韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2012. 11. 제 51권, 제 4호, 377-393.
J. KSME(Math. Edu) ISSN 1225-1380
November. 2012, Vol. 51 No. 4, 377-393.

일반화 과정과 그 정당화에서 '이해'의 완전성에 대한 연구
- 산술, 기하, 조화평균을 중심으로

김 창 수(경상대학교사범대학 부설중학교)

Ⅰ. 서론

초·중등학교 현장의 수업에서 많이 사용하는 단어 중 하나가 바로 이해라는 단어일 것이다. 수업 초기 어떤 개념을 학생들에게 설명한 후 교사는 "○○개념을 이해했나요?"라는 질문을 하고, 문제 해결 과정에서 "문제를 이해했나요?", "풀이를 이해했나요?"라는 질문을 하게 된다. 한 차시의 수업을 마치면서 "오늘 배운 내용을 이해했나요?"라는 질문을 하게 된다. 또 학생들이 궁금한 사항이 생길 때마다 교사에게 하는 말이 바로 "선생님 ○○가 이해가 안돼요?"이다. 이런 이유로 이해는 수학에서 처음과 마지막이며 전부라고 해도 과언은 아닐 것이다. 이처럼 수학 학습과정 어디에서나 듣고 말하게 되는 단어가 바로 이해이지만, 이해라는 단어를 사용할 때마다 뭔가 미심쩍은 기분을 떨칠 수가 없다. 그 이유는 이해되었는지를 물어보는 교사의 질문에 이해됐다는 학생의 답에도 정말 이해된 것인지를 확인하기란 쉽지 않기 때문일 것이다.

Hiebert(1986)는 수학학습에서 '단순히 수학을 가르치는 것이 아니라 이해를 목표로 가르치는 것은 참으로 복잡한 과정이다'라고 하였으며, Hiebert & Carpenter(1992)는 '수학교육에서 연구와 이에 병행하는 실행 목표는 이해를 동반한 학습을 증진 시키는 것에 기여해야 한다'고 하였다. 하지만 이해에 대한 연구는 다른 분야의 연구에 비해 상대적으로 많지 않으며, 이해의 연구들도 Skemp의 '도구적 이해'와 '관계적 이해'의 입장에서 스키마식 학습에 대한 연구(이상덕·김화수·김성숙, 2003 : 류근행, 2003 등)가 주를 이루고 있는 실정이다.

評林一榮은 이해의 본성 중 하나로 이해의 완전성은 상황이 변하면 변하는 것이라고 하였는데(류근행, 2004 재인용), 이것은 개념 학습에서의 이해, 문제 해결에서의 이해, 증명과정에서의 이해 그리고 일반화 과정에서의 이해는 주어지는 상황이 다르므로 서로 다르다는 것일 것이다. 이러한 다양한 상황마다의 이해를 구분하여 판단하는 것은 매우 어려운 일이며, 더욱이 그것을 완전하게 이해했다는 것은 더욱 판단하기 어려울 것이다. 그렇지만 이해했다면 분명 주어진 상황이 어떻든지 필요한 개념(혹은 성질)을 능수능란하게 운용할 수 있을 것이라는 점은 분명하다. 그러므로 결국 학습자가 무엇인가를 이해했다는 것은 주어진 상황 하에서 자신의 지식을 지혜롭고, 능수능란하며, 유연성 있게 적절하게 운영할 수 있는 상태를 나타낸다고 할 수 있을 것이다.

현행 중학교에서 기하영역에서는 간단한 일반화를 다루기는 하지만 산술영역에서는 일반화의 과정은 잘 다루지 않고 있다. 이런 이유로 산술영역의 학습은 개념(혹은 성질)을 학습하고 난 후, 그 개념(혹은 성질)과 관련된 문제풀이를 학습하고, 그런 다음 심화과정으로 학습한 개념(혹은 성질)을 일반화하는 순서로 지도하는 것이 보통이다. 그러므로 일반화와 그 정당화를 위한 개념(혹은 성질)의 이해는 그 개념(혹은 성질) 학습의 마지막 단계에서의 이해라 할 수 있을 것이다. 그러므로 일반화 과정과 그 정당화에서의 이해는 더 많은 지적 수준을 요구하는 것이라고 추측할 수 있다. 문제해결과정에서의 학습은 주로 개념(혹은 성질)을 암기하고 그 공식의 타당성을 이해하는 것에 집중된다면, 일반화는 그 개념이 가지고 있는 의미를 통해 주어진 개념(혹은 성질)을 음미하는 이해의 학습에 집중된다고 할 수

* 접수일(2012년 8월 2일), 수정일(2012년 9월 26일), 게재확정일(2012년 11월 21일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 이해, 일반화 과정, 정당화, 의미-표상

있겠다. 그러므로 일반화 과정과 그 정당화에서는 일반화 하고자 하는 개념(혹은 성질)의 단순한 공식의 암기와 타당성을 아는 것만으로 이루어지기 어려우며, 개념(혹은 성질)의 의미와 그 의미의 음미와 관련된 무언가가 이해를 위해 필요함을 알 수 있다. 또한, 학생이 완전히 이해하여 지식을 적절하게 운영할 수 있는 상태와 능력을 가졌다고 해도 적절한 운영 능력을 객관적으로 판단하기란 쉽지 않으며, 학생의 능력을 주관적인 추측에 의지하여 판단할 가능성이 높다.

그러므로 일반화 과정과 그 정당화에서 완전한 이해를 판단하기 위해서는 객관성 있는 판단근거가 필요하며, 객관성 있는 판단근거에 기반 하여 이해를 판단해야함을 알 수 있다. 따라서 일반화 과정 및 일반화의 정당화에서 이해는 학생이 개념(혹은 성질)에 대한 수학적 의미에 집중하여야 하며, 학생이 행하는 언어, 행동에 근거하는 학생의 표상[1]으로 판단 가능하리라 생각된다.

따라서 본 연구에서는 일반화의 과정과 그 정당화에서 개념(혹은 성질)에 대한 학생의 완전한 이해는 무엇을 근거로 판단할 수 있는지를 알아보는 것을 목적으로, 한 학생의 산술, 기하, 조화평균의 일반화 과정을 중심으로 살펴보았다.

본 연구의 목적을 달성하기 위해 다음의 연구 문제를 설정하였다.

- 산술, 기하, 조화평균의 일반화 과정과 그 정당화에서의 완전한 이해는 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경 및 용어의 정의

본 장에서는 이해에 대한 선행 연구자들의 견해를 살펴보고, 일반화와 관련된 연구들을 살펴본 다음, 정당화에 대한 기존의 연구들을 살펴보겠다. 그런 후, 본 연구에 필요한 용어를 조작적으로 정의하고자 한다.

1. 이해에 대한 제 연구

1) 지각 또는 기억에 근거하여 의식할 수 있게 된 관념 또는 심상(心像)을 나타내며, 물리적 표상(physical representation)과 정신적 표상(mental representation)으로 분류할 수 있다.

가. Brownell의 이해

Brownell은 수학을 이해 가능한 개념, 원리, 과정간의 긴밀한 체계로 보고 개념과 구조와의 관계를 중시하며 ‘의미의 이해’를 강조하였다. 류근행(2004)은 Brownell에게 이해와 의미는 본질적으로 동등하다고 말하면서, Brownell은 구체적으로 이해란 무엇이라고 정의 내리지는 않았지만 이해를 촉진 시키는 세 가지 방법으로 다음과 같이 소개하고 있다고 하였다.

첫째, 수학학습은 매우 복잡한 과정이다. 그러므로 아동들에 의한 발견이 강조되어야 한다.

둘째, 의미를 알기 위해서는 시간이 걸리므로 교수 속도를 고려해야 한다.

셋째, 관계를 강조해야한다.

또 評林一榮는 Brownell이 말한 이해의 본성에 대해 다음과 같은 여덟 가지를 제시하였다(류근행, 2004 재인용).

첫째, 학습자는 주어진 상황에 대해 스스로 행동하고 느끼고 지적으로 생각할 때 이해한다고 할 수 있다.

둘째, 이해는 전(全), 무(無)로 이분되는 것이 아니고, 완전성의 정도가 여러 가지로 변화는 것이다.

셋째, 이해의 완전성은 상황이 변하면 변하는 것이고 어떤 상황에 있어서도 요인의 수와 더불어 변해 가는 것이다.

넷째, 학생은 자신이 살고 있는 세계에 관해서는 물론, 그 세계에 관련된 기호에 대해서도 가치 있는 이해를 전형적으로 발전시키지 않으면 안 된다.

다섯째, 대체로 이해는 언어화해야 하지만 언어화할 때 상대적으로 의미가 결여되는 경우가 있다.

여섯째, 같은 것을 여러 번 반복하는 것 보다 여러 경험에 의해 이해가 발달한다.

일곱째, 성공적인 이해는 대부분 교사에 의해 사용되는 방법의 결과로써 발생한다.

여덟째, 학생의 이해 정도와 종류는 그가 행하는 언어, 행동을 관찰함으로써 추측될 수 있다.

