대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 4, 579 ~ 598. Dec. 2012

수학 문제해결과정에서 보이는 초등교사의 직관 수준에 관한 연구

김 해 규*

본 연구에서는 직관에 대한 초등 교사들의 '전문화된 내용 지식'(SCK)를 연구하기 위하여, www.mathlove.net에 탑재된 초등기하편 시즌 I의 1번에서 15번까지의 문항 중 문제해결 과정에서 직관이 필요한 8개 문항을 교육 경력이 다양한 8명의 초등 교사들에게 투입한 후, 회수한 검사지를 바탕으로 초등 교사들의 직관 정도를 조사 · 분석하였다. 연구에서 사용된 문항들을 3가지 유형으로 분류하여 각 유형별로 문항별, 교육경력별로 특징들을 조사하였는데, 연구 결과 1명의 교사를 제외한 나머지 초등 교사들이 문제해결 과정에서 보여준 직관에 대한 SCK는 3가지 유형 모두에서 전반적으로 낮은 것으로 분석되었다.

I. 서론

최근에 수업의 질을 향상시키고자 하는 노력의 일환으로 교사지식에 대한 연구가 국내외에서 활발히 이루어지고 있다. 교사가 갖추어야 할 지식에 관한 연구에 이론적 토대를 제공한 것은 Shulman(1986)으로 권민성·남승인·김상룡(2009)에 따르면 Shulman은 교사와 관련된 지식을 내용지식(content knowledge), 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge, [PCK]) 및 교육과정 지식(curriculum knowledge)으로 제시한 이후 1990년에 Grossman은 Shulman이 제시한 이론적 틀을 바탕으로 교사에게 필요한 지식을 교과 내용 지식, 일반적 교수학적 지식, 교수학적 내용 지식, 상황에 대한 지식으로 세분화하였고, Michigan 대학교의 Ball과 그의 동료들이 기존의 교사 지식의 범주를 재개념화하여 '수학을 가르치는데 필요한 지식'(Mathematical Knowledge for Teaching, [MKT])이라는 이론으로 정립하였다고 한다. Ball, Thames와 Phelps(2008, p. 403)의 분류에 따르면 MKT의 하위요소로 크게 교과 내용 지식과 PCK로 구분되며, 교과 내용 지식에는 공통 내용 지식(common content knowledge), 전문화된 내용 지식(specialized content knowledge, [SCK]), 수학적 식견으로서의 지식이 속하며, PCK에는 내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching), 내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students), 교육과정 지식이 속한다. 박경미(2009)는 SCK를 2007년 Hill, Sleep, Lewis와 Ball이 정의한 내용을 바탕으로 학습자에게 직접 가르치지는 않지만 교사가 이해하고 숙지해야할 지식으로 설명하고 있다.

한편, 이대현(2011)은 초등학교 수학 지도에서 직관적 교수 원리의 중요성을 인식하고 2007개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2007)과 교

* 제주대학교, kimhag@jejunu.ac.kr

육과정 해설서(교육과학기술부, 2008)에 제시된 교육 내용 중에서 직관적 원리에 의한 내용을 추출하고 교과서에 어떻게 구현되었는가를 분석하여, 2007개정 교육과정과 교과서에 제시된 직관적 원리는 특정한 원리에 치중되어 있음을 지적하였다. 그리고 후속 연구로 초등학생들의 지적 특성에 맞는 직관적 방법에 의한 수학 학습 방법을 모색하여 직관적 원리에 의한 초등 수학의 지도 방안이 현장에 적용 가능하도록 교육과정에 적극적으로 반영할 것을 제안하였다.

이대현(2011)이 제안한 교육과정에 반영하기 위한 학습 방법이나 지도방안에 관한 연구에 못지않게 수학 문제 해결과정에서의 초등 교사들의 직관에 대한 '전문화된 내용 지식'(SCK)에 대한 연구도 중요한 문제 중의 하나이다. 실제로 7차 교육과정에서 표방했던 '교육과정 재구성' 주체로서의 교사의 전문성이 개정 교육과정에서도 여전히 중요하게 요구되고 있다(곽영순·강호선, 2005; 최승현·황혜정, 2009, 재인용).

따라서 본 연구에서는 직관에 대한 초등 교사들의 '전문화된 내용 지식(SCK)'를 연구하기 위하여, www.mathlove.net에 탑재된 초등기하편 시즌 I의 1번에서 15번까지의 문항 중 문제해결과정에서 직관이 필요한 8개 문항을 교육 경력이 다양한 8명의 초등 교사들에게 투입하여 교사들이 풀이한 답안지와 문제해결 과정을 공유한 비디오 녹화 자료를 바탕으로 검사 문항들을 3가지 유형으로 분류한 후, 유형별, 문항별, 교육 경력별로 초등 교사들의 직관 정도를 조사하였다.

II. 이론적 배경

본 절에서는 직관적 교수법과 직관에 대한 선행 연구들, 베르트하이머의 평행사변형 문제와 초등수학교육에서 직관을 활용할 수 있는 방법에 대하여 알아본다.

1. 직관적 교수법과 직관에 대한 선행 연구

흔히 직관은 원시적인 느낌으로 생각되거나 그 의미가 자명한 상식적인 용어로 사용되고 있으며, 보다 근원적인 요소로 환원할 수 없는 즉각적인 일차적인 인지작용으로 간주되면서 여러 가지 현상에 대한 기술과 설명에 사용된다(우정호, 2005, p. 65). 수학교육에서 직관에 대한 체계적인 연구는 1987년 Fischbein에 의해 이루어졌는데(이대현, 2010), 일반적으로 초등학교에서는 직관적인 모델을 사용하여 새로운 수학적인 개념을 도입한다. 우정호(2005)에 따르면 직관적인 해석은 구체적 조작기의 특성에 대응하며, 개념을 학생들이 보다 접근하기 쉽게 하며(p. 124), 교수법에서 직관이라는 말은 주로 감각기관을 통한 경험을 가리키며, 직관적 교수법이란 언어적 설명에 의하지 않고 실제적인 사물이나 표본, 그림 등에 의한 직접적 관찰을 통하여 지식을 습득하는 것을 뜻하지만 직관의 의미는 그렇게 단순하지 않다(p. 57)고 한다. 실제로 수학자들이 '직관적'인 설명은 엄밀성이 부족할 수밖에 없다고 생각하여, '직관'과 '엄밀성'은 서로 배타적인 것으로 간주하곤 하는데 대하여, Tall(2003)은 직관과 엄밀성에 대하여 직관에 엄밀성이 부족하다는 주장에 일부는 동의하면서 두 개념이 서로 대립되는 것이라는 주장은 잘못된 것(p. 16)으로 보고 있다. van Hiele(1986)도 직관을 '직접 관찰에 근거를 둔 결론내리기'와 구별할 필요가 있다고 주장하는데, 그 이유로 직관이 사물에 대한 직접 관찰의 결과로 직접적인 인식의 과정으로 받아들여지지만, 사물에 대한 관찰만 통해서는 사물의 외현적인 사실만을 인식하는 감각적 지식일 뿐이고, 직관으로 형성하는 사실은 직관적인 지식으로 보편성을 가진 지식(이대현, 2011,

재인용)으로 설명하고 있다. 또한 Tall(2003)은 푸앵카레의 두 가지 수학적인 마음에 대하여 다음과 같이 설명하고 있는데, 이는 직관의 의미가 우정호의 주장처럼 그렇게 단순하지 않다는 것을 보여주고 있다.

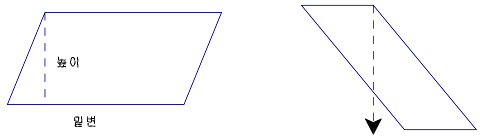
> 두 가지 상반된 경향, 또는 전혀 다른 두 가지 마음을 주목하고 구별하지 않고서는 위대한 수학자들-이들보다는 다소 뒤떨어진 수학자들조차도-의 업적을 연구하기 어렵다. 한 가지는 무엇보다 논리와 관련된다. 그들의 연구업적을 이해하기 위해서는, 보병들이 공격 목표를 점령하기 위해 치밀한 계획하에 참호를 구축해가는 Vauban[1]의 전략과 같이, 한 단계씩 나아가면 된다. 또 한 가지는 직관에 의지하는 것으로 전진 근위대의 기병과 같이 단 한 번에 빠르지만 때로는 불완전한 점령을 하는 것이다(Poincare, 1913, p. 210; Tall, 2003, p. 3, 재인용).

