체계를 일관성 있는 통합된 지식 체계로 인식시키기 위한 사칙계산의 원리를 찾고, 이 원리를 통한 정수의 사칙계산 지도의 효과에 대하여 분석한 연구는 발표되지

---

* 접수일(2012년 10월 15일), 게재확정일(2012년 11월 21일)
* ZDM분류 : B53, D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 정수의 사칙계산의 원리, 직관적 모델, 형식적 관점
* 본 논문은 2009년 대구대학교 학술 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
† 교신저자 : kimikpyo@daegu.ac.kr

않고 있다. 본 연구는 교육과정에 제시된 교육목표를 가장 충실하게 반영한 책이 교과서(교육인적자원부, 2006)라는 관점에서 출발한다. 이와 같은 관점에서 미국 교과서는 학생들에게 수 체계를 일관성 있는 지식 체계로 인식시켜야 한다는 NCTM의 교육과정 관련 규준집의 주장을 가장 충실하게 반영한 교과서이다. 따라서 본 연구의 목적은 첫째, 제 7차 교육과정(교육인적자원부, 1997)과 2007년 개정 교육과정의 중학교 1학년 수학 교과서와 미국의 중학교 수학 교과서에 제시된 정수의 사칙계산의 지도 모델을 비교 분석하고 이를 토대로 중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도에 있어서 현직교사들과 예비교사들의 모델 선택의 기준을 비교, 분석하는 것이다. 둘째, 두 집단의 모델 선택이 학생들에게 수 체계를 일관성 있는 지식 체계로 인식시키기 위한 수업에 미치는 영향을 분석하는 것이다. 셋째, 이를 바탕으로 중등학교에서 소개되는 자연수와 정수의 사칙계산을 바탕으로 실수의 연산으로 형식화되는 과정을 추론 또는 자연스럽게 받아들일 수 있도록 도울 수 있는 최선의 모델을 찾는 것이다. 나아가, 이와 같은 일련의 연구들이 중등학교 수학 수업에서 유용하게 활용될 수 있도록 하는데 있다.

2. 연구 문제

중등학교 수학 수업에서 일관성 있는 지식 체계로서 수 체계를 인식함으로써 학년 또는 단계가 올라감에 따라 수 체계의 확장을 추론할 수 있도록 도울 수 있는 정수의 사칙계산의 지도 모델을 찾기 위해 다음과 같은 연구 문제를 선정하였다.

(1) 제 7차 교육과정과 2007년 개정 교육과정의 중학교 1학년 수학 교과서와 미국의 중학교 수학 교과서에서 제시된 정수의 사칙계산의 지도 모델에 어떠한 차이가 있는가?

(2) 정수의 사칙계산 지도에 있어서 현직교사들과 예비교사들의 모델 선택의 기준은 무엇이고, 사범대학 수학교육과 교육과정에 제시된 과목들의 수강 과정에서 소개되는 자료들이 일관성 있는 지식 체계로서 수 체계를 인식하는데 어떤 영향을 미치는가?

(3) (1)과 (2)의 분석을 통하여 학년 또는 단계가 올라감에 따라 수 체계의 확장을 추론할 수 있도록 도울 수 있는 효과적인 모델을 구성할 수 있는가?

Ⅱ. 연구 동향

구체적이고 직관적인 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 수학적 개념, 원리, 법칙을 발견하고 정당화하게 한다(교육과학기술부, 2011)는 것은 중등학교 수학과 교육과정의 주안점이고 Freudenthal(1991)이 제안한 안내된 재발명과 수학화의 핵심적인 지향점이다. 고등학교에서는 역원 개념을 이용하여 뺄셈과 나눗셈을 정의하는 형식적인 관점으로 실수의 사칙계산을 다룬다. 따라서 중학교에서 정수의 사칙계산 지도에 사용되는 직관적 모델들의 활용 방법이 고등학교에서 다루는 형식적인 관점과 연계성을 가진다면 교육과정 관련 문헌들에서 강조하는 방향으로 수 체계를 인식 하는 것이 가능할 것이다. 그러나 중학교에서 정수의 사칙계산 지도와 관련된 다수의 연구들이 앞에서 언급했던 것처럼 현재 사용되는 직관적 모델에 의한 지도의 한계를 지적하면서 형식적 지도 방법의 도입에 대한 필요성을 역설했다(윤성재, 1992; 최병철 · 우정호, 2002; 우정호 · 최병철, 2003). Freudenthal(1973)도 음수의 사칙계산 지도에서 직관적인 방법은 한계를 가지고 있을 뿐만 아니라 학생들의 이해에 방해가 된다고 주장하면서 형식적인 방법의 도입으로서 방정식의 해를 이용한 음수의 도입(우정호 · 최병철, 2003)과 귀납적-외삽법을 제안했다(Fischbein, 1994). 이 귀납적-외삽법은 우리나라 중학교 1학년 교과서와 미국의 중학교 교과서에서 정수의 곱셈을 위하여 주로 사용되고 있지만, 자연수와 정수의 사칙계산을 바탕으로 실수의 연산으로 형식화되는 과정에서 학생들이 겪게 될 단절(박임숙, 2001)에 대한 해결책이 될 수 없을 뿐만 아니라 수 체계의 올바른 인식을 위해서도 좋은 방법이라고는 할 수 없다. 따라서 중등학교 학생들이 접하는 수 체계들이 낱낱으로가 아닌 계통성을 가진 하나의 개념구조(Skemp, 1987)로 이루어져 있다는 사실을 자연스럽게 받아들일 수 있도록 형식적인 관점과 연계된 구체적이고 직관적인 모델을 이용한 지도 방법의 구현은 정수의 사칙계산 지도에서 필수적이다. 최근에 중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도에 사용되는 직관적 모델과 고등학교 수학 수업에서 제시되는 형식적인 관점과의 연

계성을 고려한 직관적 모델의 사용 방법이 제안되었다(황석근, 2008; 김익표, 2008). 나아가, 본 연구에서는 정수의 사칙계산 지도에 있어서 직관적 모델과 형식적인 관점 사이의 단절을 피할 수 있을 뿐만 아니라 학생들의 올바른 수 체계 인식에 효과적이고 현직교사와 예비교사들이 사용하기에 적합한 직관적 모델을 이용한 지도 방법을 찾고자 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

일관성 있는 지식 체계로서 수 체계를 인식하도록 도울 수 있는 정수의 사칙계산 지도 모델의 탐색을 위하여 경상북도에 위치한 D대학교 수학교육과 2, 3, 4학년 재학생 66명, 대구광역시와 경상북도에 소재한 중학교 교사 50명을 연구 대상으로 선정하였다. D대학교 수학교육과는 2학년 재학생들을 대상으로 중등학교 교육과정 및 교수법과 관련된 강좌가 편성은 되어 있으나 개설하지 않고 있으며, 3학년 1학기에는 교과교육학 과목인 수학교육학개론 과목을 통하여 우리나라 제 6차, 제 7차, 2007 개정, 2009 개정 수학과 교육과정을 비교 분석한 다음, 제 7차 교육과정에 따른 중학교 교과서와 현재 사용되고 있는 2007년 개정 교육과정 중학교 교과서의 차이점 및 교수학습 상의 유의점, 교과내용학 과목들과의 연계성을 중심으로 발표와 토론을 병행하여 탐구하고 있다. 3학년 2학기에는 수학교육론 과목을 통하여 교수학습과 관련된 이론을 공부하고, 수학교육과정론을 통하여 교육과정 및 교과서의 비교, 분석을 1학기 내용과 연결하여 개설하고 있다. 4학년 1학기에 수학교재연구및지도법을 개설하고 있고 현장실습과목으로 중등학교 현장에서 4주간 교생실습을 받도록 하고 있다. 현직 교사는 중학교 1학년에서 정수의 사칙계산 지도 경험이 있는 사람들로 선정하였다. 지금부터 사범대학 수학교육과 재학생을 예비교사로 부르기로 한다.

2. 연구 방법

본 연구는 연구 대상자들의 정수의 사칙계산 지도 모델의 선택 유형의 차이를 분석하기 위하여 설문지(김익표, 2008)를 통하여 조사한 자료를 통계적으로 처리하는 정량적 연구 방법과, 설문지에 나타난 내용 중 특이한 답변을 한 대상자들을 인터뷰를 통하여 심층 분석한 정성적 연구 방법을 동시에 수행하였다. 통계처리는 마이크로소프트 엑셀프로그램을 사용하였다.

3. 연구 절차

가. 자료 수집

본 연구의 수행을 위하여 제 7차 교육과정 중학교 1학년 교과서 16종, 2007년 개정교육과정 중학교 1학년 교과서 22종, 미국의 51개 주에서 주로 사용되는 중학교 교과서인 Glencoe Mathematics(course 1~3), MaDougal Littell Mathematics(course 1~3), Prentice Hall Mathmatics(course 1~3) 9종에서 제시된 정수의 사칙계산 지도 모델을 분류하였다. 이 분류를 바탕으로 우리나라와 미국 교과서의 정수의 사칙계산 지도 모델의 선택에 대하여 일관성 있는 지식체계로서 수 체계의 인식이라는 관점에 주안점을 두고 비교 분석하였다. 특히, 미국 교과서는 상, 중, 하 수준별로 구성되어 있어 수준에 따른 모델 선택을 비교 분석함으로써 본 연구에 대한 추가적인 시사점을 얻고자 시도했다. 우리나라와 미국 교과서에 제시된 모델들을 토대로 하여 현직교사들과 예비교사들의 정수의 사칙계산 지도 모델의 선택 기준을 비교 분석했다. 이 비교 분석에는 현직 교사들의 정수의 사칙계산 지도 모델의 선택 기준을 조사하기 위하여 고안된 설문지(김익표, 2008)를 활용하였다. 특히, 예비교사들에 대해서는 사범대학 수학교육과에 개설된 강좌의 수강 과목 범위와 자료의 소개 정도가 정수의 사칙계산 지도 모델의 선택에 미치는 영향을 분석하기 위하여 같은 설문지를 이용하여 다음의 순서로 각 연구 대상자에 대하여 모두 3차례 설문조사를 실시하였다. 설문조사를 실시하기 전 우리나라 제 7차 교육과정과 2007 개정 교육과정 고등학교 1학년 수학 교과서에 제시된 실수의 연산에 대한 기본 성질을 소개한 후, 실수의 사칙계산과 연계성을 고려한 정수의 사칙계산에 대한 지도 모델을 선택하도록 했다. 설문조사 방법은 다음과 같다.

첫째, 우리나라 및 미국 중학교 교과서에 제시된 정

수의 사칙계산 지도 모델만을 소개한 후 설문 조사 실시

둘째, 우리나라 제 7차 교육과정과 2007 개정 교육과정 중학교 1학년 교과서에 제시된 정수의 사칙계산 지도 모델 분석 및 방법들을 소개한 후 설문조사 실시

셋째, 미국의 중학교 교과서에 제시된 사칙계산 지도 모델 분석 및 방법들을 소개한 후 설문조사 실시

세 차례의 설문 조사를 통하여 현직 교사와 예비교사들이 정수의 사칙계산 지도에 있어서 선호하는 모델의 분석을 통하여 수 체계가 일관성 있는 지식체계임을 인식시키기 위하여 고등학교 1학년 수학에서 다루는 실수의 사칙계산과 가장 연관성이 많은 정수의 사칙계산 지도 모델을 찾고자 시도 했다.