나. Skemp의 이해

Skemp(1976)는 어떤 것을 이해하는 것은 그것을 적

당한 스키마에 동화시키는 것이라 하였으며, Stieg Mellin-Olsen이 이해를 두 가지 의미로 사용하는 것을 보고 관심을 갖기 시작하여, 이해를 관계적 이해와 도구적 이해로 구분하였다. 하지만 그도 그 이전에는 관계적 이해만을 이해로 간주해 왔으며, 관계적 이해만으로 설명할 수 없는 부분을 도구적 이해가 담당한다고 생각하였다. 이후 Byers & Herscovics(1977)의 이해에 대한 조직적인 분석에 동의하여, Skemp(1987)는 자신이 제시한 기존의 이해를 수정하여 도구적 이해, 관계적 이해, 논리적(형식적) 이해로 세 가지로 제시하였다. 그런 다음 그는 다시 기호 체계와 개념적 구조 사이에 일어나는 상호 동화 작용을 이르는 상징적 이해를 다시 추가하였다.

다. Byers & Herscovics의 이해

Byers & Herscovics(1977)는 Skemp의 모델과 맞지 않는 예를 발견하여 이것을 이해의 한 양식으로 받아들였다. 어떤 학생들은 규칙을 알고 있지도 않지만 추측만으로 답을 제시하기도 하고, 어떤 학생은 식을 써서 문제를 해결 하고자 하기는 하지만 옳지 않은 경우에 대하여, 전자를 직관적 이해로, 후자를 형식적 이해의 부족으로 보았다. 그래서 Byers & Herscovics는 Skemp의 이해(도구적 이해와 관계적 이해)에 위 두 가지를 첨가하여 다음의 4면체 구조로 이해를 정의하였다.

- 도구적 이해 : 그 규칙이 왜 작용하는지 모르고 기억된 규칙을 사용하여 문제를 해결하는 능력.
- 관계적 이해 : 보다 일반적인 관계로부터 특별한 규칙 또는 절차를 이끌어 내는 능력.
- 직관적 이해 : 문제의 적절한 분석 없이 문제를 해결하는 능력.
- 형식적 이해 : 수학적 기호와 표기를 수학 아이디어와 적절히 연결하고 논리적 추론을 하여 국소적으로 연역하는 능력.

라. Haylock의 이해

Haylock(1982)은 이해한다는 것은 '인지적 연계성을 구성하는 것으로 본다'고 정의하였으며, 이해의 정도와 유용성은 학습자가 새로운 경험과 선행된 경험 사이에서 구성하는 이해의 정도가 많을수록 더 크다고 하였다. 한편 새로운 경험이 선행 경험과 연결 되지 못하고 실패하는 경우, 새로운 경험은 고립되어 제한적인 상황에서 역할을 하지만 오래 지속되지 못하고 학습자의 머릿속에서 소실되는 운명에 처하게 된다고 하였다. 그는 이러한 학습을 '기계식 학습(rote learning)'라고 하였다.

마. Wiggins의 이해

Wiggins(1993)는 이해를 '특별한 혹은 다양한 상황에서 학습자가 지식을 지혜롭게, 능수능란하게, 유연성 있게 그리고 적절하게 운영하는 능력'이라고 정의하였다. 정인철(2003)은 Wiggins는 이해의 의미를 분석하기 보다는 제시된 상황에 대해 수학적 내용을 이용하여 문제를 해결하는데 중점을 두고 표현한 것이라 하였다.

바. 허경조의 이해

허경조(2008)는 이해에는 '친숙화로서의 이해'와 '사실의 인식으로서의 이해' 두 가지의 의미가 있다고 하였다. 그는 친숙화란 아직 모르는 개념이나 사실을 이미 알고 있는 개념이나 사실로 바꾸어 주는 것으로, 대기만성의 의미를 모르던 사람이 사전을 찾아보고 그 뜻을 알게 될 때가 친숙화의 예가 된다고 하였다. 또 사실 인식은 이전에 몰랐던 일반적인 사실 즉 규칙, 법칙, 규범, 공식 등이 어떻게 되어 있음을 깨닫게 되는 것이라고 하였다. 그 예로 모든 사각형의 내각의 합은 360° 임을 들고 있다.

이상에서 살펴본 것과 같이, 여러 연구자들은 이해에 대한 정의와 그들의 관점을 언급하였다. 이들의 연구는 이해를 정의하거나, 이해를 정의하지 않은 채 이해가 가지는 본성을 다루거나, 이해를 구분하기 위한 이해의 양식에 관한 연구였다고 볼 수 있다. 본 연구는 일반화 과정과 정당화라는 상황에서의 이해 여부를 무엇으로 판단할 수 있는가에 목적이 있으므로 Skemp나 Haylock의 이해의 정의보다는, Wiggins가 언급한 '특별한 혹은 다양한 상황에서 학습자가 지식을 지혜롭게, 능수능란하게, 유연성 있게 그리고 적절하게 운영하는 능력'으로 정의한 이해가 더 적절하다고 판단된다. 따라

서 본 연구에서의 이해의 정의는 Wiggins의 정의로 받아들여 사용하도록 하겠다.

2. 일반화와 일반화의 과정

Polya(1973)는 일반화를 어떤 주어진 하나의 대상에 대한 연구에서 그 대상을 포함하는 더 큰 집합에 대한 연구로 옮겨가는 것으로 정의하고 있다. 또 강완·백석윤(2007)은 다양한 형태의 수학적 개념이나 원리로부터 공통된 요소를 추출하여, 적용 폭을 확장시키고 보다 강한 추상성을 갖는 개념이나 원리로 발전시키는데 필요한 사고 과정으로 일반화를 보았으며, 정은실(1997)은 일반화하는 것은 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 주어진 대상을 포함하는 보다 큰 집합에 대한 고찰로 생각을 옮겨 일반적인 법칙을 이끌어 내는 것이라고 하였다. 김동근(2011)은 수학적 대상이나 현상 관계들로부터 공통된 특징, 즉 비교·대조를 통해 유사성을 인지함으로써 수학적 대상을 더 넓은 범위로 옮겨갈 수 있으며, 분석을 통해 수학적 본질, 즉 불변성을 추출함으로써 전체를 포함할 수 있는 수학적 사고라고 하였다.

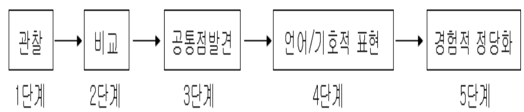
한인기(2006)는 일반화의 형태로 직접적인 지각에 근거하는 가장 단순한 형태의 일반화인 직접적 일반화와, 비교, 분석과 종합이 중요한 역할을 하는 간접적인 일반화로 구분하였으며, 간접적인 일반화는 경험적 일반화와 이론적 일반화로 나눌 수 있으며, 경험적 일반화에서는 비교가 중요한 역할을 하며, 현상이나 대상의 본질적인 것의 추출에 관련된 일반화가 이론적 일반화라고 하였다. 김남희(1997)는 일반화의 유형을 구체적인 대상들을 비교함으로써 얻어지는 경험적 일반화와 변수의 구성을 의미하는 이론적 일반화로 설명하고 있다. 이론적 일반화는 조작적 일반화, 혹은 구성적인 추상화로 불리기도 하며 이는 변수의 구성을 의미하는 것으로 설명된다.

이러한 일반화의 특성과 기능을 한명희(1980)는 다음의 <표 1>을 통해 설명하고 있다.

<표 1> 일반화의 특성과 기능

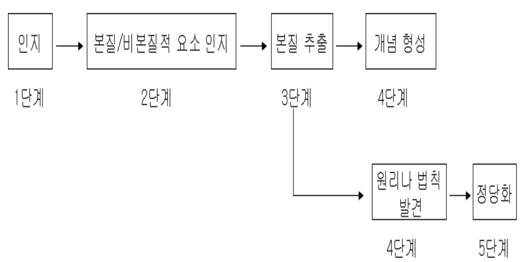
일반화의 특성	일반화의 기능
① 일반화는 개념과 개념간의 관계를 나타내는 진술이다.	① 일반화는 특별한 노력을 결론짓게 한다.
② 일반화는 시·공간적으로 보편적이어야 한다.	② 일반화는 새로운 가설을 발생시키는 기초를 마련한다.
③ 일반화는 과학적 절차를 거쳐 경험적으로 검증되어야하며 추론과 계량화에 기초하고 있다.	③ 일반화는 설명력을 갖는다.
④ 일반화는 논리적으로 정당화된다.	④ 일반화는 예언의 기능을 한다.
⑤ 일반화는 다른 법칙으로 도출될 수 있다.	⑤ 일반화는 과학적 이론을 수립하는 기본적 요소가 된다.

김동근(2011)는 경험적 일반화는 더 이상 발전될 수도 없고 일반화 될 수도 없다고 하면서, 경험적 일반화의 과정을 다음과 같이 도식화하였다.