한편, Hersh(1997)는 직관이 수학의 본질적인 부분이기 때문에 바람직한 수리철학은 직관을 무시할 수 없으며, 직관이란 단어가 주는 의미에 대하여 ‘엄밀함의 반대, 시각적, 전체적, 통합적’을 제시하고 있으며, ‘수학적 대상’을 관념과 정신적 대상의 영역에서 그 성질이 재현 가능한 개념으로, ‘수학’을 재현 가능한 성질을 가진 정신적 대상에 대한 연구로, ‘직관’을 이러한 내적이고 정신적인 대상을 생각하고 조사하는 능력(이대현, 2011, 재인용)으로 설명하였다. 온기찬(2001)은 직관을 형태심리학자들이 말하는 ‘통찰’과도 유사하다(이대현, 2010, 재인용)라고 본 반면에, 이대현(2010)은 주어진 정보나 관찰 가능한 사실을 능가하여 자명하고 즉각적인 사실을 발견하는 면에서 통찰을 넘어선다고 보았다.

2. 베르트하이머의 평행사변형 문제

본 연구에 참가한 교사들의 검사지를 분석하면서 ‘베르트하이머의 평행사변형 문제’에서 아동들이 보인 반응이 교사들에게도 나타나고 있어서 ‘베르트하이머의 평행사변형 문제’를 간단히 살펴보고자 한다.

베르트하이머(Wertheimer)는 쾰러(Köhler), 코프카(Koffka) 등과 함께 형태심리학의 대표적인 학자이다. 형태 심리학자들은 인간의 정신은 인간에게 입력되는 모든 감각과 경험을 그대로 받아들이는 것이 아니라, 어떤 조직 원리를 갖고 그것에 근거하여 해석함으로써 이해에 이른다고 주장 한다(강문봉 외, 2005). 베르트하이머는 교육의 측면에서 인간의 인지구조에 대한 형태심리학자들의 관점을 가장 잘 설명했으며, 특히 문제해결에 관심이 많았다. 그는 성공적인 문제해결을 위해서는 문제의 전체적인 구조를 볼 수 있어야 한다고 보아 ‘생산적 사고(productive thinking)’ 또는 구조의 이해에 기초한 사고를 입증하는데 전념했다. 그는 평행사변형 문제를 이용하여 생산적 사고의 메커니즘을 밝혔으며 이러한 사고의 필요성 또한 주장했다(남승인 외, 2012). 아래의 내용은 남승인 외의 내용을 요약한 것이다.



교사는 학생들에게 윗변의 왼쪽 꼭짓점에

---

1) Sebastien de Vauban(1633-1707)은 공격 장치와 방어 요새 구축 기술을 혁신시킨 프랑스의 공병학자이다 (Tall, 2003, p. 3).

서 밑변에 수직인 직선(수선)을 긋는 방법을 설명하고 이 평행사변형의 넓이를 구하기 위해서는 수선의 길이를 구해서 밑변의 길이에 곱하면 된다고 설명했다. 이 표준 알고리즘을 사용하여 학생들은 평행사변형의 넓이를 구하는 연습문제를 쉽게 계산했다. 그때 베르트하이머가 그림의 오른쪽과 같은 평행사변형을 제시하고 그 넓이를 구해보라고 했다. 학생들은 배우지 않았다거나 틀린 문제라고 하기도 했으며 어떤 학생들은 그냥 포기해 버렸다. 이런 반응들이 나타난 이유는 교사로부터 배운 것에 따라 왼쪽의 꼭짓점에서 수선을 그으면, 그 수선은 밑변이 아닌 밑변의 왼쪽에 내려지게 되어 표준적인 공식을 적용할 수 없었기 때문이다. … (남승인 외, 2012, pp. 78-79).

3. 초등수학교육에서 활용할 수 있는 직관

학교 수학에서 직관을 어떻게 활용해야하는지에 대해서 살펴보고자 한다. 이대현(2011)은 수학자들이 수학의 발명 과정에서 보여준 직관으로부터 초등 수학에서 직관을 통한 수학적 발명의 경험을 제공할 수 있는 학습 방안의 모색이 필요하며, 특히 초등학생들에게는 구체적인 조작물을 이용하거나 주변의 구체물에 대한 관찰과 실험, 실측 등의 활동을 통하여 수학적 사실을 구성하도록 하는 직관적 원리에 의한 학습이 적절하다(p. 285)라고 하였다. 반면, Tall(2003)은 도약에 의해 추정한 다음 보완하는 활동을 강조한 Dienes와 Jeeves의 개념 지도방법에 대해서 아래와 같이 적고 있다.

Dienes(1960)는 어린 아동들을 대상으로 한 연구에서, 구체적인 예를 이용하여 개념을 형성해 가는데 따른 이론을 제안했으나, Dienes와 Jeeves(1965)는 "항상 한 단계씩이 아닌 도약에 의해 추정한 다음 이를 보완하는 활동을 강조하는" 훨씬 일반적인 심층적 목표 원리(deep end principle)를 제안했다(Tall, 2003, p. 20).

또한 Tall(2003)은 직관을 개념 이미지들의 산물로 여겨, 비형식적(pre-formal) 수학을 근거로 하는 초기 직관에서 형식적 직관으로 발전하도록 논리적 사고에 관해 교육을 받으면 받을 필요가 있음을 주장(p. 17)하고 있으며, 우정호(2005)도 가능한 한 일찍 아동에게 지도되는 개념의 형식적인 의미와 형식적인 구조를 이해할 준비를 시키도록 해야 한다(p. 124)고 주장하며 덧셈과 뺄셈의 관계를 지도하는 방법을 다음과 같이 설명하고 있다.

덧셈과 뺄셈은 서로 역 연산이며 직관적으로 정반대의 실제적 조작에 근거한다. … 덧셈 관념을 포함하는 문제는 흔히 뺄셈에 의해 해결되며, 그 역도 성립한다. 그러한 상황에 익숙해짐으로써 학생들은 수학적 조작을 어떤 특정한 직관적 모델로 분리하여 일반적이고 형식적인 문맥에서 조작을 '보는' 것을 배우게 된다(우정호, 2005, p. 124).

따라서 초등학교 수학에서 직관 활용방법은 저학년과 중학년의 초등학생들은 피아제의 구체적 조작기에 해당하며, 고학년의 경우에는 형식적 조작기로 넘어가는 단계이므로, 이대현(2011)과 Tall(2003) 및 우정호(2005)의 주장을 통합하여 초기 직관에서 형식적 직관으로 발전하도록 지도할 필요가 있을 것이다. 이와 같은 관점은 NCTM(2000)에서 초등학생들에게 초기대수(early algebra) 학습의 중요성을 강조 하고 있는 것과도 같은 의미로 받아들일 수 있을 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구에 참여한 교사들은 '직관에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용 지식(SCK)' 연구 수행에 동의한 J지역 초등교사 8명으로 2012년 9월 1일 현재, 교육 경력은 5년 미만 3명, 5년 이상 10년 미만 2명, 10년 이상 3명이었으며, 8명 중에서 7명이 교육대학에서 심화과정으로 수학교육을 전공하였으며, 수학교육 개선에 대한 의지가 높은 교사들이다. 본 연구에 참여한 교사들의 기본 자료는 다음과 같다.

2. 검사 도구 선정 및 연구 절차

선택된 검사 문항들은 수학경시대회 형태의 문항들이며 초등학교에서 다루는 범위를 넘어서는 닮음도형과 삼각비 등에 관한 중학교 수학지식을 이용하면 비교적 쉽게 해결되는 문항도 포함되어 있으나, 초등 교사들에게 문항들을 해결할 때 초등학교에서 다루는 내용만을 이용해서 문제를 해결하도록 요구하였다.

연구 절차는 4단계로 구분하여 진행하였으며 구체적인 연구 절차는 다음과 같다.