나. 자료 분석

정수의 사칙계산 지도 모델과 관련된 현직교사와 예비교사들의 설문 조사에서 관련된 자료의 제시에 따른 모델 선택의 변화를 조사하기 위하여 연계성 지수라는 새로운 지표를 구성하였다. 수집된 자료를 엑셀 프로그램의 스프레드시트를 이용하여 그래프로 표현했고, 이 그래프의 특성을 연계성 지수라는 수로 표현함으로써 연구 대상자들 사이의 특성을 비교할 수 있도록 하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 우리나라와 미국 교과서의 정수의 사칙계산 지도 모델 선택의 비교 분석

제 7차 교육과정에 따른 교과서 16종(강옥기 외 2인, 2001; 강행고 외 9인, 2001; 고성은 외 5인 2001; 금종해 외 3인, 2001; 박규홍 외 7인, 2001; 박두일 외 4인, 2001; 박윤범 외 3인, 2001; 배종수 외 7인, 2001; 신항균, 2001; 양승갑 외 6인, 2001; 이영하 외 3인, 2001; 이준열 외 4인, 2001; 전평국 외 4인, 2001; 조태근 외 4인, 2001; 최용준, 2001; 황석근・이재돈, 2001)과 2007년 개정교육과정에 따른 22종 교과서(강신덕 외 6인, 2009; 금종해 외 4인, 2009; 김원경 외 7인, 2009; 김홍종 외 3인, 2009; 박규홍 외 4인, 2009; 박영훈 외 5인, 2009; 박윤범 외 3인, 2009; 박종률 외 5인, 2009; 송근화 외 5인, 2009; 유병훈 외 6인, 2009; 유희찬 외 7인, 2009; 윤성식 외 5인, 2009; 윤재한 외 7인, 2009; 이강

<표 1> 제 7차 및 2007 개정 교육과정 교과서의 모델 사용

계산 / 모델명	덧셈		뺄셈		곱셈		나눗셈	
	제 7차	2007 개정	제 7차	2007 개정	제 7차	2007 개정	제 7차	2007 개정
수직선	11종 (69%)	16종 (73%)	1종 (6%)	2종 (9%)	3종 (19%)	4종 (18%)	·	·
셈돌	1종 (6%)	·	1종 (6%)	·	1종 (6%)	1종 (5%)	·	1종 (5%)
역연산	·	·	4종 (25%)	13종 (59%)	·	·	16종 (100%)	21종 (95%)
귀납적 외삽법	·	·	·	·	6종 (31%)	11종 (50%)	·	·
구체적 상황	·	·	3종 (19%)	1종 (5%)	·	1종 (5%)	·	·
수직선+셈돌	4종 (25%)	6종 (27%)	1종 (6%)	·	1종 (6%)	·	·	·
수직선+귀납적 외삽법	·	·	·	1종 (5%)	4종 (18%)	5종 (23%)	·	·
수직선+역연산	·	·	3종 (19%)	3종 (14%)	·	·	·	·
셈돌+역연산	·	·	2종 (13%)	·	·	·	·	·
셈돌+귀납적 외삽법	·	·	·	·	1종 (6%)	·	·	·
수직선+셈돌+역연산	·	·	1종 (6%)	2종 (9%)	·	·	·	·

섭 외 4인, 2009; 이대현 외 7인, 2009; 이영하 외 5인, 2009; 이준열 외 6인, 2009; 장건수 외 9인, 2009; 정광식 외 3인, 2009; 정순영 외 5인, 2009; 정창현 외 4인, 2009; 최용준 외 5인, 2009)의 사칙계산 지도 모델의 사용은 <표 1>과 같다. 표의 괄호안의 숫자는 각 모델을 사용한 교과서 수를 전체 교과서 수로 나눈 비율을 나타낸 것으로 소수 셋째 자리에서 반올림한 결과이다.

제 7차 교육과정과 2007년 개정 교육과정 교과서에서 정수의 덧셈을 설명하기 위하여 사용한 모델과 방법은 수직선 모델과 셈돌 모델 중 1가지만 사용하거나 수직선 모델과 셈돌 모델을 동시에 사용한 3가지이다. 수직선 모델을 사용한 비율은 각각 69%와 73%, 수직선 모델과 셈돌 모델을 동시에 사용한 비율은 각각 25%와 27%, 셈돌 모델을 사용한 비율은 각각 6%, 0%로 7차 교육과정 교과서에서는 셈돌 모델만 사용하여 정수의 덧셈을 설명한 교과서가 1종(양승갑 외, 2001)이 있지만 2007 개정 교육과정 교과서에서는 수직선 모델로만설명하거나 수직선 모델과 셈돌 모델을 동시에 사용하는 2가지 방법으로만 정수의 덧셈을 설명했다. 정수의 덧셈을 설명하기 위하여 두 교육과정에서 가장 많이 사용한 모델은 수직선 모델이다. 정수의 덧셈과 다르게 정수의 뺄셈에서는 제 7차 교육과정과 2007 개정교육과정 교과서 각각 수직선 모델 6%와 9%, 셈돌 모델 1%와 0%, 역연산 모델 25%와 59%, 구체적 상황 모델 19%와 5%, 수직선과 셈돌 모델을 동시에 사용한 경우 6%와 0%, 수직선과 귀납적 외삽법이 동시에 사용된 경우 0%와 5%, 수직선과 역연산 모델이 동시에 사용된 경우 19%와 14%, 셈돌 모델과 역연산 모델이 동시에 사용된 경우 2%와 0%, 3종류의 모델인 수직선 모델, 셈돌 모델, 역연산 모델이 동시에 사용된 경우 6%와 9%의 비율로 다양한 모델이 사용되고 있었다. 그러나 이들 교과서들을 구체적으로 살펴보면 두 교육과정 모두 정수의 뺄셈을 설명하기 위해서 주로 사용한 모델은 역연산모델이며 수직선 모델과 셈돌 모델을 같이 사용하는 경우도 역연산 모델을 설명하기 위한 도구 모델로 사용한 경우가 대부분이다. 이 역연산 모델은 초등학교에서 배운 자연수의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 정수의 뺄셈을 설명하는 방법이다. 그러나 고등학교 1학년 수학에서 실수 전체 집합에서의 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하는 방법으로 정의한다. 비록 역연산 모델이 중학교 1학년 학생들에게 정수의 뺄셈을 이해시키기 위한 가장 효과적인 모델이라고 하더라도 이 학생들이 고등학교에 진학하여 배우게 될 실수 전체집합에서의 뺄셈과의 단절은 피하기 어려울 것이다. 제 7차 교육과정과 2007년 개정 교육과정에 따른 대부분의 중학교 교과서에서 정수의 뺄셈을 설명하는데 있어서 고등학교 1학년 교과서에서 다루는 실수의 뺄셈과의 연계성을 염두에 두고 설명한 교과서는 찾기가 어렵다. 셈돌 모델의 경우에는 항등원과 역원 개념을 가장 많이 함의하고 있으나 우리나라 교과서에서 정수의 뺄셈을 설명할 때, 셈돌 모델 자체를 강조하기 보다는 주로 역연산 모델의 설명을 보조하는 역할로 사용된다.

제 7차 교육과정과 2007년 개정 교육과정 교과서에서 정수의 곱셈을 설명하기 위하여 귀납적 외삽법을 주로 이용하였고 수직선과 귀납적 외삽법 또는 셈돌과 귀납적 외삽법을 이용한 경우에도 귀납적 외삽법으로 설명하기 위하여 수직선 모델과 셈돌 모델을 활용했는데, 그 비율이 각각 69%와 73%로 거의 비슷한 상태였다. 정수의 나눗셈의 경우에는 2007년 개정 교육과정 교과서 1종(교문사, 이영하 외, 2009)을 제외하고는 두 교육과정 교과서 모두 역연산 모델을 사용하였다.

미국 교과서*에서 정수의 덧셈과 뺄셈에 대한 모델 사용은 다음 <표 2>와 같다.

정수의 덧셈에 대하여 우리나라 교과서는 주로 수직선 모델을 사용하여 설명하고 있지만 미국 교과서는 주로 수직선 모델과 셈돌 모델을 동시에 사용하여 설명하고 있다. 정수의 뺄셈에 대해서는 우리나라 교과서와 미국 교과서가 큰 차이를 보이고 있다. 우리나라 교과서는 역연산 모델을 바탕으로 다양한 모델을 사용하여 정수의 뺄셈을 설명하고 있고, 이 설명에서 고등학교 1학년 때 배우게 될 부분인, 실수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 이용하여 정의하는 것을 염두에 둔 설명을 거의 찾아볼 수 없었다. 이것은 앞에서 언급했던 것처럼 자연수와 정수의 사칙계산을 바탕으로 실수의 연산으로 형식화되는 과정

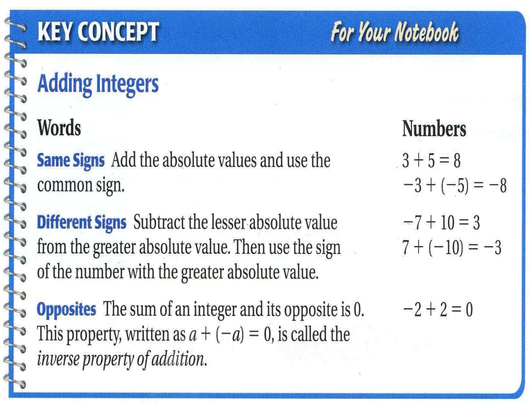
* Glencoe Mathematics Course i를 G_i로, McDougal Littell MATH Course i를 M_i로, Prentice Hall Mathematics Course i를 P_i로 나타내기로 한다. $(i=1,2,3)$

에서 학생들이 겪게 될 단절이 불가피함을 생각하게 하는 부분이다.

<표 2> 미국 교과서의 모델 사용

계산 / 모델명	덧셈			뺄셈		
	G_i	M_i	P_i	G_i	M_i	P_i
수직선	·	M_2 M_3	P_3	·	·	·
수직선+셈돌	G_1 G_2 G_3	M_1	P_1 P_2	·	·	·
수직선+opposite	·	·	·	·	M_2	P_3
셈돌+opposite	·	·	·	G_3	·	·
수직선+셈돌+opposite	·	·	·	G_1 G_2	M_1	P_1 P_2
귀납적 외삽법+opposite	·	·	·	·	M_3	·

반면, 미국 교과서는 분석 대상 9종 모두 정수를 도입하는 과정에서 opposites(수직선 위의 원점에서 떨어진 거리가 같으면서 방향이 다른 두 수) 개념을 수직선을 이용하여 소개한 다음, 정수의 덧셈을 설명하는 과정에서 opposites를 더하면 0이 된다는 사실을 상기시키고 있다(Ron Larson et al., 2007).


KEY CONCEPT For Your Notebook

Adding Integers

Words	Numbers
Same Signs Add the absolute values and use the common sign.	$3+5=8$ $-3+(-5)=-8$
Different Signs Subtract the lesser absolute value from the greater absolute value. Then use the sign of the number with the greater absolute value.	$-7+10=3$ $7+(-10)=-3$
Opposites The sum of an integer and its opposite is 0. This property, written as $a+(-a)=0$, is called the *inverse property of addition.*	$-2+2=0$

<그림 1> 미국 교과서에서의 opposites 사용

수직선에서의 opposites가 역원의 직관적 개념이다. 이를 이용하여 뺄셈을 덧셈으로 자연스럽게 표현할 수 있도록 했다. 이를테면 $(+8)-(-5)$의 계산에서 셈돌 모델을 이용하여 $+13$이 성립함을 설명한 다음 수직선 모델을 이용하여 $(+8)+(+5)=+13$을 설명한다. 마지막으로 $(+8)-(-5)$는 $+8$에 -5의 opposite인 $+5$를 더하는 것으로 결론을 내리고 있다. 뺄셈을 덧셈을 이용하여 표현하는 방법에 있어서 직관적 모델인 셈돌 모델과 수직선 모델을 이용한 다음 opposites 개념을 이용하여 형식적인 관점으로 결론짓고 있다. 심지어 일부 교과서에서는 정수의 덧셈을 설명하면서 덧셈의 역원이라는 용어인 additive inverse를 소개하고 있는데, 이것은 수직선에서의 opposites와 같은 개념이라는 사실을 인식시킴과 동시에 직관적인 관점에서 형식적인 관점으로의 도입을 염두에 둔 설명이다(G_2, G_3, M_3, P_2, P_3).