<그림 1> 경험적 일반화 과정

또 그는 이론적 일반화가 일어나는 과정을 다음과 같은 도식으로 나타내었다.



<그림 2> 이론적 일반화 과정

이처럼 연구자들마다 비슷하지만 조금씩 다른 방법으로 일반화에 대해 정의하였다. 본 연구는 변량이 두 개인 경우의 산술, 기하, 조화평균을 n개의 변량에서의 평균을 구하는 것을 살펴보는 것이므로, 결국 주어진 대상의 집합을 그 대상을 포함하는 더 큰 집합으로 옮

겨 일반화의 결과물을 만들어내는 것으로 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 정은실이 정의한 '주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 주어진 대상을 포함하는 보다 큰 집합에 대한 고찰로 생각을 옮겨 일반적인 법칙을 이끌어 내는 것'으로 일반화의 정의를 받아들여 사용하도록 하겠다. 또 일반화 과정은 변량이 두 개인 경우의 산술, 기하, 조화평균의 공식을 n 개의 변량에 대한 평균 식으로 일반화하는 것이므로 비교나 관찰에 의한 일반화인 경험적 일반화라고 보긴 어려우며, 본질적인 것의 추출을 통해 일반화가 수행되므로 이론적 일반화라고 할 수 있겠다. 따라서 본 연구에서의 일반화 과정은 김동근의 이론적 일반화 과정을 의미하는 것으로 사용하도록 하겠다.

3. 정당화

가. 정당화의 의미

김정하(2010)는 수학적 정당화를 적당한 논리에 의해 추측이 참임을 자신 또는 다른 사람에게 확신 시키는 방법으로 정의하였다. 또 그는 여러 문헌을 검토한 후 명제가 참임을 자신 또는 다른 사람을 확신시키는 방식으로 사용되는 용어에는 증명(proof), 정당화(justification), 타당화(verification), 설명(explanation), 논증(argumentation) 등이 있다고 하였다. 이환철・하영화(2011)는 이 중 수학적 명제가 참임을 밝히는 가장 엄밀하고 형식적인 과정이 증명이며, 다양한 방법으로 명제가 참임을 설득시키는 과정을 증명의 한 분야로 포함한다면 증명의 포괄적인 의미로서 사용되고 있는 것이 '정당화'라고 하였다. Sowder & Harel(1998)은 정당화는 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라 심리학적인 의미에서 보다 포괄적인 관점에서 증명 개념을 지칭한다고 하였다.

나. 정당화의 유형

정당화의 유형을 어떻게 분류하는가는 연구자들마다 약간의 차이가 있으며 그 수준도 아주 다양하다. Harel & Sowder(2007)는 학생들이 사용하는 정당화를 외적 기반을 둔 증명 스키마, 경험적 증명 스키마, 연역적 증명 스키마의 3가지 유형을 제시하였다. 최남광(2008)은 정당화 유형을 선행연구의 분석을 통해 경험적 정당화와 연역적 정당화의 두 가지로 분류하는 경우가 있다고 하면서, 경험적 정당화는 몇 개의 예를 이용하거나 구체적인 경험에 주목하는 비형식적 방법이고, 연역적 정당화는 경험적이고 귀납적인 방법에 국한하지 않고 보다 일반적이고 형식적인 방법이라고 하였다.

송상헌・허지연・임재훈(2006)은 정당화 수준과 유형을 Balacheff와 Simon & Blume의 연구를 기반으로 하여 분류하는 틀을 다음의 <표 2>와 같이 제시하였다.

<표 2> 송상헌・허지연・임재훈의 정당화 분류 틀

수준	유형	설명	Balacheff의 정당화유형	Simon 과 Blume의 정당화 수준
1	외부적 정당화	외부의 권위(교사, 책, 이미 알고 있는 결과나 지식)을 빌려서 자신의 생각이 옳음을 설명함		외부의 권위에 호소
2	귀납적 정당화	구체적인 사례들의 공통된 성질이나 규칙을 귀납하면서, 추측, 확장하여 설명함(문자를 사용하지만 핵심 구조를 보지 못하는 경우를 포함)	활동적 증명	경험적 증거
3	포괄적 정당화	일반(포괄)적인 사례를 들어 연역적으로 설명함	지적 증명	일반적인 예
4	형식적 정당화	특수한 사례를 보조 수단으로만 사용하며, 문제의 핵심 구조를 바탕으로 기호를 사용하여 논리적으로 설명함.	지적 증명	연역적 정당화

또 이환철・하영화(2011)는 김정하(2010)의 수학적 정당화의 단계를 기준으로 다음과 같이 <표 3>으로 4개의 유형으로 분류하여 제시하였다.

<표 3> 이환철・하영화의 정당화 분류 틀

유형 구분	포함되는 정당화 유형	특징
유형1	지각적・활동적 정당화 평범한 예에 의한 정당화 결정적 예에 의한 정당화	예를 이용하여 그들 사이의 일반적인 속성을 찾아내거나 감각적 활동으로 직접해 봄으로써 정당화를 시도하는 경험적・귀납적 정당

		화이다.
유형2	포괄적 예에 의한 정당화 시각적 예에 의한 정당화	귀납적 사고 방법에 의해 정당화하지 않고 대표적인 예를 사용하여 연역적인 사고방법으로 설명해가는 정당화이다.
유형3	식의 조작에 의한 정당화 단순 연역적 정당화	논리적인 설명이 추가되어 있지 않지만 기호를 조작함으로써 정당화하거나, 하나 또는 그 이상의 정립되어진 전제로부터 결론을 연역하는 정당화이다.
유형4	가설 연역적 정당화 형식적 정당화	어떤 인정된 형식에 따라 논증하는 것, 즉 엄밀한 수학적 증명을 시도하는 형식적·이론적 정당화이다.

이처럼 연구자들마다의 조금씩 다르게 정의되는 정당화의 의미를 본 연구에서는 형식적인 증명이라는 좁은 의미에서가 아니라 심리학적인 의미에서 보다 포괄적인 관점으로 다루도록 하겠다. 따라서 수학적 정당화의 의미를 김정하의 입장과 같이하여, 적당한 논리에 의해 추측이 참임을 자신 또는 다른 사람에게 확신시키는 방법으로 정의하여 사용하도록 하겠다.

4. 용어의 정의

가. 의미-표상과 일반화를 위한 의미-표상

개념학습, 문제해결 또는 일반화 과정 및 그 정당화에서 요구되는 학습자의 이해에는 학습자가 구성한 올바른 표상을 적절한 상황에서 유용하게 활용할 수 있는 능력과 관련된다고 할 수 있다. 학습자의 표상을 통한 이해의 판단은 주관적인 이해의 판단에 어느 정도의 객관성을 확보해 줄 수 있을 것이다. 이런 이유로 어떤 개념(또는 성질)에 대한 다양한 학습자의 표상 중에서, 주어진 개념 (또는 성질)을 특정한 상황 하에서 능수능란하게 활용할 수 있는 수학적 의미를 학습자에게 부여하는 표상을 '의미-표상[2]'이라 조작적으로 정의하여 사용하겠다.

이러한 의미-표상은 문제 해결과정 뿐만 아니라 일반화 과정에서도 중요한 역할을 하게 됨은 너무도 당연하다. 일반화의 옳고 그름에 대한 판단은 작은 집합에서의 수학적 의미를 더 큰 집합으로 확장했을 때에도 그대로 수용하고 있는지를 통해 알 수 있을 것이다. 그러므로 일반화의 정당화에서도 의미-표상은 중요한 역할을 하게 됨은 알 수 있다. 이러한 의미-표상 중에서 일반화 과정과 정당화가 가능하도록 하는 의미를 나타내주는 표상을 특별히 '일반화를 위한 의미-표상'이라고 정의하여 사용하겠다.

전체집합 U와 집합 A가 주어졌을 때, A^c을 구하는 예를 의미-표상과 일반화를 위한 의미-표상의 관점으로 살펴보자.

먼저 A^c에 대해 학생들이 쉽게 구성할 수 있는 표상으로는 'A의 원소가 아닌 것들의 집합', '벤다이어그램에서 집합 A 밖에 있는 원소의 집합' 등이 있을 수 있다. 이러한 표상을 구성하는 것만으로도 학생들은 충분히 A^c을 구해낼 수 있으며, 다양한 문제해결에도 충분히 활용 가능할 것이다. 이것으로 문제해결을 위한 의미-표상은 충분히 구성된 것으로 판단할 수 있지만, A^c을 퍼지집합[3]으로 일반화하고자 한다면 위에서 언급한 표상만으로는 큰 어려움에 봉착하게 될 것은 당연하다. A^c을 퍼지집합으로 일반화하기 위해서는 '전체집합 U의 원소 중 A에 대한 진리 값이 0인 원소의 집합' 또는 '집합 A와의 합집합이 전체 집합이 되는 집합 중 가장 작은 집합' 등과 같은 일반화를 가능하게 하는 수학적 의미를 학습자에게 부여하는 표상이 필요하게 된다. 따라서 A^c을 퍼지집합으로 일반화하기 위한 일반화를 위한 의미-표상은 '전체집합 U의 원소 중 A에 대한 진리 값이 0인 원소의 집합' 또는 '집합 A와의 합집합이 전체 집합이 되는 집합 중 가장 작은 집합' 등이 될 수 있겠다.