1단계는 검사 문항 선정 과정으로 2012년 6월 '직관에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용 지식(SCK)' 연구를 수행하기 위해서 본 연구자가 www.mathlove.net 에 탑재된 초등기하편 시즌 I의 1번에서 15번까지의 문항을 분석하여 2007개정 초등수학 교육과정에 적합하고 문제해결 과정에서 직관이 필요할 것으로 판단되는 8개의 문항을 선택하였다.

2단계는 본 연구의 수행에 동의한 교사들에게 검사지를 투입하여 지필 검사를 하였으며 문제를 해결할 때는 반드시 초등수학 내용만을 사용해야 함을 주지시킨 후, 2012년 9월 5일 수요일 오후 6시 30분부터 3시간 동안 초등교사 8명을 대상으로 하여 검사를 실시하였다.

3단계는 교사들이 해결한 풀이 방법과 아이디어를 공유하는 과정으로 2012년 9월 12일과 9월 19일에 3시간씩 2회에 걸쳐 진행하였으며, 연구 대상자들에게 동의를 구하여 비디오로 녹화하였다.

4단계는 2, 3단계의 자료들을 이용하여 교사들이 문제해결 과정에서 보인 직관을 조사, 분석하

<표 III-1> 연구 대상자들의 기본 자료

교사	교육경력	성별	나이	교육대학 전공 심화과정	담당한(했던) 학년	현재담당하고 있는 학년
G1	13년 6개월	여	37세	수학교육	3, 4, 5, 6학년	학습 연구년
G2	12년 6개월	여	36세	수학교육	1, 2, 3, 4, 5, 6학년	1학년
G3	12년 6개월	여	36세	미술교육	1, 2, 3, 4, 5, 6학년	1학년
M1	5년 6개월	여	29세	수학교육	3, 5, 6학년	5학년
M2	5년 6개월	여	29세	수학교육	3, 5, 6학년	5학년
B1	3년	여	26세	수학교육	3, 4, 5학년	5학년
B2	2년 9개월	여	26세	수학교육	3학년	3학년
B3	6개월	여	24세	수학교육	3학년	3학년

<표 III-2> 연구에 사용된 문항의 유형 분류 및 문항 번호

구분	유형의 분류 기준	분류된 문항
유형 1	'베르트하이머의 평행사변형 문제'에서 아동들이 보인 반응과 유사한 성격을 가진 문항	문항 1, 10
유형 2	주어진 평면 도형을 분할하거나 변형해서 문제를 해결해야하는 직관이 필요한 문항	문항 2, 6, 9
유형 3	입체도형에서 공간 감각에 대한 직관이 필요한 문항	문항 8, 13, 14

였다.

3. 자료 분석

초등 교사 8명이 해결한 검사지와 문제해결 과정을 녹화한 비디오 자료들을 바탕으로 문제해결 과정에서 보인 직관 정도를 조사·분석하였으며 구체적인 방법은 다음과 같다.

첫째 단계는 전반적인 경향을 파악하기 위하여 분석적 채점 기준에 따라 채점하였으며, 둘째 단계에서는 상세한 분석을 위해 검사 문항들을 아래 3가지 유형으로 분류하여 각 유형별로 문항별, 교육경력별로 분석하였다. 참고로, 교육 경력에 따른 분석 결과를 쉽게 파악하기 위해서 교육 경력이 5년 미만인 교사는 B, 5년 이상 10년 미만은 M, 10년 이상인 교사는 G로 분류하였다.

<표 III-2>의 유형 분류의 기준은 교사들이 풀이한 검사지와 문제해결 과정을 공유한 비디오 녹화 자료를 기준으로 구분하였다. 문항 1과 10을 유형 1로 분류한 이유는 7명의 교사들이 문제해결 과정에서 보인 특징들이 '베르트하이머의 평행사변형 문제'에서 아동들이 보인 반응과 유사하였다. 즉, 문항 1의 경우는 삼각형의 넓이를 구하는 문제인데, 삼각형의 높이를 구하기 위해 각도가 30도인 위쪽에 위치한 꼭짓점, 예를 들면 [그림 IV-2]의 점 A에서 수선을 내려 높이를 구하려고 했으며, 문항 10의 경우는 삼각형의 높이를 구하기 위해서 [그림 IV-3]의 변 AC를 밑변으로 인식하면 쉽게 구할 수 있으나 그렇게 인식하는 경향이 매우 부족하였다. 문항 2, 6, 9를 유형 2로 분류한 이유는 평면 도형을 분할하거나 변형하는 문제들이었으며, 문항 8, 13, 14를 유형 3으로 분류한 이유는 시각화 기능과 공간 추론력을 기르기 위해 공간에서 관찰자의 위치나 물체의 위치에 따라 시각적으로 보이는 현상을 기하적 관계와 연결시켜 표현하고 해석하도록 해야 한다는 한국교육개발원(1999)의 관점을 반영하여 유형 3으로 분류하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 분석적 채점 기준에 따른 교사별, 문항별 취득 점수 및 정답률 분석

교사들의 문제 해결에 대한 전반적인 경향을 파악하기 위하여, Reys, Lindquist, Lamdin, & Smith(2012)의 분석적 채점 기준을 사용하였다.

분석적 점수 척도에 따라 채점한 결과는 아래의 <표 IV-2>과 <표 IV-3>와 같으며 채점하는 과정에서 부분점수는 아래의 기준에 따랐다.

첫째, 본 검사를 하기 전에 모든 풀이는 초등수학의 범위에서 해결하라는 조건을 제시하였으므로, 풀이과정에서 초등수학의 범위를 벗어난 경우나 과정을 전혀 기술하지 않고 정답만 기술

<표 IV-1> 문제해결 채점 기준(Reys 외, 2012, p. 96)

단계	분석적 점수 척도
문제의 이해	0: 문제를 완전히 잘못 이해함
	1: 문제의 일부를 잘못 이해하였거나 잘못 해석함
	2: 문제를 완전히 이해함
풀이의 계획	0: 시도조차 하지 않았거나 부적절한 계획을 세움
	1: 문제의 일부를 옳게 해석하여 부분적으로 옳은 계획을 세움
	2: 적절하게 수행하기만 하면 정답으로 이끄는 계획을 세움
정답 구하기	0: 답을 쓰지 않았거나, 부적절한 계획에 기초한 오답을 씀
	1: 옮겨 적을 때의 오류, 계산 오류, 여러 개의 정답 중 일부만을 적음
	2: 정답을 옳게 표시함

<표 IV-2> 교사별 분석적 채점 결과

유형	문항	단계 \ 교사구분	G1	G2	G3	M1	M2	B1	B2	B3
유형 I	1	U	2	0	2	0	2	2	2	2
		P	1	0	1	0	1	1	0*	2
		A	0	0	0	0	0	0	0*	2
	10-1	U	2	2	2	2	2	2	2	2
		P	2	1	1	1	2	1	1	2
		A	2	0	0	0	2	0	0	2
	10-2	U	0	0	0	0	0	0	0	2
		P	0	0	0	0	0	0	0	2
		A	0	0	0	0	0	0	0	2
유형 II	2	U	2	2	0	2	2	0	0	2
		P	2	2	0	2	0*	0	0	2
		A	1	2	0	2	0*	0	0	2
	6	U	2	1	1	2	2	2	2	2
		P	1	0	0	2	2	0	1	2
		A	1	0	0	2	2	0	1	2
	9	U	2	2	2	2	2	2	2	2
		P	0	0*	1	1	0*	0*	1	2
		A	0	0*	2	0	0*	0*	0	2
유형 III	8	U	2	2	2	2	2	2	2	2
		P	0	2	0	2	2	0**	0**	2
		A	0	2	0	0	2	0**	0**	2
	13	U	2	2	2	2	2	1	2	2
		P	1	1	0	2	1	2	1	2
		A	0	0	0	2	0	0	0	2
	14	U	2	0	2	0	2	0	0	2
		P	1	1	2	1	2	1	1	2
		A	0	0	2	0	2	0	0	2
합계			28	24	22	29	34	17	20	54
정답률(%)			51.9	40.7	40.7	53.7	63.0	29.6	33.3	100

한 경우는 '풀이의 계획' 단계와 '정답 구하기' 단계에서 0점을 부여했으며, 초등수학의 범위를 벗어난 경우에는 <표 IV-2>에서 *로, 과정을 전혀 기술하지 않고 정답만 기술한 경우에는 <표 IV-2>에서 **로 표시하였다. 둘째, 문항 10의 경우에는 하위 문항이 2개이므로, 하위 문항들을 독립적인 문항으로 간주하였다. 셋째, 아래의 <표 IV-2>에서 문제의 이해를 U, 풀이의 계획을 P, 정답 구하기를 A로 표시하였다. <표 IV-1>를 사용하여, 교사들의 검사지를 채점한 결과는 다음과 같으며 합계는 54점 만점이다.