우리나라에서는 고등학교 1학년 학생들에게 소개되는 항등원과 역원 개념들이 미국에서는 중학교 학생들에게 직관적인 모델을 이용하여 소개되고 있다. 이것은 나중에 배우게 될 덧셈의 역원 개념을 이해하는데 많은 도움이 될 것이다. 물론 중학교 때부터 항등원, 역원 개념을 반드시 도입해야 한다는 것은 아니다. 그러나 항등원, 역원 개념을 도입하지 않고 뺄셈을 지도하기 위해서는 정수의 덧셈에서 사용한 모델과는 무관한 역연산 모델을 바탕으로 다양한 모델이 사용되어야 한다. 고등학교 1학년의 실수의 연산에서는 뺄셈은 덧셈의 역원을 더하는 방법으로 정의되므로, 일관성 있는 수 체계의 관점에서는 중학교 수학 수업에서 정수의 뺄셈은 덧셈을 지도할 때 도입된 모델이 사용되는 것이 타당할 것이다.

정수의 곱셈에 대하여 우리나라 교과서는 제 7차 교육과정 교과서 5종과 2007년 개정 교육과정 교과서 6종이 수직선 모델과 셈돌 모델을 이용하여 설명하고 있고 나머지는 모두 귀납적 외삽법을 중심으로 설명하고 있다. 그러나 Prentice Hall Mathematics course 1, 2, 3 교과서(Charles et al., 2008)는 수직선모델을 이용하여 서로 다른 부호의 곱셈을 설명한 다음, 두 음수의 곱은 opposite 개념을 이용하여 설명했다. 전문적인 수학자들조차도 두 음수의 곱이 양수가 된다는 사실 뿐만 아니라 음수 자체를 받아들이기까지 수천 년이 걸렸다는 사실은 잘 알려져 있다(Frank Swetz et al., 1995, pp. 3 -12). 그러므로 학생들이 두 음수의 곱이 양수가 된다는 사실을 받아들이는 것이 어렵다는 것은 너무도 당연할 것이

다. 우리나라 고등학교 1학년 과정에서는 임의의 두 정수 a, b에 대하여 $(-a)\times(-b)=ab$가 성립함을 증명하기 위하여 다음과 같이 설명한다.

먼저 덧셈과 곱셈이라는 이항연산(binary operation)을 정의하는 과정에서 덧셈에 대한 항등원과 주어진 정수의 덧셈의 역원을 소개한다. $a\times 0=0\times a=0$이 성립함을 증명한 다음, 이 사실, 덧셈의 역원, 그리고 분배법칙을 이용해서

$$a\times(-b)=-(ab)=(-a)\times b,\ -(-a)=a$$

가 성립함을 증명한다. 앞의 사실들로부터

$$(-a)\times(-b)=-[a\times(-b)]=-[-(ab)]=ab$$

임을 증명한다.

<표 3> 미국 교과서의 모델 사용

계산 \ 모델명	곱셈 G_i	곱셈 M_i	곱셈 P_i	나눗셈 G_i	나눗셈 M_i	나눗셈 P_i
역연산	·	·	·	G_3	M_1 M_2 M_3	P_2 P_3
귀납적 외삽법	·	M_1 M_2	·	·	·	·
구체적 상황 모델	·	M_3	·	·	·	·
수직선+귀납적 외삽법	G_3	·	·	·	·	·
수직선+opposite	·	·	P_1 P_2 P_3	·	·	·
셈돌+역연산	·	·	·	G_1 G_2	·	·
셈돌+귀납적 외삽법	G_1	·	·	·	·	·
셈돌+수직선+귀납적 외삽법	G_2	·	·	·	·	·
자연수의 계산+부호 규칙	·	·	·	·	·	P_1

우리나라와 대부분의 미국 교과서에서 두 음수의 곱을 중학생들에게 설명할 때, 귀납적 외삽법을 주로 사용했으나(Rhonda Bailey et al., 2006) Prentice Hall Mathematics 교과서만이 우리나라 고등학교 1학년 학생들에게 소개하는 방법에 대한 직관적인 방법인 수직선에서의 opposites 개념을 이용하여 두 음수의 곱이 양수가 됨을 설명하고 있었다. 같은 내용을 소개함에 있어서 연계성이 뚜렷한 방법을 일관성 있게 사용하는 것은 학생들에게 일관성 있는 지식체계로 수 체계를 인식시키는데 있어서 보다 더 효과적인 방법이 될 것이다. 정수의 나눗셈은 우리나라와 미국 교과서 모두 1종을 제외하고 역연산 모델을 사용하여 설명하고 있다.

앞에서 살펴본 것처럼 우리나라 교과서와 미국 교과서는 정수의 사칙계산을 설명하는데 있어서 본질적인 차이점이 있었다. 그 차이점이 항등원과 역원 개념의 사용이다. 미국 교과서는 적극적으로 사용하고 우리나라 교과서는 사용을 피하고 있다. 이것이 고등학교 학생들의 수 체계 인식에 미치는 영향에 대해서는 분명한 차이점이 있을 것이다.

2. 정수의 사칙계산 지도에 있어서 현직 교사들과 예비 교사들의 모델 선택

가. 정수의 덧셈

정수의 덧셈 지도를 위하여 현직 교사 50명이 선택한 모델과 그 모델을 선택한 현직 교사들의 수를 나타내면 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 현직 교사 50명의 모델 사용

계산 \ 모델명	덧셈 인원 수(%)
수직선	20(40%)
셈돌	4(8%)
구체적 상황 모델	3(6%)
수직선+셈돌	8(16%)
수직선+귀납적 외삽법	8(16%)
수직선+구체적 상황 모델	3(6%)
수직선+셈돌+구체적 상황 모델	2(4%)
귀납적 외삽법+구체적 상황 모델	2(4%)

모델 선택 이유로 가장 중요시한 부분이 학생들의 이해(84%)였고, 나머지가 교과서에 제시된 모델이라는 이유(16%)였다. 지금부터 특별한 언급이 없다면 연구 대상자들 중 2명이상이 선택한 모델에 대해서만 의미를 부여하기로 한다.

우리나라와 미국 교과서에서는 정수의 덧셈을 지도하기 위하여 수직선 모델 또는 수직선+셈돌 모델이 주로 사용된다. 그러나 현직교사들의 모델 선택은 교과서에 제시된 모델에 구체적 상황 모델이 추가되는 경향을 보였다. 현직 교사들의 모델 사용에서 알 수 있는 것처럼, 학생들의 이해에 주로 초점을 두고 다양한 모델이 제시되었다. 예비교사들의 학년별, 설문조사 차례별 모델 선택 분포는 다음 <표 5, 6, 7>과 같다. 여기에서 특이한 점은 연구 대상 예비 교사들 중 소수가 정수의 덧셈을 지도하는 과정에서 역연산 모델을 사용한다는 것이다. 이 결과는 중학교 교과서뿐만 아니라 현직 교사들을 대상으로 하는 설문 조사에서 전혀 나타나지 않는 결과로 설문 조사 후 이들을 대상으로 따로 인터뷰를 실시했다. 그 결과 공통된 의견이 '정수의 뺄셈에서의 역연산이 어렵기 때문에 중학교 학생들에게 덧셈에서 역연산 모델에 대하여 경험을 시킨 다음 뺄셈에서 역연산 모델을 사용한다면 보다 더 쉽게 정수의 뺄셈을 이해시킬 수 있다는 생각이었다.'라는 것이었다.

<표 5> 수학교육과 2학년 22명의 모델 사용

학년 / 모델명	2학년		
	1차	2차	3차
수직선	13(59%)	11(50%)	9(41%)
셈돌	3(14%)	·	2(9%)
수직선+셈돌	·	2(9%)	7(32%)
구체적 상황 모델	·	2(9%)	·
수직선+역연산	·	·	2(9%)

이것은 2007년 개정 교육과정 해설서에서(교육과학기술부, 2009) 밝힌 것처럼 정수의 뺄셈을 도입할 때 역연산 모델의 사용을 전제로 하는 의견이다.

<표 6> 수학교육과 3학년 28명의 모델 사용

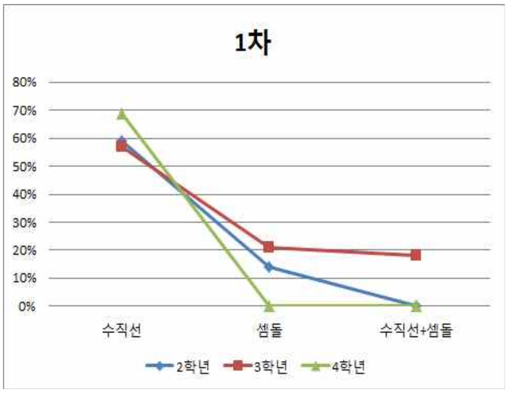
학년 / 모델명	3학년		
	1차	2차	3차
수직선	16(57%)	12(43%)	10(36%)
셈돌	6(21%)	·	·
수직선+셈돌	5(18%)	6(21%)	11(39%)
역연산	·	2(7%)	·

이것은 초등학교에서 배운 자연수의 덧셈, 뺄셈을 바탕으로 정수의 뺄셈을 도입한다는 취지이지만, 이 역연산 모델이 고등학교에서 다루는 뺄셈에서는 사용되지 않는 상황에서 뺄셈을 하면서 덧셈까지 생각해야 하는 부분과 부호에 대한 고려까지 해야 한다는 어려움에 대해서는 여러 가지 자료를 바탕으로 검토하고 깊이 생각해야 할 부분이다.

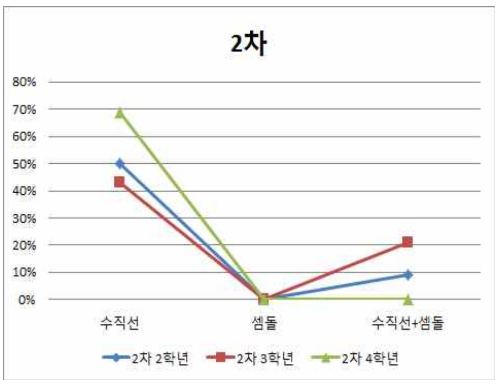
<표 7> 수학교육과 4학년 16명의 모델 사용

학년 / 모델명	4학년		
	1차	2차	3차
수직선	11(69%)	11(69%)	6(38%)
수직선+셈돌	·	·	6(38%)
귀납적 외삽법	2(13%)	2(13%)	·

예비교사들의 모델 선택에 있어서 주목할 점은 제시되는 자료에 따라 모델 선택이 달라진다는 것이다. 특히, 미국 교과서에서 사용된 정수의 사칙계산 지도모델에 대한 설명이 제시된 후, 3차 설문조사 결과에서는 2, 3, 4학년 모두 수직선 모델의 선택 비율이 떨어진 반면, 수직선+셈돌 모델의 선택 비율이 32%~39%로 1, 2차 설문조사 결과와 비교해서 18%~38% 증가했다(<그림 2, 3, 4>참고).