나. 완전한 이해

본 연구에서 이해를 Wiggins가 언급한 지식을 다양한 상황 하에서 지혜롭게, 능수능란하게, 유연성 있게 그리고 적절하게 운영하는 능력으로 이해를 정의하여

2) 표상에 대한 다양한 논의는 많은 연구에서 진행 되었으나, 본 연구에서는 표상의 역할(개념의 구조를 보여주거나 문제해결 전략을 보여 주는 것 등)중에서 의미를 나타내는 표상을 의미-표상으로 사용함.

3) 더 자세한 퍼지집합에 대한 내용은 N. Palaniappan(2005)의 Fuzzy Topology를 보라.

사용하더라도, 이해는 그 용어의 모호성으로 인해 주관(主管) 또는 추측에 의지하여 이해 여부를 판단할 수밖에 없을 것이다. 이처럼 학생이 무언가를 이해했는지의 결정에서 객관성을 확보하기는 쉽지 않으며, 무엇을 알아야 이해했다고 할 수 있는지 단언할 수 있는가는 결코 쉬운 일이 아닐 것이다.

그러나 이러한 이해에 대해 Brownell은 이해의 정도와 종류는 그가 행하는 언어, 행동을 관찰함으로써 추측될 수 있다고 하였으며, 의미와 이해는 본질적으로 동일하다고 하면서 이해에서 의미의 중요성을 강조하였다. 이런 이유로 학생의 이해 여부의 판단은 학생의 언어와 행동인 표상을 통해 이루어질 수 있으며, 개념(혹은 성질)이 가지는 의미를 정확히 파악했는지를 통해 가능함을 알 수 있다. 그러므로 완전히 이해했다는 것을 판단하기 위해서는, 이해를 판단할 만한 객관적인 표상을 보이는가와 개념(혹은 성질)에 대한 본질적 의미를 올바르게 파악했는지 확인 가능한가에 의해 판단될 수 있을 것이다.

따라서 선행 연구자들이 정의한 이해와 구별하여, 일반화 과정과 그 정당화에서 능수능란하게, 유연성 있게 그리고 적절하게 운영하는 능력인 이해를 객관적으로 판단 가능한 표상을 가지고 개념(혹은 성질)의 본질적 의미를 올바르게 이해했을 때 '완전한 이해'라고 정의하여 사용하겠다.

Ⅲ. 연구의 실제

본 장에서는 학생의 실태와 연구를 수행하기 위한 산술, 기하, 조화평균과 관련된 [연구의 문제] 그리고 연구의 절차를 살펴보고자 한다. 그런 다음 학생과 이루어진 면담을 통해 학생이 수행한 일반화와 그 정당화를 간략히 분석해 보고자 한다.

1. 학생의 실태

본 연구에서의 학생은 현재 경남 진주시 ○○중학교 3학년에 재학 중인 남학생으로, 중학교 1학년 까지 영재교육 대상자로 영재교육원(지역교육청)을 수료하였으며, 1, 2학년에서는 본교에서 실시하는 영재학급에서 수학을 공부한 학생이다. 학생은 성격이 온순하며, 차분하고, 생각하기를 좋아하며, 자신의 생각을 조리 있게 설명할 수 있는 학생이다. 학생과 면담자는 1학년 때 학교 영재학급에서 수업을 함께한 경험이 있는 학생으로 서로 간에 충분한 래포(Rapport)가 형성되어 있었으며, 꾸준히 그 관계를 지속해 온 사이였다.

학생은 이미 영재학급에서 산술평균과, 기하평균, 조화평균의 개념에 대해 배웠으며, 변량이 두 개인 각 평균을 다루는 문제해결에 대한 학습도 이미 이루어졌다. 또한 학생은 영재학급에서 일반화에 대한 기본적인 학습을 받았으며, 일반화를 직접 실행해 본 경험도 가지고 있었다. 본 [연구의 문제]인 산술, 기하, 조화평균은 현행 중학교 교육과정에는 지도되지 않는 내용이므로 산술, 기하, 조화평균의 기본적인 학습이 이루어진 대상자가 필요하였으며, 위 학생이 본 연구를 위해 적절하다고 판단하여 대상자로 선정하였다.

2. 연구의 문제

본 연구를 수행하기 위해 다음의 산술, 기하, 조화평균에 대한 [연구의 문제]를 다음과 같이 선정하였으며, 산술, 기하, 조화평균의 일반화 과정과 그 정당화를 어떻게 수행하는 지를 알아보기 위해 학생에게 투입하였다.

[연구의 문제] 임의의 두 수 a, b의 산술평균, 기하평균, 조화평균은 각각 $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2ab}{a+b}$이다. 이때, a, b, c의 산술평균, 기하평균, 조화평균의 식을 구하고, 임의의 n 개의 수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 각각의 평균 식을 유도하여라.

3. 면담의 실제

산술, 기하, 조화평균의 일반화를 학생은 어떻게 수행하는가? 무엇을 근거로 일반화가 제대로 수행된 것인지를 판단하는가를 알아보기 위해 모두 3차례의 면담을 실시하였다. 본 연구를 위한 면담은 정규 수업과 자율

학습 사이의 15분간의 청소 시간을 활용하여 수학실에서 청소를 빨리 끝내고 남는 시간 5~10분씩 3일에 걸쳐 이루어졌다. 면담을 실시한 수학실은 Z자형 건물의 3층 맨 끝에 위치하여 교실과는 동떨어져 있어 학생들이 잘 다니지 않아 평소에도 소란하지 않다. 또 수학실은 수학 시간에만 활용되는 교실로 청소할 것도 별로 없는 공간이다. 이런 이유로 청소시간은 많이 걸리지 않으며 청소가 이루어진 후에도 면담을 실시할 수 있을 만큼의 충분한 정숙과 분위기가 조성될 수 있다. 또 일반화를 수행하는 과정 대부분은 가정에서 학생 혼자의 힘으로 이루어졌으며, 수학실에서 이루어진 면담은 학생이 수행한 일반화에 대한 학생의 사고 과정만을 알아보는 것이므로 많은 시간이 또한 필요하지 않았다.

또 기하, 조화평균에 대한 사전의 학습 내용을 잊어버렸는지 확인하기 위해 첫 번째 면담 이후에 한 차례 별도의 면담을 실시하였다.

이 면담 내용에 대한 기록은 학생의 양해를 구해 대화를 면담자가 노트에 기록하고 타이핑하였으며, 지도의 내실을 기하기 위해 정리된 내용을 가지고 학생과 면담자가 서로 의견을 나누었다. 또 면담 내용은 면담 과정의 전체적인 흐름과 학생의 변화 상태를 쉽고 명확하게 파악할 수 있게 하기 위해 언급의 필요성이 비록 적어도 빠짐없이 기록하였다.

첫 번째 면담은 연구에 대한 학생의 생각이 어떠한가와 [연구의 문제]를 제시하기 위해 실시되었으며, 그 내용은 다음과 같다.

면담자 : ○○아 요즘 수학 공부는 어떤 걸 하고 있니?

학생 : 요즘은 과학 쪽으로 집중하고 있어서 특별히 수학 공부는 하지 않고, 학교 교육과정 상의 공부만 하고 있어요.

면담자 : 아니 수학 공부는 하지 않는다고!!

학생 : 아니요 경시대회나 선행을 하지 않는다고요.

면담자 : 그래! 그럼 나와 하루에 5분씩만 시간을 내어 공부해 볼까?

학생 : 좋죠.(눈을 크게 뜨고 힘이 있는 목소리)

면담자 : 그럼 혹시 산술, 기하, 조화평균에 대해 배웠던 거 생각나니?

학생 : 배운 것은 알겠는데 식이 잘 기억나지는 않아요.

면담자 : 자 그럼 이 문제를 한 번 보렴.

(문제를 보여주고, 문제를 읽고 난 후)

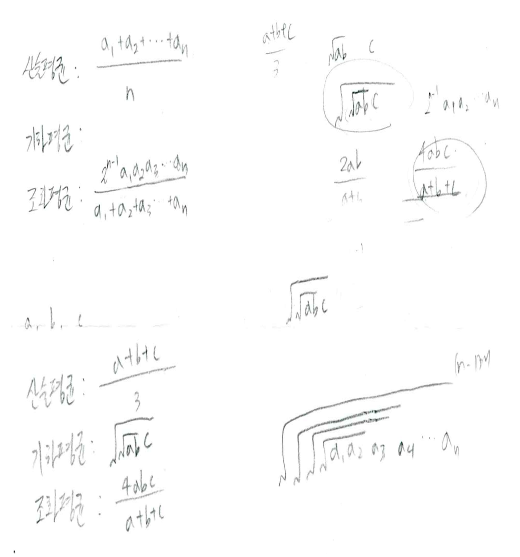
학생 : 그래요!! 이제 생각나네요.