교사별, 문항별로 정답률의 경향을 분석하기 위해 <표 IV-2>을 다시 정리한 결과는 다음과 같다.

<표 IV-3>에서 분석된 바와 같이, 교육 경력이 1년 미만인 B3 교사의 정답률은 100%였고, 5년 이상~10년 미만인 M2 교사의 정답률이 63.0%였으나, 이들 2명의 교사를 제외한 6명의 교사들의 정답률은 55% 미만으로 매우 낮게 나타났다. 또한 문항 평균점수 백분율은 모두 70% 미만이었으며, 유형 I의 문항1과 10-2의 경우는 각각 41.7%와 12.5%로 대단히 낮았다. 이와 같이 정답률이 저조한 원인은 본 연구에서 사용한 문항들이 직관을 필요로 하는 문항들로 이루어져 있는 것과 관계가 있을 것으로 추정된다.

따라서, 초등 교사들의 직관에 대한 SCK를 자세히 알아보기 위하여 각 유형으로 구분하여 문항별, 교육 경력별로 분석하였으며, 각 문항들의 출처는 전술한 바와 같이 www.mathlove.net 의 초등기하편 시즌 I이다.

<표 IV-3> 교사별 취득한 항목별(6점 만점)점수 및 정답률

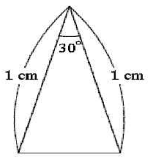
유형 / 문항 / 교사	유형 I			유형 II			유형 III			정답률 (%)
	1	10 -1	10 -2	2	6	9	8	13	14	
G1	3	6	0	5	4	2	2	3	3	51.9
G2	0	3	0	6	1	2	6	3	1	40.7
G3	3	3	0	0	1	5	2	2	6	40.7
M1	0	3	0	6	6	3	4	6	1	53.7
M2	3	6	0	2	6	2	6	3	6	63.0
B1	3	3	0	0	2	2	2	3	1	29.6
B2	2	3	0	0	4	3	2	3	1	33.3
B3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	100
문항별 평균점수	1.88	4.63	1.25	2.63	3.75	3.50	4.00	4.50	4.13	
문항 평균점수 백분율	41.7	68.8	12.5	52.2	62.5	52.2	62.5	60.5	52.2	

2. 각 유형을 중심으로 문항별, 교육 경력별 초등 교사들의 직관 분석

1) 유형 I의 분석

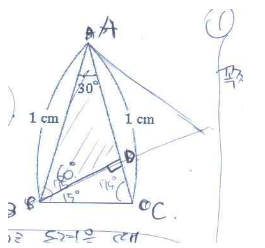
(1) 문항 1의 문제 해결 과정 분석

1. 다음 삼각형의 넓이를 구하시오.



[그림 IV-1] 문항 1

<분석 및 논의> 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 1명(B3)뿐이었으며, 풀이과정은 다음과 같다.



[그림 IV-2] 문항 1의 해결 사례

<표 IV-4> 초등수준의 직관을 통한 문항 1의 해결

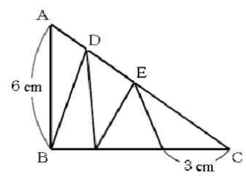
B3 교사의 문제 풀이 과정
[그림 4-2]와 같이 꼭짓점 B에서 변AC에 수선을 내린 뒤, 그 교점을 D라고 한다. 삼각형 ABD를 변AC에 대칭 이동시켜 정삼각형을 만들면, 선분BD의 길이($\frac{1}{2}\,cm$)가 삼각형ABC의 높이이므로, 밑변이 변AC인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,cm^2$ 이다.

반면 2명의 교사들(G2, M1)은 문제해결을 위한 시도조차 하지 못했을 뿐만 아니라, 4명의 교사들(G1, G3, M2, B1)은 꼭짓점 C에서 변AB(혹은 B에서 변 AC)에 수선을 내린 뒤, 그 교점을 D라고 둔 후, 더 이상 해결하지 못했다. 그리고 1명의 교사(B2)는 초등학교 교육과정의 내용을 사용하지 않고 꼭짓점 C에서 변AB에 수선을 내린 뒤, 그 교점을 D라고 한 뒤, 직각삼각형의 삼각비를 이용하여 변CD의 길이 $\frac{1}{2}\,cm$를 구한 후, 삼각형의 넓이를 구했다.

따라서, 이 문제를 해결함에 있어서 초등교육과정 범위 내에서의 직관적 사고가 가능했던 교사는 B3뿐이었다. 반면에, 부분 점수를 얻은 6명의 교사들은 문제를 정확하게 이해하였으나 풀이 계획 세우기 단계에서 초등교육과정 범위 내에서의 직관적으로 이해하지 못한 것으로 분석되었다. 이러한 결과는 '통찰을 설명한 베르트하이머의 연구 결과에서 보인 것과 같은 현상', 즉, '위쪽에 있는 꼭짓점에서 수선을 내려 삼각형의 높이를 구하려는 경향'으로 문제 해결을 시도한 것으로 해석할 수 있다.

(2) 문항 10의 문제 해결 과정분석

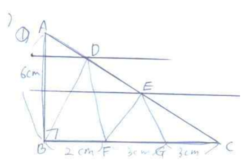
10. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 넓이가 같은 다섯 개의 삼각형으로 나눌 때, 다음 물음에 답하시오.



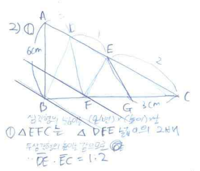
1) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.
2) (선분AD의 길이) : (선분DE의 길이) : (선분EC의 길이)
를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내어라.

[그림 IV-3] 문항 10

<분석 및 논의> 10-1문항을 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 3명(G1, M2, B3)이었고 풀이 방법은 동일하였으며, 나머지 5명의 교사들은 문제 이해는 완전하게 했으나 풀이 계획에서 부분적인 시도만 한 반면에, 10-2문항에서는 1명의 교사(B3)만 해결했으며 7명의 교사들은 문제해결을 위한 시도조차 하지 못했다. 문제해결 과정은 아래와 같다.



[그림 IV-4] 문항 10-1의 해결 사례



[그림 IV-5] 문항 10-2의 해결 사례

따라서, 문항 10-1을 해결함에 있어서 초등학교 교육과정의 범위에서 직관적 사고가 가능했던 교사는 3명(G1, M2, B3)이었으나 이들 중 2명(G1, M2)은 문항 10-2를 해결하지 못했다.

(3) 유형 I에서 나타난 교사들의 직관에 대한 SCK

문항 10-1에서는 변BC를 기준으로 높이를 인식할 수 있어서 문제해결 정도가 비교적 높았던 것으로 보이나, 문항 1에서는 '위쪽에 있는 꼭짓점에서 수선을 내려 삼각형의 높이를 구하려는 경향'이 강한 것으로 나타났으며, 문항 10-2의 경우도 삼각형의 높이를 변 CA를 기준으로 인식해야 했으므로, 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사의 인원수는 문항 1이 1명(B3), 문항 10-1이 3명(G1, M2, B3), 10-2는 1명(B3)이었으며 문항 10-1의 풀이 방법은 동일하였고, 문항 1의 경우에는 부분적으로 시도를 했지만 문항 10-2는 7명의 교사들이 문제해결을 위한 시도조차 하지 못했다.