<그림 2> 덧셈 지도를 위한 모델 선택 1



<그림 3> 덧셈 지도를 위한 모델 선택 2

<그림 4> 덧셈 지도를 위한 모델 선택 3

우리나라와 미국의 중학교 수학교과서 분석 및 현직 교사와 예비교사들의 설문조사에서 정수의 덧셈 지도를 위해서 주로 선택된 모델은 수직선, 셈돌, 수직선과 셈돌 모델 3가지이다. 다음 <표 8>은 현직교사들(50명)과 예비교사들(66명)이 정수의 덧셈 지도를 위해서 선택한 이들 모델의 사용 비율을 비교한 것이다. 예비교사의 설문결과는 모든 자료가 제시된 후인 3차 설문조사 결과를 바탕으로 한 자료이다.

정수의 덧셈 지도를 위하여 현직 교사와 예비 교사들이 주로 선택하는 모델 중에서 수직선 모델의 사용 비율과 셈돌 모델의 사용 비율은 거의 차이가 없었다. 그러나 수직선+셈돌 모델의 사용 비율은 예비교사들이 36%로 현직 교사들과 비교해서 20%의 차이를 보였는데, 이것은 미국 교과서의 영향인 것으로 판단된다(<그림 4>).

<표 8> 현직교사와 예비교사들의 모델 사용

계산 / 모델명	덧셈	
	예비 교사 인원 수	현직 교사 인원 수
수직선	25(38%)	20(40%)
셈돌	2(3%)	4(8%)
수직선+셈돌	24(36%)	8(16%)

<그림 5> 예비교사와 현직교사들의 모델 사용

나. 정수의 뺄셈

현행 고등학교 1학년 실수 단원에서 두 실수 a, b 사이의 뺄셈 $a-b$는 일반적으로 a에 b의 덧셈에 대한 역원 $-b$를 더하는 것으로 정의한다. 이 정의를 바탕으로 중학교 1학년 정수의 뺄셈 지도와 고등학교 1학년에서의 뺄셈 지도와의 연계성에 주안점을 두고 설문을 조사했다. 먼저 정수의 뺄셈 지도를 위하여 현직 교사들 50명 중 2명 이상 선택한 모델을 정리하면 <표 9>와 같다.

정수의 뺄셈에서 지도 모델은 연구 대상자들이 주로 선택한 모델인 수직선, 셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산 모델을 위주로 분석하고자 한다.

<표 9> 현직 교사의 모델 사용

계산 / 모델명	뺄셈
	인원 수(%)
수직선	17(34%)
셈돌	10(20%)
역연산	3(6%)
수직선+귀납적 외삽법	3(6%)
구체적 상황	3(6%)
수직선+셈돌	2(4%)
수직선+구체적 상황	2(4%)
수직선+셈돌+구체적 상황	2(4%)
역연산+귀납적 외삽법	2(4%)
귀납적 외삽법 +구체적 상황	2(4%)

정수의 뺄셈에 대한 현직 교사들의 모델 선택은 덧셈과 마찬가지로 학생들의 이해정도가 최우선적인 고려대상이었고(76%), 나머지가 교과서에 제시된 모델이라는 것이었다. 고등학교 1학년에서 실수의 뺄셈은 덧셈의 역원을 더하는 것으로 다루는데, 정수의 뺄셈에서 이 형식적인 관점과 연관성이 있는 모델의 존재성을 묻는 질문에서 58%인 29명이 없다고 답했다. 42%인 21명이 연관성이 있는 모델이 존재한다고 답했다. 연관성이 있다고 답한 21명 중 57%인 12명이 가장 관계가 있는 모델로 역연산 모델을 선택했다. 이들 중 2명 이상 선택한 모델은 수직선(3명, 14%), 셈돌(2명, 9%), 역연산(12명, 57%) 모델이다.

지금부터 중학생들을 대상으로 하는 정수의 뺄셈 지도에서 연구 집단들(현직 교사와 예비 교사들)이 형식적인 관점과의 연계성에 어느 정도로 비중을 두고 수업을 실시하는지를 비교하기 위한 지표인 연계성 지수를 도입하고자 한다.

어떤 연구대상들이 정수의 뺄셈에서 역원을 더하는 형식적인 관점과 관계가 있다고 답한 모델을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라고 하고 형식적인 관점에서 각 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$를 선택한 비율을 α_i, 뺄셈 지도를 위하여 x_i를 선택한 비율을 β_i라고 하자.

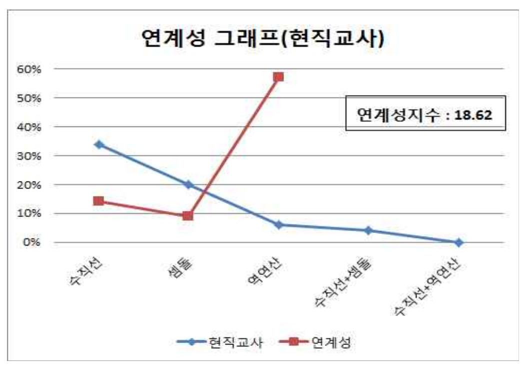
$$r(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2}}{n}$$

을 정수의 뺄셈 지도에서 그 대상들의 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 연계성 지수 $r(x_1, x_2, \cdots, x_n)$로 정의하기로 한다.

다음 <그림 6>은 정수의 뺄셈 지도에서 역원을 더하는 형식적인 관점에서의 모델과 실제 지도에 사용되는 모델 사이의 관계를 나타내는 그래프로 현직교사들의 수직선, 셈돌, 역연산 모델의 연계성 지수 r(수직선, 셈돌, 역연산)은 다음과 같다(소수 셋째 자리에서 반올림).

r(수직선, 셈돌, 역연산)

$$= \frac{\sqrt{(14-34)^2 + (9-20)^2 + (57-6)^2}}{3} = 18.62$$



<그림 6> 현직교사들의 연계성 그래프

예비교사들 중 2학년 학생들의 설문조사 순서별 모델 선택 분포는 다음 <표 10, 11, 12>와 같다.

1차 설문조사에서는 20명 중 14명인 70%, 2차 설문조사에서는 16명 중 12명인 75%, 3차 설문조사에서는 18명 중 16명인 89%가 학생들의 이해정도를 모델 선택의 가장 큰 주안점으로 생각했다.

<표 10> 수학교육과 2학년 22명의 모델 사용

학년 / 모델명	2학년		
	1차	2차	3차
수직선	12(55%)	5(23%)	7(32%)
셈돌	2(9%)	·	2(9%)
역연산	2(9%)	4(18%)	3(14%)
귀납적 외삽법	2(9%)	·	·
수직선+셈돌	·	2(9%)	4(18%)
수직선+역연산	·	2(9%)	2(9%)
수직선+구체적 상황	·	3(14%)	·
셈돌+구체적 상황	2(9%)	·	·

2학년 학생들이 정수의 뺄셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 것으로 정의하는 관점과 연계성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 3차례 모두 70%이상의 학생들이 있다고 답했다(<표 11> 참고). 이 결과는 “연계성이 있는 모델이 존재한다.”고 답한 현직교사들의 결과인 42%와 비교해볼 때, 약 2배 이상 높게 나타난 것이다.

<표 11> 형식적인 관점과의 연계성

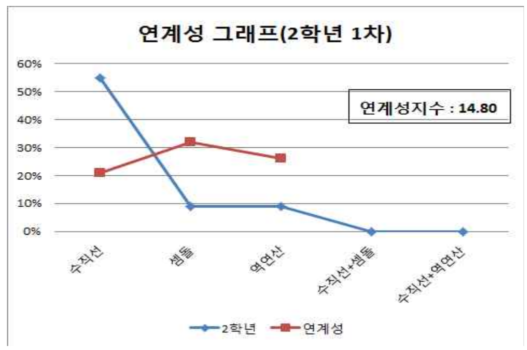
설문 / 연계성	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	19(86%)	17(77%)	17(77%)
없다	3(14%)	5(23%)	5(23%)

정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 연계성이 있다고 답한 2학년 학생들 중 2명이상 선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 다음 <표 12>와 같다.

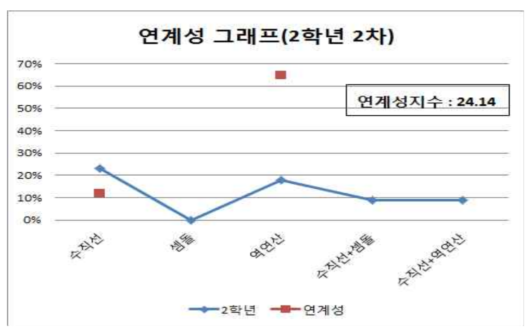
2학년 학생들도 정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 주로 역연산 모델을 선택했지만, 뺄셈을 지도할 때는 수직선 모델보다는 사용 비율이 낮았다.

<표 12> 형식적인 관점과의 연계성 모델

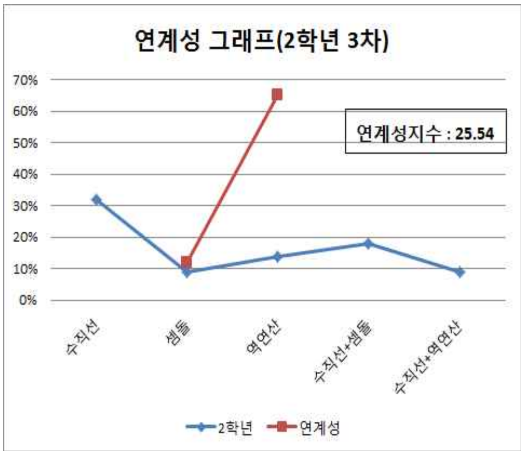
설문 조사	모델	인원 수
1차	수직선	4(21%)
	셈돌	6(32%)
	역연산	5(26%)
2차	수직선	2(12%)
	역연산	11(65%)
3차	셈돌	2(12%)
	역연산	11(65%)



<그림 7> 2학년 학생들의 1차 연계성 그래프



<그림 8> 2학년 학생들의 2차 연계성 그래프



<그림 9> 2학년 학생들의 3차 연계성 그래프

<그림 7, 8, 9>는 2학년 학생들의 정수의 뺄셈 지도에 있어서 설문조사 순서에 따른 형식적인 관점과의 연계성을 나타내는 그래프이다. 첫 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{21}(수직선, 셈돌, 역연산)이라고 할 때,

$$r_{21}(\text{수직선, 셈돌, 역연산}) = 14.80.$$

두 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{22}(수직선, 역연산)이라고 할 때,

$$r_{22}(\text{수직선, 역연산}) = 24.14.$$

세 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{23}(수직선, 역연산)이라고 할 때,

$$r_{23}(\text{셈돌, 역연산}) = 25.54.$$

연구 대상 2학년 학생들은 자료가 제공될수록 연계성 지수가 높게 나타났다. 이것은 2학년 학생들에 대한 자료의 제공이 형식적인 관점과의 연계성을 고려한 수업에 영향을 미치지 못함을 나타내고 있다. 이 예비 교사들은 선형대수학의 수강을 통하여 벡터공간에 대한 개념은 알고 있지만, 수 체계를 일반화한 군, 환, 체와 같은 대수적 구조에 대한 내용을 경험할 기회가 없었던 학생들이므로 본인들의 주관적인 판단에 치중하면서 수 체계를 일관성 있는 지식체계로 지도해야 한다는 깊이 있는 인식이 부족한 것은 당연한 결과일 것이다.

예비교사들 중 3학년 학생들의 설문조사 순서별 모델 선택 분포는 다음 <표 13, 14, 15>와 같다.