면담자 : 그래 문제는 이해가 되니?

학생 : 예, 재미있겠는데요(꽤 흥미 있어 하는 표정을 지음).

면담자 : 그럼 변량이 세 개일 때의 경우를 먼저 해볼까?

(잠깐 고민 하더니 다음과 같이 적었다.)



<그림 3> 첫 번째 면담에서의 학생 답안

- 자율학습 시간 종이 울려 첫 번째 면담을 마치고, 다음날 만나기로 하고 헤어짐.

첫 번째 면담에서 학생은 오랜만에 교육과정을 벗어난 수학 학습에 흥미를 보이며 강한 자신감을 나타내고 있었다. 면담의 처음에는 갑작스런 [연구의 문제] 제시로 인해 당황해 할 것을 우려하여 학생의 일상에 대한 질문으로부터 접근하였으며, 그러한 일상적인 접근을 통해 최대한 자연스럽게 학생에게 [연구의 문제]를 제

시하고자 하였다.

학생은 첫 번째 면담 전반(全般)에서 일반화에 대한 강한 자신감을 보이고 있으며, 그러한 자신감으로 인해 깊은 고려 없이 문제를 이해한 후 곧바로 문제 풀이를 시도 하였으며, 큰 고민 없이 적어 나가는 모습을 보였다.

첫 번째 면담을 마치고, 면담 초반에 기하평균과 조화평균에 대해 잘 기억하지 못하고 있었다는 점이 우려되어 사전에 준비한 다음의 문제를 통해 문제해결을 성공하는지를 확인하였으며, 그 결과 완벽하게 풀이에 성공함을 알 수 있었다.

"어느 도시에 인구가 첫해에 4배 증가하였고, 두 번째 해에 다시 25배 증가했다고 한다. 각 해의 평균 증가 비율을 구하시오."

"영철이가 40km의 거리를 학교에 등교할 때 시속 40km로 달리고, 하교 때는 시속 60km의 속력으로 달렸습니다. 평균 속력을 구하시오."

두 번째 면담은 첫 번째 면담의 마지막에 학생이 적었던 내용이 무엇을 의미하는지와 일반화는 무엇을 근거로 수행하는지 그리고 일반화가 수행된 후 일반화의 정당화를 어떻게 확인하는지를 알아보기 위해 실시하였으며, 그 내용은 다음과 같다. 면담 과정에서는 수식이 길어 정확하게 수식을 읽지 않고 '이것', '저것'으로 말한 것을, 정확성을 위해 수식을 적어 나타내었다.

면담자 : 어제 니가 적은 것을 가지고 이야기 해볼까?

면담자 : 먼저 기하평균을 $\sqrt{ab}$, c를 적은 후 $\sqrt{\sqrt{ab}\,c}$ 라고 적었는데 왜 그렇게 적었지?

학생 : 저는 두 개가 주어졌을 때 기하평균이 $\sqrt{ab}$ 인 것을 알고 있으므로, 또 다른 하나 c와의 기하평균을 구하면 $\sqrt{\sqrt{ab}\,c}$ 이잖아요.

면담자 : 그게 무슨 말이니? 다시 설명해 줄래?

학생 : $\sqrt{ab}$ 를 A라고 하고 c를 B라고 하면 A와 B 평균을 구하는 것이므로 $\sqrt{\mathrm{AB}}$ 잖아요. 그래서 $\sqrt{\sqrt{ab}\,c}$ 예요.

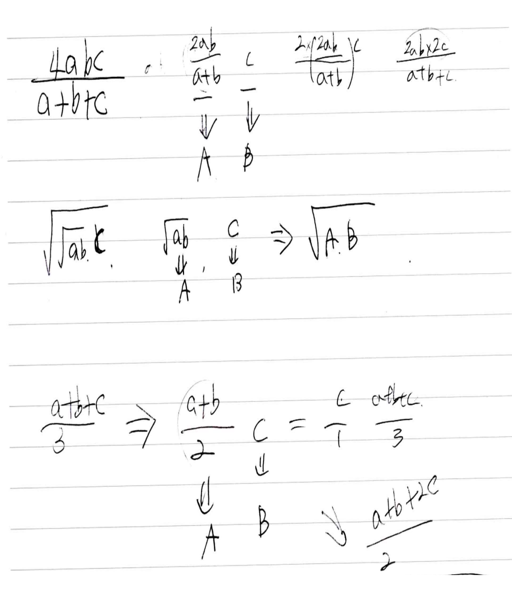
면담자 : 그렇구나. 그럼 조화평균은 $\dfrac{4abc}{a+b+c}$ 라고 적었잖니. 이건 왜 그렇지?

학생 : 두 개가 주어지면 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 잖아요. 그러니까 거기에 c가 하나 더 들어가니까 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 를 A라고 하고 c를 B라고 하면 $\dfrac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ 이니까 식은 $\dfrac{2\times(2ab)c}{(a+b)+c}$ 이고요. 정리하면 $\dfrac{4abc}{a+b+c}$ 이잖아요.

면담자 : 그렇구나. 그럼 산술평균은 왜 $\dfrac{a+b+c}{3}$ 인지 설명해 줄래.

학생 : 이건 우리가 잘 알고 있잖아요.

면담자 : 그럼 n 개로 확장된 식은 왜 그렇게 되지?



<그림 4> 두 번째 면담에서의 학생 답안

학생 : 산술평균은 잘 알고 있듯이 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 이

고요. 조화평균은 $\frac{2^{n-1}a_1a_2\cdots a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 이고요. 기하평균은 음.... (한참 고민 후) $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\,a_3}\cdots}\,a_n}$ (실제 문제풀이에서 이것은 다른 평균 식과 달리 나중에 씀)가 되겠군요.

면담자 : 왜 그렇게 된다고 생각하지?

학생 : 두 개일 때와 세 개일 때의 확장되어 가는 모습을 보면 알 수 있잖아요. 결국 일반화하라는 문제이니까. 모양이 비슷하게 될 거 아니에요. 그러니까 이렇게 된다는 것을 알 수 있어요.

면담자 : (깜짝 놀라며) 너는 이 문제가 일반화 하는 문제인거를 알고 있구나!

학생 : (목소리에 힘이 더 실리며)그럼요.

면담자 : 그럼 니가 n 개로 확장한 식이 원래의 식에서 제대로 일반화된 것인지 아닌지를 어떻게 알 수 있을까?

학생 : 여러 가지 값을 넣어 보고 이상하면 일반화가 잘못된 것이고, 별 이상 없으면 제대로 일반화 한 것이지요.

면담자 : 그럼 니가 구한 식을 그 방법으로 한번 확인해 볼래.

학생 : (갑자기 풀이 죽은 목소리로) 뭐가 잘못 됐나요?(혼자 중얼 중얼) 이건 잘못 된 거 같아요.

면담자 : 아니 왜?

학생 : 기하평균과 조화평균은 평균의 평균을 구했어요?

면담자 : 평균의 평균이라니?

학생 : 먼저 두 개의 평균을 구한 후, 그것과 c와의 평균을 구했어요.

면담자 : 그럼, 그게 잘못된 거니?

학생 : 예, 평균과 평균의 평균은 다르니까요.

면담자 : 그래, 그럼 산술평균은 올바른 거니?

학생 : 예, 그건 우리가 잘 알고 있는 거잖아요.

면담자 : 그럼 다시 한 번 기하평균과 조화평균을 구해볼까?

학생 : (목소리가 작아지며) 선생님 사실 저… 기하평균과 조화평균이 뭔지 모르겠어요.

면담자 : 모르다니?

학생 : 그냥 식은 알겠는데, 무슨 뜻인지는 잘 모르겠어요?

면담자 : 그냥 식을 안다는 말은?

학생 : 사실 처음에는 기하와 조화평균의 식이 잘 기억나지 않아서 잘 몰랐는데, 선생님이 가르쳐 주셔서 알긴 알겠는데… 그 식이 의미하는 그런 거 있잖아요. 그걸 모르겠어요.

면담자 : 그럼 그걸 가르쳐 주면 일반화 할 수 있겠니?

학생 : (힘차게) 예

면담자는 학생에게 조화평균은 최지영(2007) 논문의 내용을 참고하여, 피타고라스가 음의 높이와 현의 길이와의 관계를 이용하여 두 현에서 음의 높이의 평균이 되는 현의 길이를 구하는 것으로 설명하였으며, 기하평균은 기하평균의 물리적 의미인 가로와 세로의 길이가 a, b인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 나타내는 것으로 의미를 설명해줌.

학생 : 이제 알겠어요.

면담자 : 그럼 이제 일반화 할 수 있겠니?

학생 : (맑은 표정으로) 내일까지 해오겠습니다.

면담자 : 그러렴.