따라서, 유형 I의 문제 해결과정에서 보여준

<표 IV-5> 초등수준의 직관을 통한 문항 10의 해결

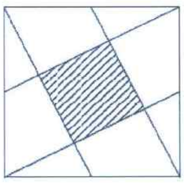
문항 (교사)	문제 해결 과정
10-1항 (G1, M2, B3)	[그림 4-4]와 같이 삼각형EGC와 삼각형EFG의 높이가 같으므로, 밑변의 길이는 3cm로 같고, 삼각형DFC와 삼각형DBF의 높이는 같으나 넓이가 1:3이므로, 선분 BF의 길이는 2cm이다. 따라서, 삼각형ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24\,cm^2$.
10-2항 (B3)	5개의 삼각형의 넓이가 $\frac{24}{5}\,cm^2$이므로, [그림 4-5]와 같이 삼각형FED와 삼각형 FCE에서 점F를 지나면서 선분CD에 평행한 평행선을 그으면 높이가 같으므로, 넓이의 비를 이용하면 (선분DE의 길이) : (선분EC의 길이) = 1:2. 또한, 삼각형BDA와 삼각형BCD에서 점B를 지나면서 선분CA에 평행한 평행선을 그으면 높이가 같으므로, 넓이의 비를 이용하면 (선분AD의 길이) : (선분DC의 길이) = 1:4. 따라서, (선분AD의 길이) : (선분DE의 길이) : (선분EC의 길이)= 3:4:8.

교사들의 직관 정도는 전반적으로 대단히 낮은 것으로 분석되었으며, ‘베르트하이머의 평행사변형 문제에서 아동들이 보인 사고’를 교사들도 갖고 있는 것으로 볼 수 있다.

2) 유형 II의 분석

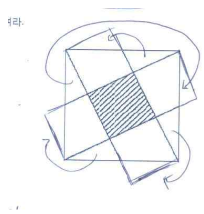
(1) 문항 2의 문제 해결 과정 분석

2. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 15cm인 정사각형에서 각 변의 중점과 꼭짓점을 잇는다. 이 때, 빗금 친 부분의 넓이를 구하여라.



[그림 IV-6] 문항 2

<분석 및 논의> 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 3명(G2, M1, B3)이었으며, 풀이과정은 다음과 같다.



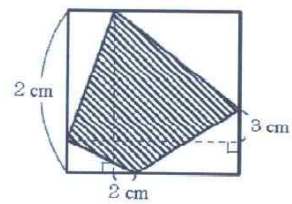
[그림 IV-7] 삼각형의 이동을 통한 도형의 변환

그러나, G1 교사는 [그림 IV-7]과 같이 작은 삼각형을 회전하여 사다리꼴에 합치고 정사각형과 합동이라는 사실을 직관적으로 인식하였으나, 빗금 친 부분의 넓이는 $15 \times 15 \times \frac{1}{5} = 75\,cm^2$ 라고 하여 계산 오류를 범했으며, M2 교사는 초등학교 교육과정의 내용을 벗어난 닮음 도형의 성질을 이용하여 빗금 친 부분의 넓이를 구한 반면에, 3명의 교사들(G3, B1, B2)은 문제해결을 위한 시도조차 하지 못했다.

따라서, 이 문제를 해결함에 있어서 초등학교 교육과정 범위 내에서 직관적 사고가 가능했던 교사는 4명2)이었다.

(2) 문항 6의 문제 해결 과정 분석

6. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 12cm인 정사각형이 있다. 빗금 친 부분의 사각형의 넓이를 구하여라.



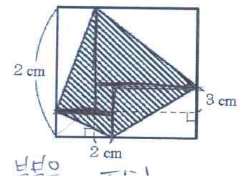
[그림 IV-8] 문항 6

<분석 및 논의> 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 3명(M1, M2, B3)이었으며, 풀이과정은 다음과 같다.

<표 IV-6> 초등수준의 직관을 통한 문항 2의 해결

G2, M1, B3 교사의 문제 풀이 과정
[그림 4-7]과 같이 작은 삼각형을 회전하여 사다리꼴에 합친 부분이 정사각형과 합동이라는 사실을 보인 뒤, 빗금 친 부분이 주어진 사각형의 $\frac{1}{5}$이므로, 빗금 친 부분의 넓이는 $15 \times 15 \times \frac{1}{5} = 45\,cm^2$.

2) 초등학교 교육과정 범위 내에서 직관적 사고가 가능했던 경우로 과정과 답이 정확한 경우의 G2, M1, B3 교사와 과정은 적합하였으나 사소한 계산 실수한 G1 교사를 포함하였다.



[그림 IV-9] 도형의 분할

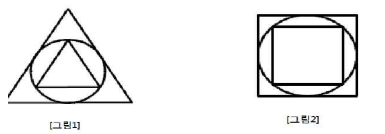
<표 IV-7> 초등수준의 직관을 통한 문항 6의 해결

M1, M2, B3 교사의 문제해결 과정
[그림 4-9]와 같이 주어진 도형을 분할하여 $2\,cm \times 3\,cm$ 부분의 직사각형을 제외하면 작은 부분의 직사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$과 같으므로, 정사각형의 넓이: $12\times12 = 144,\quad 144-6 = 138.$ $138 \div 2 = 69,\quad 69+6 = 75\,(cm^2)$.

그러나, 2명의 교사들(G1, B2)은 [그림 IV-9]와 같은 방법으로 빗금 친 부분의 넓이를 구했으나 계산과정에서 실수[3])를 하였다. 반면에 3명의 교사들(G2, G3, B1)은 시도했으나 문제 해결과정과는 거리가 멀거나, 정확하게 분할하지 못했다. 따라서, 이 문제를 해결함에 있어서 직관적 사고가 가능했던 교사는 5명(G1, M1, M2, B2, B3)[4])이었다.

(3) 문항 9의 문제 해결 과정 분석

9. [그림1]에서의 큰(바깥) 정삼각형의 넓이와 [그림2]에서의 큰(바깥) 정사각형의 넓이가 같다. [그림1]의 작은(내부) 정삼각형의 넓이와 [그림2]의 작은(내부) 정사각형의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오.

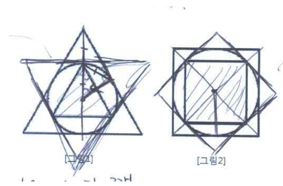


[그림 IV-10] 문항 9

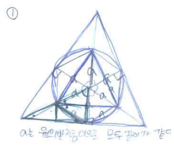
<분석 및 논의> 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 1명(B3)이었으며, 풀이과정은 다음과 같다.

<표 IV-8> 초등수준의 직관을 통한 문항 9의 해결

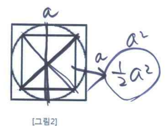
교사	문제 해결 과정
B3	[그림 4-11]의 큰 정삼각형을 180도 회전시키면, 두 삼각형의 넓이의 비가 1:4이고, [그림 4-11]의 큰 정사각형을 45도 회전시키면, 두 정사각형의 넓이의 비는 1:2이므로, 따라서, (작은 정사각형의 넓이): (작은 정삼각형의 넓이)= 1 : 2.



[그림 IV-11] B3 교사의 해결 사례



[그림 IV-12] 중등수준 해결 사례 1



[그림 IV-13] 중등수준 해결 사례 2

3) G1은 $12\times12-6\div2+(2\times3)=78\,(cm^2)$, B2는 $12\times12\times\frac{1}{2}+(2\times3)=78\,(cm^2)$ 로 계산하였다.

4) 초등학교 교육과정 범위 내에서 직관적 사고가 가능했던 경우로 과정과 답이 정확한 경우의 3명과 과정은 적합하였으나 사소한 계산 실수한 2명을 포함하였다.

[그림 IV-14] 중등수준 해결 사례 3

그러나, 3명(G2, M2, B1)의 교사는 초등 수학의 범위를 벗어난 삼각형의 내심, 수심, 무게중심 및 닮음비의 성질을 이용하여 해결하였지만, 4명의 교사들(G1, G3, M1, B2)은 문제를 이해한 후 풀이 계획 단계에서 부분적으로 시도했으나 정답에는 이르지 못했다. 결국 이 문항을 해결함에 있어서 초등학교 교육과정의 범위에서 직관적 사고가 가능했던 교사는 B3 교사뿐이었으며, 초등 수준을 벗어나서 해결한 경우는 G2, M2, B1 교사 3명이었다.