<표 13> 수학교육과 3학년 28명의 모델 사용

모델명 \ 학년	3학년		
	1차	2차	3차
수직선	15(54%)	6(21%)	6(21%)
셈돌	4(14%)	·	·
역연산	2(7%)	5(18%)	4(14%)
수직선+ 귀납적 외삽법	·	·	2(7%)
수직선+셈돌	3(11%)	3(11%)	5(18%)
수직선+역연산	2(7%)	7(25%)	3(11%)
셈돌+역연산	·	2(7%)	·
수직선+셈돌+역연산	·	·	4(14%)

2학년 학생들에 비해서 3학년 학생들의 모델 선택은 수직선, 셈돌, 역연산 모델로 집중되는 현상을 보였으며 설문조사가 거듭될수록 1가지 모델보다는 2가지 이상의 모델을 동시에 사용하려는 비율이 높아졌다. 모델 선택의 가장 큰 주안점으로 1차 설문조사에서는 26명 중 22명인 85%, 2차 설문조사에서는 23명 중 19명인 83%, 3차 설문조사에서는 24명 중 20명인 83%가 학생들의 이해정도를 선택했다.

<표 14> 형식적인 관점과의 연계성

연계성 \ 설문	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	26(93%)	24(86%)	24(86%)
없다	2(7%)	4(14%)	4(14%)

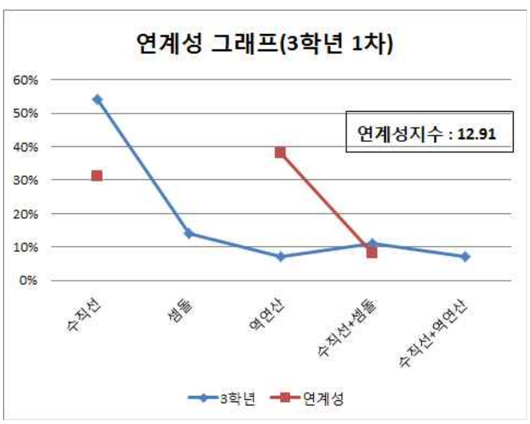
3학년 학생들이 정수의 뺄셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 것으로 정의하는 관점과 연관성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 3차례 모두 거의 90%이상의 학생들이 있다고 답했다(<표 14> 참고). 이 결과는 “연관성이 있는 모델이 존재한다.”고 답한 2학년 학생들의 결과보다 약간 높게 나타난 것이다. 실제로 수학교육과 3학년과정에서 수학교육론을 포함한 교과교육학 과목과 현대대수

학을 포함한 교과내용학 과목의 수강이 집중된다. 정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 연관성이 있다고 답한 3학년 학생들 중 2명 이상 선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 다음 <표 15>와 같다.

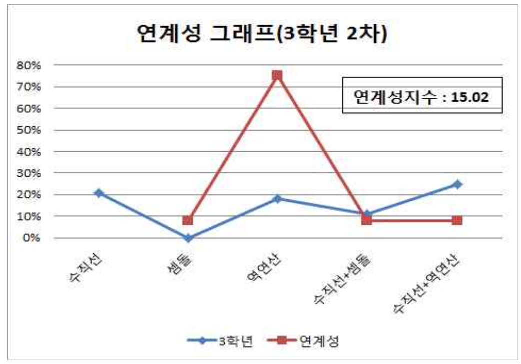
<표 15> 형식적인 관점과의 연계성 모델

설문 조사	모델	인원 수
1차	수직선	8(31%)
	역연산	10(38%)
	수직선+셈돌	2(8%)
	수직선+셈돌+역연산	3(12%)
2차	셈돌	2(8%)
	역연산	18(75%)
	수직선+셈돌	2(8%)
	수직선+역연산	2(8%)
3차	셈돌	3(13%)
	역연산	14(58%)
	수직선+셈돌	2(8%)
	수직선+역연산	3(13%)

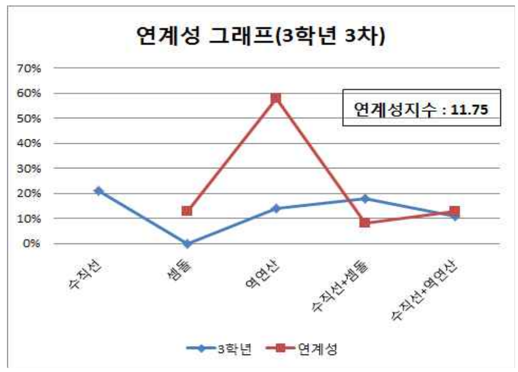
3학년 학생들은 정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 주로 역연산 모델을 선택했으며, 뺄셈을 지도할 때도 2학년 학생들보다는 역연산 모델의 사용 비율이 높았다.



<그림 10> 3학년 학생들의 1차 연계성 그래프



<그림 11> 3학년 학생들의 2차 연계성 그래프



<그림 12> 3학년 학생들의 3차 연계성 그래프

<그림 10, 11, 12>는 3학년 학생들의 정수의 뺄셈 지도에 있어서 설문조사 순서에 따른 형식적인 관점과의 연계성을 나타내는 그래프이다. 첫 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{31}(수직선, 역연산, 수직선+셈돌)이라고 할 때, r_{31}(수직선, 역연산, 수직선+셈돌)$= 12.91$.

두 번째 설문조사의 연계성 지수를

r_{32}(셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산)

이라고 할 때,

r_{32}(셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산)

$= 15.02$.

세 번째 설문조사의 연계성 지수를

r_{33}(셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산)

이라고 할 때,

r_{33}(셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산)

=11.75.

연구 대상 3학년 학생들을 대상으로 하는 설문 조사 결과를 통한 연계성 지수가 현직 교사들의 연계성 지수보다 작은 결과를 나타냈으며 마지막 설문조사에서 연계성 지수가 가장 낮게 나타났다. 이것은 3학년 학생들에 대한 자료의 제공이 형식적인 관점과의 연계성을 고려한 수업에 긍정적인 영향을 미치고 있음을 나타내고 있다.

예비교사들 중 4학년 학생들의 설문조사 순서별 모델 선택 분포는 다음 <표 16, 17, 18>과 같다.

<표 16> 수학교육과 4학년 16명의 모델 사용

학년 / 모델명	4학년		
	1차	2차	3차
수직선	8(50%)	5(31%)	4(25%)
셈돌	3(19%)	3(19%)	·
역연산	·	2(13%)	·
귀납적 외삽법	2(13%)	2(13%)	·
수직선+역연산	·	·	4(25%)

모델 선택의 가장 큰 주안점으로 1차 설문조사에서는 13명 중 10명인 77%, 2차 설문조사에서는 12명 중 11명인 92%, 3차 설문조사에서는 8명 중 4명인 50%가 학생들의 이해정도를 선택했다. 4학년 학생들이 정수의 뺄셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 것으로 정의하는 관점과 연관성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 첫 번째 50%, 두 번째와 세 번째 모두 69%의 학생들이 있다고 답했다(<표 17> 참고). 이 결과는 현직교사들 보다는 높은 비율이나 2, 3학년 학생들의 결과보다 약간 낮은 비율이다.

<표 17> 형식적인 관점과의 연계성

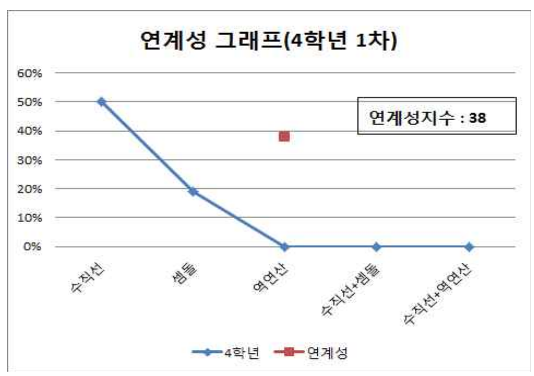
설문 / 연계성	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	8(50%)	11(69%)	11(69%)
없다	8(50%)	5(31%)	5(31%)

정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 연관성이 있다고 답한 4학년 학생들 중 2명 이상 선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 다음 <표 18>과 같다. 4학년 학생들은 정수의 뺄셈을 덧셈의 역원을 더하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 주로 역연산 모델을 선택했으며, 뺄셈을 지도할 때는 3학년 학생들에 비해서 역연산 모델의 사용 비율이 높지 않았다. 정수의 뺄셈에서 4학년 학생들이 주로 사용한 모델은 수직선, 셈돌, 역연산, 수직선+셈돌, 수직선+역연산 모델이다.

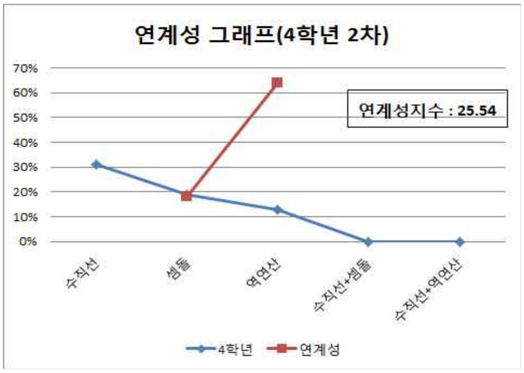
<표 18> 형식적인 관점과의 연계성 모델

설문 조사	모델	인원 수
1차	역연산	3(38%)
	귀납적 외삽법	2(25%)
2차	셈돌	2(18%)
	역연산	7(64%)
3차	수직선	2(18%)
	셈돌	2(18%)
	역연산	4(36%)

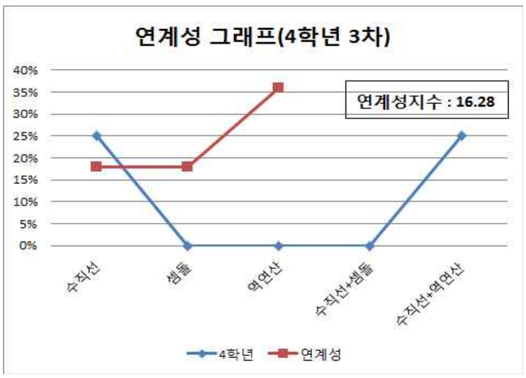
<그림 13, 14, 15>는 4학년 학생들의 정수의 뺄셈 지도에 있어서 설문조사 순서에 따른 형식적인 관점과의 연계성을 나타내는 그래프이다.



<그림 13> 4학년 학생들의 1차 연계성 그래프



<그림 14> 4학년 학생들의 2차 연계성 그래프



<그림 15> 4학년 학생들의 3차 연계성 그래프

첫 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{41}(역연산)이라고 할 때, r_{41}(역연산)$=38$.

두 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{42}(셈돌, 역연산)이라고 할 때, r_{42}(셈돌, 역연산)$=25.54$.

세 번째 설문조사의 연계성 지수를 r_{43}(수직선, 셈돌, 역연산) 이라고 할 때,

r_{43}(수직선, 셈돌, 역연산)$=16.28$.

4학년 학생들의 경우 설문조사가 진행되는 순서에 따라 나타난 연계성 지수가 여러 가지 자료들이 제공됨에 따라 낮아지는 경향을 보였다. 그러나 이 결과는 3학년과 비교해서는 연계성 지수가 전반적으로 높은 상태이며 r_{43}(수직선, 셈돌, 역연산)을 제외하면 현직교사들과 2학년과 비교해서도 비슷하거나 높은 상태이다. 이와 같은 결과는 예상하지 못한 결과였으므로 연구 대상 4학년 학생들 중 일부를 대상으로 인터뷰를 실시했다. 이들의 공통적인 의견은 현장실습 기간 동안 학생들을 지도해본 결과 학생들의 수학에 대한 흥미가 너무 떨어져 있었기 때문에 일관성이 있는 지식체계를 바탕으로 하는 수 체계의 지도보다는 이해 위주의 지도가 우선이라는 것이었다. 본질적인 부분에 대한 지도와 이해 위주의 지도가 양립할 수 없다는 예비교사들의 인식을 읽을 수 있었던 인터뷰였다.