학생은 두 번째 면담의 전반(前半)부에서도 전날의 면담과 같이 강한 자신감을 보이고 있었으며, 자신의 풀이에 오류가 있을 것이라고는 생각하지 않는 듯 보였다. 학생은 변량이 세 개인 경우의 기하평균과 조화평균 모두에서 변량이 두 개(a, b)의 평균을 먼저 구한 후, 세 번째 변량(c)과 두 개의 평균을 다시 평균을 구하는 방법으로 구했다. 하지만 산술평균은 기존의 잘 알고 있다는 이유로 자신이 수행한 일반화가 옳은지를 확인해보고자 하는 의사는 전혀 보이지 않았다. 이는 지금까지 자신이 잘 알고 있는 내용에 관해서는 분명하므로 확인과정은 필요 없다고 생각하는 듯 보였다. 하지만 기하평균과 조화평균의 일반화를 학생이 말한 평균의 평균을 구하는 방법으로 수행 했다면, 산술평균을 구하는 방법 또한 일치하여야 하지만, 학생이 알고 있는 산술평균의 식은 전혀 확인해 보지 않았다. 더욱이 n 개의 변량에 대한 각 평균의 일반화 과정에서는, 변량이 두 개일 때와 세 개일 때의 변화 모습을 보며 각

평균 식의 외형적 일반화 과정을 보였다.

하지만 일반화 과정과 정당화에 대한 면담자의 질문에 학생은 자신이 제시한 답에 뭔가 잘못된 점이 있음을 느끼고 잠시 확인하는 모습을 보인 후, 자신의 잘못을 인정하였다. 이것은 학생은 자신이 행한 일반화가 옳다고 생각하고 있다가 정당화를 요구하는 면담자의 질문으로부터 잘못된 일반화임을 인식한 것으로 보인다. 이러한 학생의 행동으로부터 잘못된 일반화는 일반화 결과를 정당화하는 과정에서 발견 될 수 있으며, 정당화가 일반화의 과정에서 매우 중요한 역할을 하게 됨을 보여주는 것이다. 그런 다음, 학생은 일반화를 위해 조화평균과 기하평균의 수학적 의미가 필요함을 인지하고 면담자에게 수학적 의미를 요구하였다. 이는 학생이 문제해결에서 필요한 각 평균에 대한 표상과는 다른 일반화를 위한 표상의 구성이 요구됨은 인식한 것으로 보인다.

면담자는 학생의 요구로 조화평균과 기하평균의 의미를 학생에게 설명하였다. 면담자의 설명을 듣고 난 후 학생은 다시 일반화에 대해 강한 자신감을 보였다.

세 번째 면담은 학생이 일반화는 무엇을 근거로 수행하는지와, 수행한 일반화의 정당화는 무엇을 근거로 판단하는지를 알아보기 위해 실시하였다. 세 번째 면담 과정에서도 두 번째 면담과 마찬가지로 '이것', '저것'으로 말한 것을, 정확성을 위해 수식을 적어 나타내었으며, 그 내용은 다음과 같다.

학생 : (만나자 마자 학습지를 불쑥 내밀며)선생님 다 해왔어요.

면담자 : 그래, 고생했구나. 어디 볼까?

학생 : 예

면담자 : 어제와는 많이 달라졌네. 왜 그렇게 일반화 되는지 설명해 줄래?

학생 : 어제 선생님이 말씀하신 기하평균과 조화평균의 설명으로 기하평균은 육면체의 부피를 가지고 생각하면 되므로 abc의 세제곱근, 근데 이건 기호로 어떻게 쓰는지를 몰라 그냥 말로 적었어요. 이걸 n개로 확장하면 $a_1a_2a_3\cdots a_n$의 n 제곱근이 되겠죠?

면담자 : 그렇지.

학생 : 조화평균은 두 개일 때 $\dfrac{1}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\times\frac{1}{2}}$이니까,

세 개는 $\dfrac{1}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\times\frac{1}{3}}$이 되고, 그래서 $\dfrac{3}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$이예요. 그리고 n개는 $\dfrac{n}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})}$이겠죠.

면담자 : 그렇구나. 멋진데! 그런데 세 개에서 n개로 늘어날 때는 어떻게 그렇게 되는지 알 수 있지?

학생 : 어제 말씀하신 그것과 같잖아요.

면담자 : 어제 말한 변량이 두 개인 경우의 각 평균의 의미를 말하는 구나?

학생 : 그렇지요. 그것과 똑 같은 뜻이잖아요. 그래서 이번 것은 맞아요.

면담자 : 그런데, 그것만으로 옳게 일반화 되었다는 것을 확신할 수 있을까?

학생 : 몇 개의 값을 넣어보고 옳은지, 틀렸는지 봐야지요.

면담자 : 그래, 그럼 이번 것은 제대로 일반화 된 것이지?

학생 : (확신에 찬 목소리로)예 맞아요. 집에서 제가 확인해 봤어요!

면담자 : 몇 개의 값을 정해서 계산해 보니 그 값이 정확하더라는 말이지?

학생 : 예!

면담자 : 그럼 그 값들을 어제 구한 평균에 넣어보면 정확하지 않니?

학생 : 예, 아뇨(당황해 하며) 그 평균들도 값이 나오는데?

면담자 : 니가 값이 정확하다는 말은 평균값이 구해지더라는 말이었구나?

학생 : 예(풀 죽은 목소리로)

면담자 : 그럼 그 평균도 제대로 일반화 된 것이네.

학생 : 아뇨, 그건 잘못되었어요.

면담자 : 왜 그건 잘못되었다고 생각 하는데.

학생 : 설명은 못하겠는데, 어제건 분명 잘못되었고 이번 것이 정확해요.

면담자 : 니가 그렇다면 그렇겠지만 그걸 어떻게 알 수 있을까? 난 그게 궁금한데.

학생 : (갑자기 뭔가 생각이 난 것처럼) 선생님 피타고라스의 정리는 그럼 제대로 된 것인지 아닌지를 어떻게 알 수 있어요?

면담자 : 피타고라스의 정리는 논리적 절차를 통해 그 명제가 참인지 아닌지를 증명이라는 과정을 통해 알 수 있게 되는 거지. 그런데 이건 일반화의 문제이니 일반화가 잘 된 것인지 아닌지를 증명을 통해 알기는 어렵지 않을까?

학생 : 그렇네요.(다시 풀이 죽으며)

면담자 : 그럼 다시 한 번 물어 볼께? 어제 니가 구한 평균 식은 잘 일반화가 된 것이니?

학생 : 아니에요. 확신하는데 어제건 틀렸고 오늘 건 맞아요.

면담자 : (갑자기 학생이 생각하는 일반화가 무엇인지 궁금해서) 그런데 너는 일반화가 무엇이라고 생각하니?

학생 : 몇 개의 값에서 만족하는 것을 더 많은 것에서도 만족하게 만드는 거요.

면담자 : 그렇지! 그럼 어제건 두 개에서 만족되는 것이 세 개일 때는 만족되지 않니? 값은 구해지는 것 같은데.

학생 : 되죠.

면담자 : 그럼, 그것도 일반화된 거 아닌가?

학생 : 그건 아니에요. 확신해요.

면담자 : 그래? 그럼 왜 그건 아니라고 확신하는데.

학생 : (잠시 생각 후에) 그건 두 개 때의 평균은 가운데 값이지만 세 개 때의 평균은 평균의 평균이니까 맞지 않아요.

면담자 : 그렇구나.

학생 : (확신에 찬 목소리로) 아 일반화가 제대로 된 거는 처음의 의미를 그대로 가지고 있는 거고요, 틀린 건 의미가 없는 거예요.

면담자 : 어제건 그럼 그 의미가 없다는 거구나?

학생 : 예 어제는 확실히 의미가 없고요 오늘 건 의미가 있어요.

면담자 : 그래 그렇구나. 그럼 일반화가 잘된 것 인지 아닌지를 어떻게 알 수 있을까?

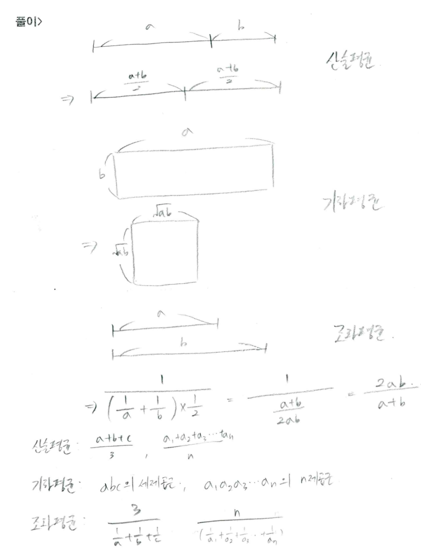
학생 : 의미가 있느냐? 없느냐?로 판단하면 되죠.

면담자 : 그래! 일반화가 잘된 것인지 잘못된 것인지는 의미가 살아 있느냐? 없느냐?로 판단하면 되는 것이란 말이지.

학생 : 예

면담자 : 그래, 수고했다.

학생 : 선생님 감사합니다.