(4) 유형 II에서 나타난 교사들의 직관에 대한 SCK

초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사의 인원수는 문항 2가 3명(G2, M1, B3), 문항6이 3명(M1, M2, B3), 문항 9는 1명(B3)이었으며, 사소한 계산을 실수한 교사까지 포함시키더라도 초등학교 교육과정 범위 내에서 직관적 사고가 가능했던 교사의 인원수는 문항 2가 4명(G1, G2, M1, B3), 문항 6이 5명(G1, M1, M2, B2, B3), 문항 9은 1명이었으며, 문항 2와 문항 6의 문제 해결 방법은 동일하였다.

따라서, 유형 II의 문제 해결과정에서 문항 6의 경우는 5명의 교사가 직관적 사고가 가능했으나 문제해결 방법의 다양성을 고려하면 교사들의 직관 정도는 전반적으로 낮은 것으로 분석되었다.

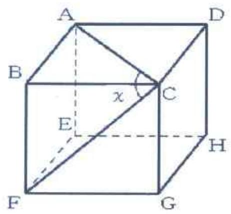
<표 IV-9> 중등수준의 직관을 통한 문항 9의 해결

교사	문제 해결 과정
G2, M2	[그림 4-12], [그림 4-13]과 같이 내심과 무게중심의 개념을 이용하여 작은 정삼각형과 큰 정삼각형의 일부를 더 작은 6개의 삼각형으로 분해한 뒤, 작은 정삼각형과 큰 정삼각형의 넓이의 비가 1:4임을 밝힘. 따라서, (작은 정사각형의 넓이): (작은 정삼각형의 넓이)= 1 : 2.
B1	정삼각형의 무게중심과 내심은 같다. [그림 4-14]와 같이 무게 중심의 성질을 이용하면 큰 삼각형의 높이는 작의 삼각형 높이의 2배이므로, 큰 정삼각형의 밑변을 2a, 높이를 2b라고 하면, 큰 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2a\times 2b = 2ab$. 무게중심의 성질을 이용하면 작은 삼각형의 밑변의 길이는 a, 높이가 b이므로 작은 정삼각형 넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times b = \frac{1}{2}ab$. 따라서, (큰 정삼각형의 넓이): (작은 정삼각형의 넓이)= 1 : 4. 반면에, 작은 정사각형의 대각선의 길이는 원의 지름 a이므로 (큰 정사각형의 넓이) : (작은 정사각형의 넓이) = $(a\times a)$: $(\frac{1}{2}\times a\times a)$ = 1 : 2. 따라서, (작은 정사각형의 넓이): (작은 정삼각형의 넓이)= 1 : 2.

3) 유형 III의 분석

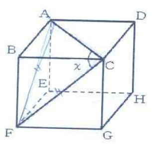
(1) 문항 8의 문제 해결 과정 분석

8. 정육면체 ABCD-EFGH에서 점 A와 점 C를 연결하고, 점 C와 점 F를 연결한다. ∠ACF를 구하여라.



[그림 IV-15] 문항 8

<분석 및 논의> 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 3명(G2, M2, B3)이었으며, 풀이과정은 다음과 같다.



[그림 IV-16] 대각선을 이용한 보조선 긋기

<표 IV-10> 초등수준의 직관을 통한 문항 8의 해결

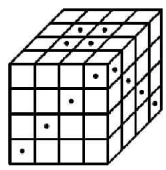
교사	문제 해결 과정
G2, M2	[그림 4-16]에서 선분AC = 선분AF = 선분 FC 이므로, 삼각형ACF는 정삼각형이다. 따라서 ∠ACF의 각도는 60°.
B3	[그림 4-16]에서 선분AF를 이어서 삼각형ACF로 자른다면, 선분AC = 선분AF = 선분 FC 이므로, 삼각형ACF는 정삼각형이다. 따라서 ∠ACF의 각도는 60°.

그러나, M1 교사는 삼각형ACF가 삼각형 그림은 그렸으나, ∠ACF의 각도를 60°로 답하지는 못했으며, B1과 B2 교사는 과정이 전혀 없는 상태에서 60°로 답했으며, 4명의 교사들(G1, G3, B1, B2)은 과정이 없는 상태에서 90°로 답하거나, 180°-90°=90°라고 답하였다.

따라서, 이 문항을 해결함에 있어서 초등학교 교육과정의 범위에서 직관적 사고가 가능했던 교사는 3명(G2, M2, B3)이었다. 또한 B3 교사의 경우에는 문제를 절단면의 개념으로 바라보아 G2와 M2 교사가 이해한 문제의 구조와는 달랐다.

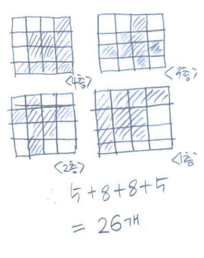
(2) 문항 13의 문제 해결 과정분석

13. 다음 그림과 같이 같은 크기의 정육면체 64개를 겹쳐 쌓고, 1개의 큰 정육면체를 만든다. 위, 정면, 옆으로부터 4개씩 '•' 표의 위치에 긴 바늘로 면에 수직이 되도록 꼽는다. 이 때, 작은 정육면체 중, 바늘이 지나가지 않는 것은 몇 개입니까?



[그림 IV-17] 문항 13

<분석 및 논의> 문항 13을 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 2명(M1, B3)이었고 2명의 풀이 방법은 달랐으며, 문제해결 과정은 아래와 같다.



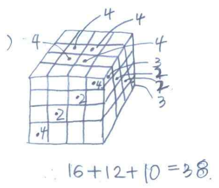
[그림 IV-18] 밑면에 평행하게 절단한 후, 바늘이 지나간 곳 표시하기

<표 IV-11> 초등수준의 직관을 통한 문항 13의 해결

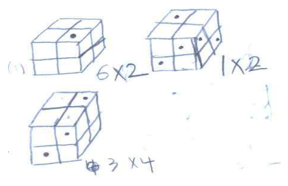
교사	문제 해결 과정
M1	[그림 4-18]과 같이 각 층을 밑면에 평행하게 절단하여 바늘이 지나가는 것은 그림으로 색칠한 후, 바늘이 지나가지 않은 것을 기록함. 1층: 5개, 2층: 8개, 3층: 8개, 4층: 5개, 총 26개.
B3	각 층을 밑면에 평행하게 절단하여 평면의 순서쌍으로 표시함 1) 윗면에 표시된 ●에 의하여 뚫리는 것은 각 층의 (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)이므로, 4개×4층=16개. 2) 정면에 표시된 ●에 의하여 뚫리는 것을 위에서부터 차례대로 A, B, C, D라하면, 총 12개 A(4층): (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)-4개 B(3층): (3,1), (3,4)-2개(위에 중복되는 점인 (3,2), (3,3) 2개 제외) C(2층): (2,1), (2,4)-2개(위에 중복되는 점인 (2,2), (2,3) 2개 제외) D(1층): (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)-4개. 3) 옆면에 표시된 ●에 의하여 뚫리는 것을 위에서부터 차례대로 가, 나, 다, 라고 하면, 총 10개. 가(4층): (1,1), (2,1), (3,1)-3개((4,1)은 A에 있으므로 제외), 나(3층): (1,2), (4,2)-2개(위에 중복되는 점인 (2,2), (3,2) 2개 제외) 다(2층): (1,3), (4,3)-2개(위에 중복되는 점인 (2,3), (3,3) 2개 제외) 라(1층): (2,4), (3,4), (4,4), (1,4)-3개 ((1,4)는 D에 있으므로 제외). 따라서, 바늘이 지나가는 것은 총38개이므로, 바늘이 지나가지 않는 것은 64-38=26(개).

나머지 5명의 교사들은 문제 해결과정을 기술했으나 정확한 답을 얻지 못했다.

따라서, 문항 13을 해결함에 있어서 초등학교 교육과정의 범위에서 직관적 사고가 가능했던 교사는 2명(M1, B3)이었고 풀이 방법도 유사했다.