다. 정수의 곱셈

정수의 곱셈 지도를 위하여 현직 교사 50명이 선택한 모델과 그 모델을 선택한 현직 교사들의 수를 나타내면 다음 <표 19>와 같고, 모델 선택 이유로 가장 중요시한 부분이 학생들의 이해(73%)였고, 나머지가 교과서에 제시된 모델(20%) 또는 자신이 선호하는 모델(7%)이라는 이유였다. 정수의 곱셈에서 두 음수의 곱셈이 양수가 된다는 사실을 중학교 학생들에게 이해시키는 것은 쉬운 일이 아니다. 현직 교사들의 모델 사용에서 알 수 있는 것처럼, 학생들의 이해에 주로 초점을 두고 모델이 제시되거나 모델을 사용하지 않고 결과만을 제시하는 것이 일반적인 지도 방법으로 나타났다. 정수의 곱셈에서 지도 모델은 연구 대상자들이 주로 선택한 모델인 수직선, 귀납적 외삽법, 구체적 상황 모델을 위주로 분석하고자 한다.

<표 19> 현직 교사 50명의 모델 사용

계산 / 모델명	덧셈
	인원 수(%)
수직선	5(10%)
귀납적 외삽법	22(44%)
구체적 상황 모델	5(10%)
귀납적 외삽법+구체적 상황 모델	2(4%)
모델 사용 안함	11(22%)

예비교사들의 학년별, 설문조사 차례별 모델 선택 분포는 다음 <표 20, 21, 22>와 같다.

<표 20> 수학교육과 2학년 22명의 모델 사용

학년 / 모델명	2학년		
	1차	2차	3차
수직선	7(32%)	3(14%)	3(14%)
셈돌	·	6(27%)	3(14%)
역연산	·	2(9%)	3(14%)
셈돌+역연산	·	2(9%)	
귀납적 외삽법	6(27%)	·	3(14%)
역연산+귀납적 외삽법	·	·	2(9%)
구체적 상황 모델	2(9%)	2(9%)	·
모델 사용 안함	3(14%)	2(9%)	2(9%)

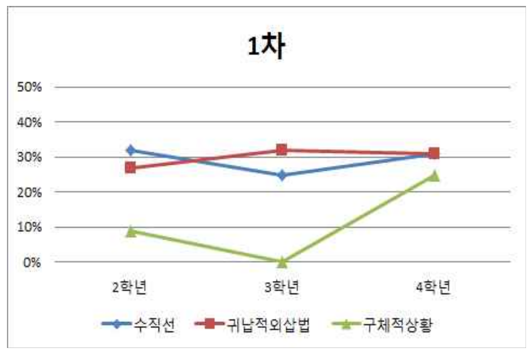
<표 21> 수학교육과 3학년 28명의 모델 사용

학년 / 모델명	3학년		
	1차	2차	3차
수직선	7(25%)	6(43%)	4(14%)
역연산	·	2(7%)	2(7%)
귀납적 외삽법	9(32%)	10(36%)	10(36%)
수직선+셈돌+귀납적 외삽법	·	·	2(7%)
수직선+귀납적 외삽법	2(7%)	3(11%)	4(14%)
귀납적 외삽법+구체적 상황	·	3(11%)	·

<표 22> 수학교육과 4학년 16명의 모델 사용

학년 / 모델명	4학년		
	1차	2차	3차
수직선	5(31%)	2(13%)	3(19%)
셈돌	·	2(13%)	3(19%)
귀납적 외삽법	5(31%)	7(44%)	7(44%)
구체적 상황	4(25%)	·	·

현직교사들과는 달리 2학년 학생들이 정수의 곱셈 지도를 위하여 다양한 모델을 선택했지만 학생들의 이해에 초점을 둔 모델의 제시는 현직교사들의 생각과 차이가 없었다. 그러나 모델을 사용하지 않고 자연수의 곱셈과 부호 규칙을 이용해서 결과만 제시하겠다는 비율은 현직교사들에 비해서 현저하게 낮은 비율을 보였다. 3, 4학년 학생들은 모델을 사용하지 않고 결과만 제시하는 비율이 거의 0%에 가까운 결과가 나왔다. 정수의 곱셈에 대한 모델 선택은 연구 대상자들 모두 귀납적 외삽법이 우세한 경향을 보였다. 그러나 이 방법은 고등학교 1학년 과정의 실수의 연산에서는 사용하지 않는다. 그럼에도 불구하고 중학생들을 대상으로 두 음수의 곱이 양수라는 사실을 지도하는데 있어서 귀납적 외삽법이 최선의 방법이라는 것이다.

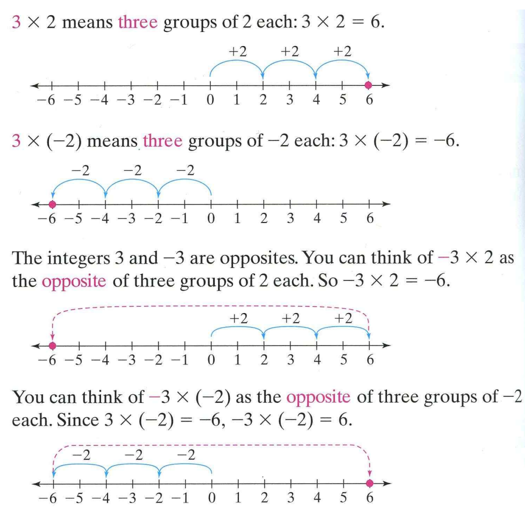


<그림 16> 곱셈 지도를 위한 모델 선택 1

<그림 17> 곱셈 지도를 위한 모델 선택 3

<그림 18> 곱셈 지도를 위한 모델 선택 3

정수의 덧셈과 뺄셈과는 달리 정수의 곱셈에서는 현직 교사와 예비교사들의 모델 선택에 있어서 차이점이 거의 없었다. 그러나 앞에서 소개한대로 두 음수의 곱셈 지도를 위하여 opposites 개념을 도입한 Prentice Hall Mathematics(Charles et al., 2008) 교과서의 설명 방법을 지지하는 예비교사들이 많았다(<그림 19> 참고). 실제로 이 방법은 우리나라 고등학교 1학년을 대상으로하는 실수 단원에서 두 음수의 곱을 설명할 때 사용하는 방법이다.

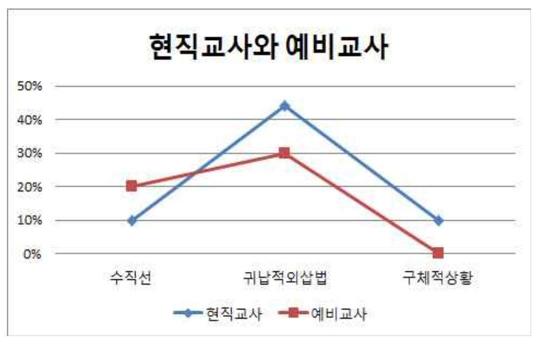


<그림 19> 두 음수의 곱에 대한 지도 예시

우리나라와 미국의 중학교 수학교과서 분석 및 현직 교사와 예비교사들의 설문조사에서 정수의 곱셈 지도를 위해서 주로 선택된 모델은 수직선, 셈돌, 귀납적 외삽법, 구체적 상황 모델 및 이 모델들을 혼합한 모델이다. 다음 <표 23>은 현직교사들(50명)과 예비교사들(66명)이 정수의 곱셈 지도를 위해서 선택한 이들 모델의 사용 비율을 비교한 것이다. 예비교사의 설문결과는 모든 자료가 제시된 후인 3차 설문조사결과를 바탕으로 한 자료이다.

<표 23> 현직교사와 예비교사들의 모델 사용

계산 / 모델명	덧셈	
	현직 교사 인원 수	예비 교사 인원 수
수직선	5(10%)	13(20%)
셈돌	·	6(5%)
귀납적 외삽법	22(44%)	20(30%)
구체적 상황	5(10%)	·
수직선+귀납적 외삽법	·	4(6%)
수직선+셈돌+귀납적 외삽법	·	2(3%)
귀납적 외삽법+구체적 상황	2(4%)	·



<그림 20> 예비교사와 현직교사들의 모델 사용

정수의 곱셈 지도를 위하여 현직 교사들은 귀납적 외삽법을 중심으로 구체적 상황 모델을 보조 모델로 사용하고 있었다. 예비 교사들은 귀납적 외삽법을 주 모델로 사용하는 것은 현직교사들과 차이는 없지만 사용 비율은 현직 교사들과 비교할 때, 10%이상 낮고, 수직선 모델과 셈돌 모델을 병행하여 주로 사용하는 경향을 보이고 있

었다.

라. 정수의 나눗셈

현행 고등학교 1학년 실수 단원에서 두 실수 a, b 사이의 나눗셈 $a \div b$는 일반적으로 a에 b의 곱셈에 대한 역원 $\frac{1}{b}$를 곱하는 것으로 정의한다. 이 정의를 바탕으로 중학교 1학년 정수의 나눗셈 지도와의 연계성에 주안점을 두고 설문을 조사했다. 먼저 정수의 나눗셈 지도를 위하여 현직 교사들 50명 중 2명 이상 선택한 모델을 정리하면 다음 <표 24>와 같다.

<표 24> 현직 교사의 모델 사용

계산 / 모델명	빼셈
	인원 수(%)
수직선	3(6%)
역연산	13(26%)
귀납적 외삽법	15(30%)
구체적 상황	2(4%)
모델 사용 안함	15(30%)

정수의 나눗셈에 대한 현직 교사들의 모델 선택에서 주목할 점은 구체적인 모델을 사용하지 않은 비율이 30%라는 것이다, 이것은 정수의 나눗셈을 지도할 때, 자연수의 나눗셈과 정수의 곱셈에서의 부호 규칙을 이용하여 결과만 제시하는 것이다. 고등학교 1학년에서 실수의 나눗셈은 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 다루는데, 정수의 나눗셈에서 이 형식적인 관점과 연관성이 있는 모델의 존재성을 묻는 질문에서 70%인 35명이 없다고 답했고 30%인 15명이 연관성이 있는 모델이 존재한다고 답했다. 15명 중 73%인 11명이 가장 관계가 있는 모델로 역연산 모델을 선택했다. 연구 대상 현직교사들 중 2명 이상 선택한 모델은 역연산(11명, 73%), 역연산과 귀납적 외삽법(2명, 13%) 모델이다. 실제 수업에서 역연산 모델의 사용 비율은 26%인 13명이고 귀납적 외삽법은 30%인 15명으로 고등학교 1학년 수학 수업에서 실수의 연산과의 계통성 보다는 학생들의 이해만을 염두에 둔 지도라고 판단할 수 있을 것이다.

예비교사들 중 2학년 학생들의 설문조사 순서별 모델 선택 분포는 다음 <표 25, 26, 27>과 같다.

2학년 학생들의 모델 선택은 설문조사가 거듭될 수록 수직선, 셈돌, 역연산 모델로 집중되는 경향을 보였으며, 그 중에서 역연산 모델의 사용 비율이 증가하는 경향이 뚜렷했다. 2학년 학생들이 정수의 나눗셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 정의하는 관점과 연계성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 첫 번째 조사에서는 64%인 14명의 학생들이 없다고 답했지만 두 번째, 세 번째에서는 반대로 14명의 학생들이 있다고 답했다 (<표 26> 참고). 이것은 “연계성이 있는 모델이 존재한다.”고 답한 현직교사들의 결과인 30%와 비교해볼 때, 약 2배 이상 높게 나타난 결과이다.