<그림 5> 세 번째 면담에서의 학생 답안

세 번째 면담에서 학생은 답안에 변량이 두 개일 때의 조화평균과 기하평균의 의미를 그림으로 나타내었으며, 면담에서도 변량이 세 개일 때의 경우에서 육면체를 이용하여 기하평균을 설명하였다. 이를 통해 학생은 기하, 조화평균의 일반화를 위한 의미-표상이 구성된 것으로 판단된다. 이러한 일반화를 위한 의미-표상의 구성을 바탕으로 학생은 일반화에 성공하였으며, 학생은 의미라는 용어를 사용하여 일반화 전의 개념에 대한 의미-표상과 일반화의 결과가 일치하는지와 그렇지 않느냐에 의해 정당성을 판단할 수 있다고 설명하였다.

면담의 과정에서 논리적 증명과 일반화의 정당화 방법에 대해 착오를 보이긴 하였지만, 두 번째의 면담에서와는 달리 일반화가 제대로 된 것인지 아닌지를 묻는 질문에 강한 자신감을 보이며 의미의 일치를 통해 판단할 수 있음을 언급하고 있다.

4. 분석

학생은 첫 번째 면담에서 기하, 조화평균을 학습한지 오래되어 잘 기억하지 못하고 있다가, 면담자가 [연구의 문제]를 제시하는 순간 바로 기억해 내었다. 또 한 차례의 추가 면담에서 기하, 조화평균에 관한 문제를 그 자리에서 곧바로 해결하였다. 이것으로 학생은 주어진 문제해결을 위한 기하, 조화평균에 대해 이해가 충분히 이루어진 것으로 판단된다. 또한 이것으로 학생은 주어진 문제해결을 위한 의미-표상도 충분히 갖춰져 있는 것으로 추측할 수 있다.

그러나 두 번째 면담에 가져온 학생의 [연구의 문제]의 답은 면담자가 전혀 예상하지 못한 것이었다. 그는 산술평균을 제외하고는 기하, 조화평균에서 평균의 평균을 구하는 것을 볼 수 있었으며, 이러한 일반화가 옳은 것인지에 대한 판단도 쉽게 결정짓지 못하는 모습을 보였다. 또한 산술평균의 일반화 결과는 이미 잘 알고 있다는 이유로 확인조차 시도하지 않았다. 이러한 학생의 행동 때문에 면담자는 학생이 일반화가 무엇인지 모르는 것이 아닌가 하는 의심을 하였으나, 학생은 면담 도중에 스스로 일반화라는 용어를 사용하였으며, 심지어 [연구의 문제]가 일반화하는 문제인지도 알고 있었다.

학생은 산술평균의 일반화 과정에서는 외형적 일반화 과정만을 고집하였지만 일반화는 분명히 성공하였다. 이것을 변량이 두 개일 때의 산술평균에 대한 지식을 능수능란하게 그리고 적절하게 n 개일 때의 상황에서 이용했다는 입장에서 보면 분명 일반화에 성공했으므로, 일반화를 위한 이해가 이루어진 것으로 판단할 수 있다. 하지만 객관적으로 확인할 수 있는 산술평균의 일반화를 위한 의미-표상과 본질적 의미의 이해를 찾을 수 없으므로 일반화 과정에서의 완전한 이해라고 판단하기는 어려울 것이다. 이러한 학생의 산술평균의 일반화 과정에서의 이해는 분석과정이 없이 경험에 의지하고 있으므로 Byers & Herscovics(1977)가 언급한 직관적 이해에 해당된다고 할 수 있겠다.

학생은 기하, 조화평균의 일반화 과정에서 자신이 행한 일반화가 잘못된 것임에도 불구하고 옳은 일반화라고 믿고 있었으며, 면담자의 질문으로 옳지 못한 일반화임을 인지하게 되었다. 이러한 학생의 이해는 Byers & Herscovics(1977)이 언급한 형식적 이해의 부족으로 설명 가능하겠다.

또 기하, 조화평균의 일반화 시도 후의 정당화 방법을 묻는 면담자의 질문에 학생은 여러 가지 값을 넣어보면 알 수 있다고 하였다. 이러한 학생의 정당화의 유형으로는 송상헌・허지연・임재훈의 분류에 의하면 외부적 정당화 또는 귀납적 정당화의 시도로 볼 수 있으며, 이환철・하영화의 분류에 따르면 유형1 또는 유형2의 정당화의 시도로 볼 수 있을 것이다. 그러나 이러한 유형의 정당화는 명제가 주어진 상태에서 그 명제가 옳은지 그른지의 경우에는 가능하겠지만, 일반화 과정에서의 정당화 즉, 문제(명제)를 직접 만들어서 그것을 정당화하는 것과는 맞지 않으며 그 정당성을 밝히기도 매우 어려운 일일 것이다.

학생은 정당화에서 자신이 수행한 일반화가 잘못된 것임을 인식하는 모습을 보였다. 이로부터 일반화에서 정당화 절차는 수행한 일반화의 오류를 검증할 수 있는 한 과정으로 매우 중요한 역할을 할 수 있음을 알 수 있다. 학생은 이러한 오류를 스스로 수정하고자 기하, 조화평균의 일반화 과정에서는 문제해결에서 보인 것과는 다르게 무엇인가가 필요함을 인식하고 수학적 의미를 면담자에게 요구한 것으로 판단된다. 이는 評林一榮이 말한 이해의 완전성은 상황이 변하면 변하는 것이고 어떤 상황에 있어서도 요인의 수와 더불어 변해 가는 것이라는 이해의 본성 중 하나의 예를 보여 주는 것이라 판단된다. 학생의 이해가 객관적으로 판단 가능한 표상을 통해 이루어졌을 때를 완전한 이해라고 정의한 본 연구의 입장에서 보면, 학생은 아직 기하, 조화평균의 일반화 과정과 그 정당화에서 완전히 이해했다고 보기는 어려울 것이다. 이러한 이유로 학생의 수학적 의미의 요구는 일반화 과정에서 기하, 조화평균의 의미-표상이 없음을 인식하고, 면담자에게 의미-표상을 구성

하기 위한 도움을 요청한 것으로 판단된다. 면담자는 학생의 요구와 상황에 맞게 기하, 조화평균의 적절한 수학적 의미를 제시하였다.

세 번째 면담에서 학생은 기하, 조화평균의 일반화를 위한 의미-표상을 구성한 것으로 보인다. 이는 기하평균의 일반화 과정 중 변량이 세 개일 때 육면체를 사용하는 대화와, 일반화를 위해 그린 학생의 그림에서 기하, 조화평균의 의미-표상을 찾을 수 있다. 이러한 의미-표상을 통해 학생은 결국 수학적 의미가 연결되는 일반화에 성공하였다. 이러한 객관적으로 분명한 의미-표상과 본질적 의미의 파악을 통한 이해는 일반화 과정에서의 완전한 이해라고 할 수 있을 것이며 학생은 일반화 과정에서 각 평균들을 완전히 이해했다고 할 수 있겠다.

그럼에도 학생은 자신이 수행한 일반화에 대한 정당성을 처음에는 밝히지 못하였다. 그러다가 면담의 후반(後半)부에서, 일반화 전후의 각 평균의 의미가 일치하는 일반화가 올바르게 수행된 일반화라는 일반화의 정당화 방법을 설명하였으며, 정당화 방법에 대한 학생의 설명으로부터 본질적 의미를 이해한 것을 객관적으로 판단할 수 있었다. 이것으로부터 일반화를 위한 의미-표상의 구성은 매우 중요하며, 일반화 전후의 본질적 의미의 일치 여부를 통한 정당화가 바로 정당화에서의 완전한 이해라고 할 수 있겠다. 이런 이유로 학생은 정당화에서 각 평균들을 완전히 이해했다고 할 수 있겠다.

이러한 과정을 통해, 학생이 어떤 개념을 일반화하기 위해서는, 문제해결을 위한 의미-표상과는 다른 일반화를 위한 의미-표상을 통한 이해가 이루어져야 일반화가 가능함을 알 수 있었다. 또, 일반화 후의 그 정당화를 위해서도 학생이 구성한 의미-표상의 의미 일치여부가 판단근거가 됨을 알 수 있었다. 이러한 일반화를 위한 의미-표상과 본질적인 의미의 이해가 일반화 과정과 그 정당화에서의 완전한 이해임을 알 수 있었다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구에서 학생은 처음 산술, 기하, 조화평균의 일반화에 성공하지 못하다가 면담과정에서 일반화에 성공하였으며, 그 일반화의 정당화 방법도 스스로 찾아내었다. 이러한 일반화의 성공과 정당화 방법을 발견한 것만으로는 면담과정의 어떠한 것이 일반화를 도왔는지 분명히 알 수는 없지만, 성공하지 못하던 일반화를 성공하고 그 정당화의 방법을 발견한 것으로 학생에게 무엇인가의 내적 변화가 일어났다고 판단할 수 있다.