[그림 IV-19] 각 면에 통과한 개수

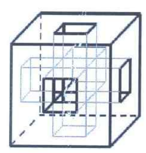


[그림 IV-20] 작은 구조물로 분해

그러나 문항 13의 경우에는 세로로 각 층별로 절단하기, [그림 IV-19]와 같이 각 면에 바늘이 통과하는 개수 적기, [그림 IV-20]과 같이 4×4×4의 정육면체 구조물을 8개의 2×2×2의 정육면체 구조물로 분해하여 바늘이 통과하지 않는 개수를 구하는 방법도 가능했지만, 8명의 교사들은 어느 누구도 이런 방법으로 접근하지 못하였다. 따라서, 문제 해결과정에서 다양한 직관적 사고가 필요하다고 할 수 있다.

(3) 문항 14의 문제 해결 과정분석

14. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6cm인 정육면체에서, 각 면의 가운데 부분을 2×2×6인 직육면체로 도려낸다. 이 때, 도려낸 부분의 부피를 구하여라.

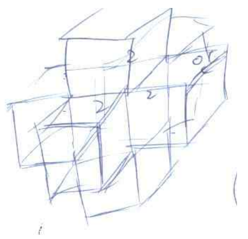


[그림 IV-21] 문항 14

<분석 및 논의> 문항 14를 초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사는 3명(G3, M2, B3)이었는데, G3과 M2의 풀이 방법은 동일하였으나, B3의 풀이 방법은 달라 두 그룹 간에 문제의 구조를 이해하는 방식은 다르게 나타났으며, G3, M2, B3 교사의 문제해결 과정은 아래와 같다.

<표 IV-12> 초등수준의 직관을 통한 문항 14의 해결

교사	문제 해결 과정
G3	3×(2×2×6) - 2×(2×2×2) = 72-16 = 56 (cm^3).
M2	(2×2×6)×3 - (2×2×2)×2 = 72-16 = 56 (cm^3).
B3	도려낸 부분에 2×2×2의 정육면체가 7개 있으므로, 2×2×2×7=56(cm^3).



[그림 IV-22] 잘라 낸 부분의 겨냥도

그러나 4명의 교사들(G2, M1, B1, B2)은 문제를 정확하게 이해하지 않았으며, 2명의 교사들(M1, B1)은 문제를 정확하게 이해하였다면 정답을 얻을 수 있었다. 그러나 G1, G2, B2 교사들은 문항 14에 대한 직관적인 이해가 약간 부족하였다.

따라서, 문항 14에 대한 초등학교 교육과정의 범위에서 직관적 사고가 가능한 경우는 5명(G3, M2, B3, M1, B1)이었나 전체적인 해결 방법이 유사하였다. 다음 표 IV-13은 문항 14 해결과정에서 교사들이 보인 오답 유형들이다.

(4) 유형 III에서 나타난 교사들의 직관에 대한 SCK

초등학교 교육과정의 범위에서 정확하게 해결한 교사의 인원수는 문항 8이 3명(G2, M2, B3), 문항13이 2명(M1, B3), 문항 14는 3명(G3, M2, B3)이었으며, 사소한 계산을 실수한 교사까지 포함시키더라도 초등학교 교육과정 범위 내에서 직관적 사고가 가능한 교사의 인원수는 문항 8이 3명, 문항 13이 2명, 문항 14는 5명(G3, M2, B3, M1, B1)으로 대단히 낮았을 뿐만 아니라, 문항 14와 같이 교사들의 문제해결 방법이 거의 동일하여 직관의 질적인 측면에서도 대단히 낮았다.

따라서, 유형 III의 경우에서도 초등 교사들의

<표 IV-13> 문항 14의 해결 과정에서 나타난 오답

교사	문제 해결 과정
M1	문제에서 요구하는 답을 정확하게 이해하지 않아서 실수를 범함. 전체: 6×6×6 = 216, 조각: 2×2×6 = 24, 24÷3 = 8, 총 7조각 있으므로, 216-(7×8) = 216-56 = 160(cm^3).
B1	문제에서 요구하는 답을 정확하게 이해하지 않아서 실수를 범함. 전체: 6×6×6 = 216, 조각: 2×2×6 = 24, 24÷3 = 8, 총 7조각 있으므로, 216-(7×8) = 216-56 = 160cm^3.
G1	직관적 사고가 부족함. 2×2×6×4 - 2×2×2 = 96-8 = 88cm^3.
G2	직관적 사고가 부족할 뿐만 아니라, 문제를 정확하게 이해하지 못함. 6×6×6-(2×2×6)×3-(2×2×2)×2 = 216-72-16 = 144-16 = 128cm^3.
B2	직관적 사고가 부족할 뿐만 아니라, 문제를 정확하게 이해하지 못함. 216-24-24+8 = 176cm^3.

직관 정도는 전반적으로 낮은 것으로 분석되었을 뿐만 아니라 문항 14에서 분석된 바와 같이 직설적으로 답을 요구하지 않는 문항은 교사들조차도 문장제 문제에서 문제를 정확하게 이해하지 않는 것으로 나타났다.

3. 연구에 참여한 교사들과의 면담 내용

G1 교사는 주로 5, 6학년을 담당했으며, G2 교사는 6년 전에, G3 교사는 7년 전에 5학년과 6학년을 담당한 후에는 계속 1, 2학년을 담당하고 있으며, M1, M2, B2 교사는 5학년을 담당하고 있으며, B1, B3 교사는 3학년을 담당하고 있다. 다음 자료들은 연구에 참여한 교사들과 면담한 자료이며 요약하면 다음과 같다.

G1 교사: 본 검사 문항을 통해 초등과 중등 단계의 개념은 연관성이 깊다는 것을 느꼈으며, 중학교 1, 2학년의 지식을 교사가 알고 있다면 해결할 수 있는 문제가 많았다.

G2 교사: 6년 전에 5, 6학년을 담당한 이후는 계속 저학년을 담당하고 있어서 문제 해결에 상당한 곤란을 겪었으며, 다시 고학년을 한다면 수업을 담당할 수 있을까하는 두려움을 느꼈고, 현재는 반성을 많이 하고 있다.

G3 교사: 7년 전에 5, 6학년을 담당한 이후는 계속 저학년을 담당하고 있어서 문제 해결에 상당한 곤란을 겪었고, 대학에서의 심화전공이 미술 교육이라서 가장 고민을 많이 했다. 그러나 다른 교사들과 풀이 방법을 공유하면서 다양한 풀이 방법에 놀랐고 시간이 지나면서 차츰 적응하게 되었다.

M1 교사: 첫 시간에는 회의에 빠졌다. 6학년을 담당할 때는 중학교 내용을 찾아보고 했으나 3학년과 5학년을 담당하면서부터 중학교 내용을 찾아볼 상황이 생기지 않아서 담당 학년에 충실해지려고 노력하고 있다. 이번 문제를 해결하면서 초등교사가 알아야 할 수학 내용의 범위에 대한 고민이 생겼다.

M2 교사: 면담 시간에 결석하여 면담을 하지 못했으나, 교육대학 재학시절에 주어진 과제에 최선을 다하는 학생이었으며, 현재도 그렇게 생활하고 있다.

B1 교사: 임용된 후 계속 3학년을 담당하였다. 처음 문제를 접했을 때는 중학교 지식을 이용하려고 했으나 차츰 초등수학으로 문제를 해결할 수 있는 것을 느꼈다. 그리고 현재는 초등수학 수준으로 해결해 보려고 하는 의욕이 생겼다. 또한 도형 영역의 내용을 지도할 때 연계성 관점에서 지도해야겠다는 인식을 하는 계기가 되었다.

B2 교사: 작년까지는 학교에서 수학 수업을 진행할 때는 학생들에게 생각할 시간을 거의 주지 않았었는데, 이번 검사에서는 시간을 충분히 가지고 해결하는 경험함으로서 현재 담당하고 있는 5학년 학생들에게도 시간을 충분히 주어 문제를 해결해보게 할 필요성을 느꼈다. 교과서 내의 탐구 문제도 어려운 문제가 많이 있으므로 활용할 수 있을 것 같다.