<표 25> 수학교육과 2학년 22명의 모델 사용

학년 / 모델명	2학년		
	1차	2차	3차
수직선	6(27%)	·	3(14%)
셈돌	·	6(27%)	2(9%)
역연산	3(14%)	6(27%)	7(32%)
구체적 상황	3(14%)	2(9%)	·
역연산+ 귀납적 외삽법	2(9%)	·	·
셈돌+구체적 상황	2(9%)	·	·
모델 사용 안함	7(32%)	4(18%)	2(9%)

<표 26> 형식적인 관점과의 연계성

설문 / 연계성	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	8(36%)	14(64%)	14(64%)
없다	14(64%)	8(36%)	8(36%)

정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 연관성이 있다고 답한 2학년 학생들 중 2명 이상

선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 다음 <표 27>과 같다.

<표 27> 형식적인 관점과의 연계성 모델

설문 조사	모델	인원 수
1차	역연산	5(63%)
2차	역연산	11(79%)
3차	역연산	12(86%)

현직 교사들과 마찬가지로 2학년 학생들도 정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 역연산 모델을 선택했다.

예비교사들 중 3학년 학생들의 설문조사 순서별 모델 선택 분포는 다음 <표 28, 29, 30>와 같다.

<표 28> 수학교육과 3학년 28명의 모델 사용

학년 / 모델명	3학년		
	1차	2차	3차
수직선	5(18%)	2(7%)	·
셈돌	·	5(18%)	·
역연산	9(32%)	11(39%)	10(36%)
귀납적 외삽법	5(18%)	3(11%)	2(7%)
수직선+역연산	2(7%)	·	·
수직선+역연산+귀납적 외삽법	·	·	2(7%)
셈돌+역연산	·	·	3(11%)
모델 사용 안함	3(11%)	·	·

2학년 학생들에 비해서 3학년 학생들의 모델 선택은 역연산 모델로 집중되는 현상을 보였으며 3차 설문조사에서는 1가지 모델보다는 2가지 이상의 모델을 동시에 사용하려는 비율이 높아졌다. 3학년 학생들이 정수의 나눗셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 정의하는 관점과 연계성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 3차례 모두 약 50%이상의 학생들이 있다고 답했다(<표 29> 참고). 이 결과는 “연관성이 있는 모델이 존재한다.”고 답한 2학년 학생들의 결과보다 약간 높게 나타난 것이다.

<표 29> 형식적인 관점과의 연계성

설문 / 연계성	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	14(50%)	18(64%)	20(71%)
없다	14(50%)	10(36%)	8(29%)

정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 연계성이 있다고 답한 3학년 학생들 중 2명 이상 선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 다음 <표 30>과 같다.

<표 30> 형식적인 관점과의 연계성 모델

설문 조사	모델	인원 수
1차	역연산	10(71%)
	수직선	2(14%)
2차	역연산	16(89%)
3차	역연산	17(94%)

3학년 학생들은 정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 첫 번째 설문조사를 제외하고 약 90%가 역연산 모델을 선택했으며, 나눗셈을 지도할 때도 2학년 학생들보다는 역연산 모델의 사용 비율이 높았다.

예비교사들 중 4학년 학생들의 설문조사 차례별 모델 선택 분포는 다음 <표 31, 32, 33>과 같다.

4학년 학생들의 모델 선택은 2, 3학년 학생들에 비해서는 모델의 사용이 단순화 되는 경향이 뚜렷했다. 4학년 학생들이 정수의 나눗셈을 지도하기 위하여 선택한 모델 중에서 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 정의하는 관점과 연계성이 있는 모델의 존재성 유무를 묻는 설문조사에서 첫 번째 50%, 두 번째와 세 번째 모두 56%의 학생들이 있다고 답했다(<표 32> 참고). 이 결과는 현직교사들 보다는 높은 비율이나 2, 3학년 학생들의

결과보다 약간 낮은 비율이다.

<표 31> 수학교육과 4학년 16명의 모델 사용

학년 / 모델명	4학년		
	1차	2차	3차
수직선	5(31%)	·	·
셈돌	·	3(19%)	3(19%)
역연산	·	4(25%)	3(19%)
귀납적 외삽법	4(25%)	4(25%)	4(25%)
구체적 상황	2(13%)	·	·
모델 사용 안함	3(19%)	·	·

<표 32> 형식적인 관점과의 연계성

설문 / 연계성	1차	2차	3차
	인원 수	인원 수	인원 수
있다	8(50%)	9(56%)	9(56%)
없다	8(50%)	7(44%)	7(44%)

<표 33> 형식적인 관점과의 연계성 모델

설문 조사	모델	인원 수
1차	역연산	3(38%)
	귀납적 외삽법	2(25%)
2차	수직선	2(22%)
	역연산	4(44%)
	귀납적 외삽법	3(33%)
3차	역연산	3(33%)
	귀납적 외삽법	3(33%)

정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 연관성이 있다고 답한 4학년 학생들 중 2명 이상 선택한 모델에 대한 설문조사 결과는 <표 33>과 같다. 4학년 학생들은 정수의 나눗셈을 곱셈의 역원을 곱하는 형식적인 관점과 가장 관계가 있는 모델로 주로 역연산 모델을 선택했으나, 나눗셈을 지도할 때는 3학년 학생들에 비해서 역연산 모델의 사용 비율이 높지 않았다. 정수의 나눗셈에서는 역연산 모델이 주로 사용된다는 의견에 연구 대상자들 대부분이 동의하고 있었다. 그러나 정수의 뺄셈과 마찬가지로 나눗셈도 역연산 모델에 의한 지도 방법이 곱셈에 대한 역원을 곱하는 것과 동일한 방법은 아니다.

3. 일관성 있는 지식체계로서의 수 체계 인식을 위한 정수의 사칙계산 모델 선택

고등학교 1학년 수학에서 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하고, 나눗셈은 나누는 수의 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 정의한다. 대학교 학부과정의 대수학에서도 이항연산은 덧셈과 곱셈 두 가지이다. 뺄셈과 나눗셈은 각각 덧셈과 곱셈을 이용하여 정의한다. 따라서 학생들에게 일관성 있는 지식 체계로 수 체계를 인식시키기 위하여 중학교에서 정수의 사칙계산을 지도할 때, 뺄셈은 덧셈에서 사용한 모델을 이용하여 지도하는 것이 필요할 것이다. 정수의 덧셈에서 수직선 모델과 셈돌 모델을 사용했다면 뺄셈에서도 이들 모델의 사용을 통하여 덧셈을 이용하여 정의한다면, 중학생들 입장에서 덧셈과 뺄셈은 별개의 계산이 아니라는 인식을 할 수 있을 것이다. 이와 같은 관점에서 미국 교과서에서의 모델 사용 방법은 시사점이 크다고 볼 수 있다. 미국 교과서에서 수직선과 셈돌 모델을 이용하여 정수의 덧셈을 설명하고 뺄셈에서도 이들 모델을 사용하여 설명하고 있다. 이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(+2)-(-3) &= (+2)+0-(-3)\\ &= (+2)+(+3)+(-3)-(-3)\\ &= (+2)+(+3)+0\\ &= (+2)+(+3).\end{aligned}$$

이 등식을 중학생들의 수준에서 직관적인 모델을 이용하여 표현한 것이 미국 교과서에서 사용하는 방법이다. 이를테면 검은 돌 1개를 $+1$, 흰 돌 1개를 -1이라고 할 때, $(+2)-(-3)$은 검은 돌 2개에서 흰 돌 3개를 빼는 것과 같다. 그런데 이것은 불가능하므로 검은 돌 3개와 흰 돌 3개를 더해준다. 이것이 덧셈의 항등

원인 0을 사용하는 부분이다. 이 방법을 통하여 학생들에게 덧셈에 대한 항등원인 0이 필요함을 적절하게 인식시킬 수 있을 것이다. 이것은 수 체계의 지도에 중요한 부분이라고 볼 수 있다. 왜냐하면 덧셈에 대한 항등원인 0이 사칙계산을 통해서 얻어지는 것이 아니고 수 체계의 구성을 위해서 0이 주어진 다음 비로소 사칙계산이 수행되는 방향으로 지도되어야 하기 때문이다. 앞에서와 같이 덧셈에 대한 항등원인 0을 사용함으로써 뺄셈을 덧셈을 이용하여 자연스럽게 도입할 수 있었다. 미국 교과서에서는 정수의 개념을 도입하는 과정에서 수직선을 이용한 덧셈을 통하여 0과 opposites 개념을 먼저 소개하고, 셈돌 모델을 통하여 0을 적절하게 활용하고 있기 때문에, 중학생들 입장에서도 $(+2)-(-3)$는 $+2$에 -3의 opposite인 $+3$를 더한다는 개념을 쉽게 받아들일 수 있을 것이다.

정수의 곱셈도 덧셈에서 사용한 모델을 이용하여 도입할 수 있다. 두 양수의 곱과 서로 다른 부호의 곱셈은 수직선 모델과 셈돌 모델을 이용하여 설명할 수 있다. 즉, 수직선 모델을 이용하면 $(-2)\times(+3)$는 원점에서 왼쪽으로 2칸 가는 방법으로 3번 반복하면 왼쪽으로 6칸 가는 방법이 된다. 따라서 $(-2)\times(+3)=-6$이 성립한다. $(+2)\times(-3)=-6$도 같은 방법으로 설명할 수 있다. 이제 $(-2)\times(-3)$은 음의 부호가 2개 있으므로 $(-2)\times(-3)=-(-6)$이 성립함은 쉽게 이해시킬 수 있다. 그 다음 $-(-6)$은 -6의 opposite인 6이므로 $-(-6)=+6$, 즉 $(-2)\times(-3)=+6$이 성립한다. 나눗셈은 정수의 사칙계산만을 다루는 경우에는 곱셈의 역연산으로 설명하는 것이 적절한 방법이 될 것이다. 지금까지 정수의 사칙계산을 설명하는데 있어서 수직선 모델과 셈돌 모델만으로 설명하는 방법을 소개했다. 정수의 사칙계산을 도입하는 경우 다양한 모델을 사용하는 것이 학생들의 이해를 돕고 수 체계의 본질을 잘 파악할 수 있도록 하는 것은 아닐 것이다. 사칙계산 자체가 분리된 개념이 아닌 통합된 하나의 개념구조를 이룬다는 것을 이해시킴으로써 수 체계가 일관성 있는 지식체계라는 사실을 인식시키는 최선의 방법은 덧셈에서 사용된 모델이 일관성 있게 나머지 계산에 적용되면서 확장되어가는 방향으로 학생들에게 제시하는 것이라고 생각한다.

V. 결 론

정수의 사칙계산 지도에 있어서 미국의 중학교 수학 교과서에서는 덧셈에 대한 항등원 0과 곱셈에 대한 항등원 1을 강조하여 제시한다. 이것이 우리나라 중학교 1학년 수학교과서와 미국의 중학교 수학 교과서와의 본질적인 차이점이다. 고등학교 1학년 수학에서 뺄셈은 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하고, 나눗셈은 나누는 수의 곱셈의 역원을 곱하는 것으로 정의한다. 학생들에게 일관성 있는 지식 체계로서 수 체계를 인식시키기 위하여 중학교에서 정수의 사칙계산을 지도할 때, 뺄셈과 나눗셈, 그리고 두 음수의 곱을 고등학교에서 배우는 실수의 연산과 연계성을 가진 모델로 지도해야 할 것이다. 그러나 우리나라 중학교 교과서에서는 덧셈의 항등원 0과 곱셈의 항등원 1을 강조하지 않기 때문에 뺄셈을 역연산의 개념으로 지도한다. 뺄셈을 하면서 덧셈의 결과를 동시에 생각해야하는 어려움이 있다. 자연수에서의 사칙계산과는 달리 정수의 사칙계산에서는 부호까지 처리해야하기 때문에 역연산의 개념을 이용하여 뺄셈을 이해시키는 것은 중학교 1학년 학생들에게는 쉽지 않은 방법이다.