면담과정에서 학생은 일반화를 제대로 수행하지 못해 어려움을 겪었으며, 면담자에게 각 평균의 의미를 요구하였다. 면담자는 학생에게 기하, 조화평균의 수학적 의미를 제시하였고, 면담과정과 학생이 제시한 답안을 통해 각 평균들에 주어진 의미가 학생에게 일반화를 위한 의미-표상으로 구성되어졌음을 학생의 말과 그림을 통해 객관적으로 파악할 수 있었다. 그런 후 학생은 스스로 구성한 의미-표상을 통해 일반화에 성공하였다. 이러한 과정으로 일반화 과정에서의 이해에는 학생의 일반화를 위한 의미-표상의 구성이 중요함을 알게 되었으며, 또 일반화 과정에서의 완전한 이해는 의미-표상을 통해 판단할 수 있음을 알게 되었다.

또한 일반화의 정당화에서도, 처음에는 몇 개의 값을 대입한다는 문제해결 과정에서의 검산의 방법으로 일반화의 정당성을 확인하던 학생이, 일반화 전후의 수학적 의미가 서로 일치하므로 일반화가 올바르게 이루어졌다고 하였다. 이로부터 학생은 각 평균의 본질적 의미를 이해했다고 판단가능하며, 정당화의 방법으로 의미 일치가 매우 중요한 역학을 한다는 것을 알게 되었다. 이러한 과정을 통해 학생의 변화는 본질적 의미의 수용과 일반화를 위한 의미-표상의 구성이 중요한 역할을 한 것으로 판단할 수 있다. 그러므로 어떤 개념(또는 성질)을 일반화한 후 그 정당화는 본질적 의미의 일치 여부를 통해 가능하며, 그것으로 완전한 이해를 판단 가능함을 알 수 있었다.

그러나 교육현장에서는 옳지 못한 일반화를 옳다고 학생 스스로 판단하는 상황을 쉽게 만날 수 있을 것이다. 옳지 못한 일반화를 옳은 것이라고 생각한다면, 학생은 일반화 과정과 그 정당화에서의 완전한 이해가 이루어졌다고 판단하는 오류를 범하게 될 것이다. 옳지 못한 일반화를 옳다고 판단하는 경우에는 본 사례에서 살펴보았듯이 일반화의 정당화에서 어느 정도 교정될 수 있을 것이다. 그러나 일반화 과정과 정당화 모두에

서 잘못된 것을 옳다고 생각한다면 학생 스스로 교정할 수 있는 방법은 없게 된다. 이러한 잘못된 것을 옳다고 생각하는 것은 일반화 전과 후의 개념에 대한 의미의 연결이 잘못되거나 논리성의 부족에서 그 이유를 찾을 수 있을 것이다. 이때는 교사의 적극적인 도움을 통해 오류를 교정해 주는 과정 또한 필요하게 될 것이다. 따라서 일반화를 수행한 후 반드시 그 일반화의 정당화를 행하도록 지도하여야하며, 교사는 학습의 과정에서 학생의 사고의 연결과 논리성에 대한 관심과 도움을 줄 수 있어야 하겠다.

많은 학생들이 어떤 개념이나 성질에 대해 학습하게 될 때, 개념과 성질을 암기하고 수학적 문제 상황에 적용해보는 '암기하고 적용하기', 수학 개념과 성질을 관계망 속에서 살펴보는 '왜 그렇게 되는지 알기' 그리고 일반화나 실제 생활 속에 적용하기 위해 개념과 공식을 내면화하는 '의미 이해하기'의 과정을 거치게 되는 것이 보통이라 할 수 있다. 그러므로 결국 '의미 이해하기'는 주어진 개념이나 공식의 음미 과정이라 할 수 있다. 수학의 학습이 기본적인 내용의 학습을 토대로 더 확장된 내용으로 발전해 간다는 순환적 학습의 입장에서 보면 음미의 단계는 다음의 학습을 위해 결코 가볍게 여겨서는 안 되는 중요한 단계임을 부정할 수 없다.

보통 학생이 주어진 문제의 답을 구해내면 충분한 이해가 이루어졌다고 생각한 경우가 많지만, 이것만으로는 문제에 필요한 개념이나 성질을 완전히 이해했다고 하기는 어렵다. 학생의 답만을 강조하여 지도하는 방법은 '암기하고 적용하기', 왜 그렇게 되는지 알기' 단계의 지도라 할 수 있으며, 그러한 지도만으로는 수학 학습 전체를 아우르기 어렵다는 것은 당연하다할 것이다. 결국 수학 학습의 완전한 이해를 위해서는 '의미 이해하기' 단계를 강조하여 지도하여야 하며, 이를 위해 학습 과정에서 나타나는 학생들의 반응과 요구 조건을 면밀히 살펴보아야 할 것이다. 이러한 학생들의 반응과 요구 조건을 통해 학생이 구성한 표상을 알아낼 수 있으며, 학생의 표상을 통해 학생의 이해 여부를 파악할 수 있을 것이다.

하지만 학교 현장에는 다양한 수준의 학생이 존재하며, 다른 수준의 학생이 구성할 수 있는 표상 또한 다양할 것이다. 이러한 다양한 수준의 학생이 구성한 표상을 통한 일반화의 수준 또한 다양할 것이라 추측한다. 따라서 학생의 수준에 따른 일반화의 정도를 연구하는 것도 매우 흥미 있을 것으로 판단되며, 후속 연구로 제언해본다.

참 고 문 헌

강완・백석윤 (2007). 초등수학교육론, 파주: 동명사.

김남희 (1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해, 대한수학교육학회 논문집, 7(1), 445-458.

김동근 (2011). 학교수학에서 일반화에 관한 연구, 경상대학교 박사학위 논문.

김정하 (2010). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구, 이화여자대학교 박사학위논문.

류근행 (2004). 수학학습에서 이해 및 적용에 관한 연구, 공주대학교 박사학위 논문.

류근행 (2003). 수학교과에서 관계적 이해의 인식에 대한 실태 분석 및 수학교육의 개선 방향 탐색, 한국학교수학회 논문집, 6(1), 135-161.

송상헌・허지연・임재훈 (2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석, 수학교육학연구, 16(1), 79-94.

이상덕・김화수・김성숙 (2003). 소수의 관계적 이해를 위한 스키마식 수업이 학습자에게 미치는 영향, 한국수학교육학회지 수학교육논문집, 16, 165-173.

이환철・하영화 (2011). 중학교 수학 교과서 분석을 통한 정당화 방안 탐색, 한국학교수학회논문집, 14(3), 325-337.

정인철 (2003). 수학 교육에서 이해의 의미와 구조에 대한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(1), 11-18.

정은실 (1997). 초등학교 수학에서의 개연적 추리에 대한 연구, 대한수학교육학회 논문집, 7(1), 69-86.

최남광 (2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문.

최지영 (2007). 算術・幾何・調和平均에 관한 연구, 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문.

한명희 (1980). 일반화의 성격과 교육적 의미, 한국교육 개발원, 한국교육, 7(1), 53-66.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 진주: 경상 대학교출판부.

허경조 (2008). 교육목표와 문항의 분류학, 대전: 도서출판 근화.

Byers, V. & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics, *Mathematics Teaching*, 81, pp.24-27.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive on the Learning and teaching of proof, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* National Council of teachers of mathematics.

Haylock, D. W. (1982). Understanding in mathematics : Making connections. *Mathematics Teaching,* 98, 54-56.

Hiebert, J. (1986). Conceptual and procedural Knowledge : The case of mathematics. Hillsdale, N. J.: *Lawrence Erlbaum Associates.*

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws(ED), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* pp. 65-97, New york : Macmillan.

N. Palaniappan(2005). *Fuzzy Topology Second Edition*, Harrow : Alpha Science International Ltd.

Polya, G. (1973). *Mathematics and Plausible Reasoning* 1. Princeton University Press.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of student's justifications. *The Mathematics Teache*r, 91(8), pp.670-675.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* 77, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). Psychology of learning mathematics, Hillsdale, NJ: *Lawrence Erlbaum Associate*s.

Wiggins, G. P. (1993). *Assesing students performance : Exploring the purpose and limits of testing*, San Francisco: Jossey-Bass.

A study on the completeness of 'the understanding' in the generalization process and justification.

- centered on the arithmetical, geometric and harmonic average -

Kim, ChangSu
The middle school Affiliated with G.S.N.U., Jinju 660-701, Korea
E-mail : cupncap@gamil.com

The understanding demands the different degree of the understanding according to student's learning situation. In this paper, we investigate what is the foundation for the complete understanding for the generalization in the generalization-process and justification of some concepts or some theories, through a case.

We discovered that the completeness of the understanding in the generalization-process and justification requires 'the meaningful-mental object' which can give the meaning about the concept or theory to students. Students can do the generalization-process through the construction of 'the meaningful-mental object' and confirm the validity of generalization through 'the meaningful-mental object' which is constructed by them. And we can judge the whether students construct the completeness of the understanding or not, by 'the meaningful-mental object' of the student.

Hence 'the meaningful-mental object' are vital condition for the generalization-process and justification.

* ZDM classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : understanding, generalization-process, justification, meaningful-mental object.