B3 교사: 초임 발령으로 현재 3학년을 담당하고 있다. 교육대학 수학교육과 심화과정에 다닐 때도 적극적으로 수업에 임했으며, 본 연구에서 사용한 문제에 대한 다양한 해를 구하려고 초등학교에서 쉬는 시간과 방과 후 시간을 이용하여 문제를 해결하려고 했다. 재미있는 문제이다.

면담 결과는 크게 두 가지로 요약되는데, 첫째 G2, G3, M1, B1 교사의 면담에서 드러난 것처럼 초등 교사들의 수학 지도에 대한 학년간의 수학 내용에 대한 연결성 관점에서 문제가 많이 있는 것으로 나타났다. 둘째, 연구에 참여한 대부분의 교사들은 처음 문제를 접했을 때는 상당한 곤란을 느꼈으나 점차 필요성을 인식하는 방향으로 신념의 변화를 느끼고 있었다.

V. 결론

1. 연구 결과

본 연구에서는 직관에 대한 초등 교사들의 '전문화된 내용 지식(SCK)'를 연구하기 위하여, 문제해결과정에서 직관이 필요한 8개 문항을 교육경력이 다양한 8명의 초등 교사들에게 투입하여 교사들이 풀이한 답안지와 문제해결 과정을 공유한 비디오 녹화 자료를 바탕으로 검사 문항들을 3가지 유형으로 분류한 후, 유형별, 문항별, 교육 경력별로 초등 교사들의 직관 정도를 조사하였다. 연구에 참여한 교사들의 교육경력은 5년 미만이 3명, 5년 이상 10년 미만이 2명, 10년 이상이 3명이었으며, 이들 중에서 7명은 교육대학에서 수학교육을 전공하였다. 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, Reys 외(2012)의 분석적 점수 척도에 따라 채점한 결과는 교육경력 1년 미만인 B3 교사와 5년 이상 10년 미만인 M2 교사를 제외한 6명의 교사들의 정답률은 55% 미만으로 매우 낮게 나타났다. 또한 문항별 평균점수 백분율은 모두 70% 미만으로 전반적으로 낮았다.

둘째, 유형별로 살펴보면, 유형 1에서는 B3 교사를 제외한 7명의 교사들이 '베르트하이머의 평행사변형 문제에서 아동들이 보인 반응', 즉 '위쪽에 있는 꼭짓점에서 수선을 내려 삼각형의 높이를 구하려는 경향'으로 문제 해결을 시도한 것으로 나타났다. 유형 2에서는 문항 9의 경우는 B3 교사만 정확하게 해결하였으며, 문제해결 방법의 다양성을 고려하면 교사들의 직관 질적 수준은 전반적으로 낮은 것으로 분석되었다. 유형 3에서도 문제 해결과정에서 직관적 사고가 가능했던 교사들은 문항 8과 문항 13은 각각 3명, 2명으로 대단히 낮았을 뿐만 아니라, 직관적 사고가 가능했던 교사들의 수가 비교적 많았던 문항 14에서는 교사들의 문제해결 방법이 거의 동일하여 직관의 질적인 측면에서도 대단히 낮았다. 특이한 점은 문항 14에서 분석된 바와 같이 문장제 문제에서 직설적으로 답을 요구하지 않는 문항은 교사들조차도 문제를 정확하게 이해하지 않는 것으로 나타났다.

본 연구 결과 수학 문제 해결 과정에서의 초등학교 교사들의 직관 수준을 향상시키기 위하여 다음을 제언하고자 한다.

첫째, 교사의 면담에서 드러난 것처럼 초등 교사들에게 초, 중등 수학 내용에 대한 연결성에 대한 전문성 연수가 필요하다. 이는 한국교육과정평가원에서는 2005년부터 2010년 이후까지 장기 계획을 세워서 PCK를 수업 컨설팅과 연계시켜 연구하고 있는 것과 같은 유형의 연수를 의미한다.

둘째, 초등학교 교사들을 대상으로 한 직관적 사고에 대한 전문성 연수가 필요하다. 교사의 수학적 사고관은 학생의 사고과정에 직접적으로 영향을 미친다고 해도 과언이 아니다. 이대현(2010, p. 213)에 따르면 학생들은 수학 문제 해결 과정에서 여러 가지 직관의 특징에 의해 직접적인 영향을 받는 것으로 나타났으며, 직관적 판단에 의해 쉽게 해결 가능한 문제의 경우에도 문제해결의 다양한 방법을 이해하지 못하고 문항에 따른 전형적인 풀이방법을 고집한다고 주장하고 있으므로, 초등학교 교사들을 대상으로 한 직관적 사고에 대한 전문성 연수가 필요하다.

셋째, 본 연구에서 조사된 바와 같이 초등 교사들의 직관적 사고가 전반적으로 낮은 원인을 규명하기 위한 후속연구가 수행되어지기를 희망한다. 예를 들면, 2007개정 교육과정과 교과서에 제시된 직관적 원리가 특정한 원리에 치중되어 있다는 이대현(2011)의 연구 결과와 어떤 관련성이 있는가를 연구해 볼 필요도 있다.

2. 연구의 제한점

수학 경시대회 성격의 8개의 문항을 이용하여 8명의 초등 교사를 대상으로 연구를 수행했을 뿐만 아니라, 연구에 참여한 교사들이 특정 지역에 근무하는 교사들이므로 본 연구에서 얻을 결과들을 일반화하는 데는 한계가 있다.

참고문헌

강문봉 외 12인(2005). **초등수학교육의 이해**. 서울: 경문사.

교육과학기술부(2007). **수학과 교육과정 <교육과학기술부 고시 제 2007-79호[별책 8]>**. 교육과학기술부.

______________(2008). 초등학교 교육과정 해설 (IV): 수학, 과학, 실과. 광주: 한솔사.

권민성 · 남승인 · 김상룡(2009). 미국의 선다형 문항 적용을 통한 우리나라 초등교사의 수학을 가르치는데 필요한 지식 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48**(4), 399-417.

남승인 외 8인(2012). **2009 개정교육과정에 의한 초등수학교육론**. 서울: 경문사.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 48**(1), 93-105.

우정호(2005). **수학 학습-지도의 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

이대현(2010). 초등학생들의 문제해결 과정에서 직관의 특징에 의한 영향 분석. **한국초등수학교육학회지 14**(2), pp. 197-215.

______(2011). 초등수학에서 직관적 원리에 의한 교육 내용 분석. **한국초등수학교육학회지 15**(2), pp. 283-300.

최승현·황혜정(2009). 한국교육과정평가원에서 조명한 PCK(내용 교수 지식)의 의미와 역할. **대한수학교육학회 수학교육논총 36**, pp. 387-400.

한국교육개발원 (1999). **수학과 영재교육과정 시안: 초 · 중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초연구의 '영재교육과정 개발 연구'의 별책부록 III**(수탁연구 CR 99-20-3: 구자억 · 조석희 · 김홍원 · 서혜애 · 장영숙 공동 연구). 서울: 한국교육개발원.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education. 59*(5), 389-407.

National Council of Teachers of Mathematics ([NCTM]) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : The Author.

Reys R. E, Lindquist M. M, Lamdin D. L., & Smith N. L. (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법**. (박성선·김민경·방정숙·권점례 공역). (영어 원작은 2009년 출판).

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher. 15*, 4-14.

Tall D. (2003). **고등수학적 사고**. (류희찬·조완영·김인수 역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

http://www.mathlove.net 의 초등기하편 시즌 I에서 2012. 5. 20. 추출

On the Level of Intuition of Elementary School Teachers in Problem Solving Process

Kim, Hae Gyu(Jeju National University)

Since elementary school students are in the concrete operational stages, they have to learn mathematics using intuitive methods. So teachers have to have knowledge on the intuition. In this paper we investigated specialized content knowledge on the intuition which have 8 elementary school teachers in problem solving process. They were asked to solve 8 problems in the questionnaire which were provided by the www.mathlove.net. As a result we found that 7 elementary school teachers have a lack of understand on the intuition in problem solving process.

Key Words : case study(사례 연구), elementary school teachers(초등교사), specialized content knowledge (전문화된 내용 지식), intuition(직관), mathematical problem solving process(수학 문제해결 과정)

논문접수 : 2012. 11. 9
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14