미국의 중학교 교과서에서는 항등원과 역원의 직관적인 개념을 수직선 모델과 셈돌 모델을 이용하여 도입하고 있다. 수직선에서의 opposites가 역원의 직관적 개념이다. 이를 이용하여 뺄셈을 덧셈으로 자연스럽게 나타낼 수 있도록 했고 두 음수의 곱이 양수가 됨을 설명하고 있다. 특히, 정수의 뺄셈을 도입하면서 다양한 모델을 사용하는 것과 특정한 모델을 사용하는 것과의 차이점은 중등학교 학생들을 대상으로 더 많은 연구가 필요한 부분이다.

한편, 정수의 나눗셈을 유리수의 사칙계산과 분리하여 설명하지 않는다면 곱셈의 항등원인 1을 사용하여 나눗셈에서 나누는 수의 역수를 곱하는 것을 자연스럽게 도입할 수 있다. 그리고 이 방법은 뺄셈을 빼는 수의 덧셈의 역원을 더하는 것과 방법적인 측면에서 유사하기 때문에 학생들의 스키마(Skemp, 1987)를 확장시킴으로써 이해를 돕는데 있어서 장애물이 되지는 않을 것이다. 이를테면, 정수의 나눗셈에서 곱셈의 항등원인 1을 이용하면

$$(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

이므로

$$\begin{aligned}(+4)\div(-2)&=\{(+4)\times(+1)\}\div(-2)\\&=\left\{(+4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)\right\}\div(-2)\\&=(+4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(+1)\\&=(+4)\times\left(-\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

즉 곱셈의 항등원인 1을 이용하면 나눗셈은 나누는 수의 역수를 곱하는 것으로 설명할 수 있을 것이다. 중학교 학생들에 대하여 항등원과 역원의 직관적인 개념을 도입하여 정수의 사칙계산을 지도하는 것과 항등원과 역원의 직관적인 개념을 도입하지 않고 정수의 사칙계산을 지도하는 것에 대한 심층적인 탐구가 필요할 것이다. 우리나라 중학교 1학년 수학 교과서는 미국의 중학교 수학 교과서에 비해서 다양한 직관적 모델 및 형식적 관점에 의한 방법들을 제시하고 있다. 정수의 사칙계산을 지도할 때, 고등학교에서 공부하는 실수체계로의 확장을 고려하여 수업하는 것의 필요성을 묻는 질문에서 설문조사에 참가한 현직 교사들 50명 중 42%인 21명은 필요하지 않다고 답했다. 22%인 11명은 모르겠다고 답했다. 필요하다고 답한 비율은 36%로 18명이다. 학생들이 이해하기 쉽지 않기 때문이라는 것이 주된 이유였다.

연산이라는 것은 이항연산을 의미하는 것으로 고등학교에서 배우는 수 체계에서의 연산은 덧셈과 곱셈 두 가지 뿐이다. 뺄셈과 나눗셈은 각각 덧셈과 곱셈을 이용하여 나타내도록 하고 있다. 여기에 항등원 역원이 이용된다. 이와 같은 관점에서 본다면 중학교 1학년에서 제시되는 정수의 사칙계산에서 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈은 서로 연계성을 가지는 모델을 사용하는 것이 합리적일 것이다. 뺄셈(나눗셈)을 지도하기 위하여 사용되는 모델이 덧셈(곱셈)을 지도하기 위하여 사용되는 모델과 연계성이 없다면 계통성으로 구성된 수학교과를 학생들에게 효율적으로 지도하고 있다고 인정하기는 힘들 것이다.

참 고 문 헌

강신덕 · 함남우 · 홍인숙 · 김영우 · 이재순 · 전민정 · 라미영 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 교학사.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2001). 수학 7-가. 서울: 두산.

강행고 · 이화영 · 박성기 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙 (2001). 수학 7-가. 서울: 중앙교육진흥연구소.

고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영 (2001). 수학 7-가. 서울: 블랙박스.

교육부 (1992). 제 6차 중학교 교육과정, 서울: 대한교과서.

교육인적자원부 (1997). 제7차 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서.

교육인적자원부 (2006). 영어 · 수학 교육과정 개정고시 (제 2006-75호,'06.8.29)에 따른 편찬상의 유의점 및 검정기준.

교육인적자원부 (2007) (http://www.moe.go.kr/). 개정 수학과 교육과정.

교육과학기술부 (2009) (http://cutis.mest.go.kr/). 2007년 개정 중학교 교육과정 해설서-수학.

교육과학기술부 (2011) (http://cutis.mest.go.kr/). 2009년 개정 수학과 교육과정.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2001). 수학 7-가. 서울: 고려출판

금종해 · 김창일 · 한길준 · 한철형 · 신송임 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 에듀왕

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김원경 · 조민식 · 김영주 · 김윤희 · 방환선 · 윤기원 · 이춘신 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 비유와 상징

김익표 (2008). 중학교 수학 수업에서 정수의 사칙계산 지도를 위한 직관적 모델의 역할에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, 11(1), 97-115.

김홍종 · 김홍종 · 계승혁 · 오지은 · 원애경 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 성지출판

박규홍 · 최병철 · 안숙영 · 김준식 · 유미영 (2009). 중학교 수학 1. 대구: 동화사.

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 육상국 · 박재용 (2001). 수학 7-가. 서울: 두레교육.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종 (2001). 수학 7-가. 서울: 교학사.

박영훈・여태경・김선화・심성아・이태림・김수미 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 천재문화.

박윤범・박혜숙・권혁천・육인선 (2001). 수학 7-가. 서울: 대한교과서.

박윤범・남상이・최소희・홍유미 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 웅진씽크빅.

박임숙 (2001). 실수 연산의 성질에 대한 고등학생의 인지 경향, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>. 40(2), 335-343.

박종률・유종광・이창주・홍분남・김덕진・박우량 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 도서출판 디딤돌.

배종수・박종률・윤행원・유종광・김문환・민기열・박동익・우현철 (2001). 수학 7-가. 서울: 한성교육연구소.

송근화・정윤석・유기종・우종옥・이홍기・이용경 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 새롬교육.

신항균 (2001). 수학 7-가. 대구: 형설출판사

양승갑・박영수・박원선・배종숙・성덕현・이성길・홍우철 (2001). 수학 7-가. 서울: 금성출판사.

우정호, 최병철 (2003). 음수의 교수현상적 연구, 대한수학교육학회지 수학교육연구 13(1), 29-55.

유병훈・이동원・이용완・김영호・이순호・박은옥・이종인・배수경・김형미・정주연 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 법문사.

유희찬・류성림・한혜정・강순모・제수연・김명수・천태선・김민정 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 대한교과서.

윤성식・조난숙・김화영・조준모・장홍월・김해경 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 더텍스트.

윤성재 (1992). 직관적인 음수지도방법에 관한 고찰, 대학수학교육학회논문집 2(1), 65-72.

윤재한・박진석・정낙영・이영철・이성재・윤장노・최준호・장인선 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 더 텍스트.

이강섭・왕규채・송교식・이강희・안인숙 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 도서출판 지학사.

이대현・김성국・김종남・박남미・육상국・임창우・박두일・신동선 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 두레교육.

이영하・허민・박영훈・여태경 (2001). 수학 7-가. 서울: 교문사.

이영하・홍정희・한동숭・오정현・김기연・원유미 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 교문사.

이준열・장훈・최부림・남호영・이상은 (2001). 수학7-가. 서울: 도서출판디딤돌.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미・임유원 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 천재교육.

장건수・고성화・김관중・김의석・안희정・이상윤・임중삼・장지경・정경숙・최승규 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 지구문화사.

전평국・신동윤・방승진・황현모・정석규 (2001). 수학 7-가. 서울: 교학연구사.

정광식・김정현・오종래・임윤영 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 대교.

정순영・권혁천・강운중・이환철・신지영・설정수 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 두산.

정창현・김창동・이상은・이치형・민정범 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 대교.

조태근・임성모・정상권・이재학・이성재 (2001). 수학 7-가. 서울: 금성출판사.

최병철・우정호 (2002). 음수의 본질과 형식적 접근에 의한 음수지도에 관한 고찰, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 4(2), 205-221.

최용준 (2001). 수학 7-가. 서울: 천재교육.

최용준・한대희・박진교・김강은・신태양・배명주 (2009). 중학교 수학 1. 서울: 천재문화.

황석근 (2008). 중학교 1학년 수학 검정 신청 교과서, 서울: 성안당.

황석근·이재돈 (2001). 수학 7-가. 서울: 한서출판사.

Frank Swetz; John Fauvel; Otto Bekken; Bengt Johansson & Victor Katz (1995). *Learn from the Masters*,

Washinton: The Mathematical Association of America.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in Science and Mathematics*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Educational Task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hungerford T. W. (1974). *Algebra*, New York: Springer.

Hungerford T. W. (1997). *Abstract Algebra: An introduction 2nd ed.* New York: Saunders College Publishing.

Isaacs I. M. (1994). *Algebra, a graduate course*, California: Brooks/Cole Publishing Company.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards For School Mathematics*, Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and Standards For School Mathematics*, Reston, VA: Author.

Rhonda Bailey; Roger Day; Patricia Frey; Arthur C. Howard; Deborah T. Hutchens; Kay McClain; Beatrice Moore-Harris; Jack M. Ott; Ronald Pelfrey; Jack Price; Kathleen Vielhaber & Teri Willard. (2006). *Glencoe Mathematics (Applications and concepts) Course1, Course2, Course3*. Glencoe: McGraw-Hill.

Randall I. Charles; Mark Illingworth; Bonnie McNemar; Darwin Mills; Alma Ramires & Andy Reeves. (2008). *PRENTICE HALL Mathematics Course1, Course2, Course3*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Ron Larson; Laurie Boswell; Timothy D. Kanold & Lee Stiff. (2007). *Mcdougal Littell MATH Course1, Course2, Course3*. Evanston: Houghton Mifflin Company.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of learning Mathematics*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

A Study on the Choice of Models for Teaching the Principle of Arithmetic Operations of Integers in the Middle School Mathematics Class

Kim, Ik-Pyo†
Department of Mathematics Education, Daegu University, Kyeongsan, Korea
E-mail : kimikpyo@daegu.ac.kr

Jung, Eun Hee
Department of Mathematics Education, Daegu University, Kyeongsan, Korea
E-mail : dmsgml@naver.com

The purpose of the study were to analyze teaching models of arithmetic operations of integers in Korean middle school mathematics textbooks of the first grade and Americans', from which we compare and analyze standards for choice of models of middle school teachers and preservice mathematics teachers. We also analyze the effect of the choice of teaching models for students to understand and appreciate number systems as a coherent body of knowledge. On the basis of that, we would like to find the best model to help students understand and reason the process of formulate the arithmetic operations of natural numbers and integers into the operation of the real number system. Furthermore, we help these series of the study to be applied effectively in the middle school mathematics class in Korea.

* ZDM classification : B53, D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Principle of operations of integers, Intuitive model, Formal view
† Corresponding author