대한수학교육학회지 <학교수학> 제 14 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 14, No. 4, 445 ~ 468. Dec 2012

초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도(1)[1)]

이 화 영[*] · 장 경 윤[**]

본 연구는 산술적 바탕 위에 있는 학생들이 형식적인 대수 추론으로 자연스럽게 이행하는 것을 돕고자, 초등학생들이 대수 문제를 접하였을 때 사용하는 대수 추론 전략을 조사하였다.

총 839명을 대상으로 초등학생의 대수 추론 방법을 조사한 결과, 초등학생들이 연립일차방정식과 관련된 문장제의 해결에서 기존의 교과서에 제시된 방법 이외의 다양한 산술적 추론과 전형식적 대수 추론을 사용하는 것이 파악되었다. 또한, 대수 문제의 구조에 따라 학생들이 사용하는 추론 전략의 차이가 있음을 밝혔으며, 학생들의 대수 문제 해결에서 나타나는 추론상의 오류의 원인을 분석하였다. 특히, 초등학생들이 사용하는 '양적 추론'과 '비례적 추론'과 같은 전략들은 비형식적인 대입법, 이항법임을 밝혔다. 마지막으로, 이러한 전형식적 대수 추론들을 형식적 대수 추론으로 연결할 수 있는 가능성에 대하여 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

최근 대수 교육 연구에서는 전통적으로 구체적 조작기 이후에만 가능하다고 여겨졌던 대수를 어린 학생들에게 가르쳐야 하는가 또는 가르칠 수 있는가에 대하여 의문을 제기(Usiskin, 1988; Greenes & Findell, 2005, 장경윤, 2007에서 재인용)하는 것을 넘어서, 이제는 어린 학생들의 대수 교육과 대수적 사고 증진이 강조되고 있다(Lins & Kaput, 2004; Kieran & Chalouh, 1993). NCTM을 비롯한 최근의 권고들은 대수는 더 이상 높은 수준의 수학과 사회 활동을 위한 관문의 역할을 계속해서는 안 되며, 아래와 같이, 대수를 초등학교 저학년에서 시작하여 모든 학년에 걸쳐 가르쳐야 한다고 말한다.

> 모든 학생들은 대수를 배워야 한다. 교사들은 대수를 유아원 · 유치원의 교육과정에서 하나의 흐름으로 보고, 학생들이 중학교와 고등학교에서 보다 정교화된 대수 학습을 위한 준비 과정으로서의 건전한 이해와 경험의 기초를 쌓을 수 있도록 도와줄 수 있다(NCTM, 2000, p. 45).

특히, 이러한 흐름은 학생들이 대수 학습에서 겪는 어려움이 '발달 제한(developmental constraints)' 즉, 학생들의 발달이 어느 정도까지 도달하지 못

* 정왕초등학교, bornapril@hanmail.net
** 건국대학교, kchang@konkuk.ac.kr
1) 본 논문은 저자의 박사학위 논문(초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수 (Early Algebra) 지도, 2011, 건국대학교)의 일부를 요약한 것임.

하였을 것이라는 가정(Collis, 1975; Filloy & Rojano, 1989; Hercovics & Linchevsky, 1994)에서 기인할 수 있다는 인식과도 같이 한다. Lins & Kaput(2004)에 따르면, 조기 대수(early algebra) 교육을 찬성하는 연구자들의 공통된 생각은 초등학교 수학을 대수화하였을 때 어린이들의 수학적 사고에 일반화 능력이 향상되어 학생들에게 수학적 힘을 부여한다는 것이다.

우리나라 초등학교 수학 교육과정에서는 문제 해결 영역을 통하여 산술 문제와 대수 문제를 산술적으로 접근하도록 안내하고 있다. 이에 반하여, 중학교에서는 방정식을 통한 형식적 대수 전략을 사용하도록 하고 있어, 초등과 중등 교육 과정에서 사용하는 두 사고 유형간에 '간격'이 존재하게 된다. 이는 실제로 초등학생과 중학생들의 연립방정식 풀이 전략에 관한 연구(장지현, 2008)로 뒷받침된다. 따라서, 산술적 추론에서 형식적 대수 추론으로의 자연스러운 연결의 필요성이 대두되며, 본 연구는 여기에서 비롯된다.

본 논문에서는 초등학생들이 실제로 사용하는 산술적 추론, 전형식적 대수 추론 유형들을 발굴하고, 그것의 특징을 살펴보았다. 특히, 전형식적 대수 추론 방법은 산술적 추론에서 벗어나 있으면서, 대수 구문 규칙과 기호를 사용하지 않고, 문제에서 수학적 구조를 파악하거나 문제에 주어진 양들 사이의 관계를 파악하여 문제를 해결하는 방법이라고 정의할 수 있다.

본 논문에서 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

- 연구 문제 1 : 대수 문제 해결을 위해 초등학생들이 사용하는 산술적 추론, 전형식적 대수 추론은 무엇인가?
- 연구 문제 2 : 대수 문제 해결을 위해 초등학생들이 사용하는 대수 추론은 문제의 구조에 따라 다르게 나타나는가?
- 연구 문제 3 : 대수 문제 해결에서 실패하는 경우의 전략 사용의 특성은 어떻게 나타나는가?

위와 같은 연구 문제의 해결을 위하여 본 연구에서는 일차연립방정식 문장제 문제에 한정하여 학생들의 추론 방식을 조사하였다.

Ⅱ. 선행 연구

본 장에서는 연구 문제 해결을 위한 검사 도구 제작과 검사 결과 분석과 관련된 제이론의 내용들을 살펴본다.

1. 산술적 사고와 대수적 사고

본 연구의 목적이 산술에서 대수로의 연결을 염두에 두고 초등학생들의 대수 추론을 밝히고자 하는 것이므로, 산술적 사고와 대수적 사고의 특성과 유사점 및 차이점을 자세히 고찰하는 것은 매우 중요하다.

산술적 사고는 사칙연산이나 조작을 통하여 주어진 문제에 대한 해를 구하는 것이라고 할 수 있다. Sadovsky & Sessa(2005)에 따르면, 산술 문제 해결은 "기본적으로 데이터를 고르고, 그것을 조작하는 것으로 시작하여 미지수를 판정하고 그것을 조작하여 해결에 이르는 것(Vergnaud et al, 1987)"이다. 산술 문제 해결에서는 관련된 관계가 절대로 한꺼번에 다루어지지 않고 단계를 밟는 방식으로 이용된다. 반면, 문제 해결에서의 대수적 사고는, 상황으로부터 정보를 추출하고 추출된 정보를 바탕으로 기호와 변수를 이용하여 문법적으로 구조화된 형식으로 미지수를 해결하는 것이다.

대수를 정의하는 여러 관점 중, '일반화된 산술(Usiskin, 1988)' 혹은 '보편 산술(De Morgan, 1835, 1837; Maclaurin, 1748, Katz, 2007에서 재인용)'이라고 보는 것은 산술과 대수의 유사성을 뒷받침한다. 이때의 대수는 모든 수와 연산에 관한 일반적인 성질을 탐구하는 것으로, 대수가 산술과 동일한 원리와 동일한 수 연산의 아이디어 위에 놓여 있다고 볼 수 있다. 즉, 연산에서의 교환법칙, 결합-분배법칙, 연산의 성질 등은 대수에서도 그대로 성립한다.

산술과 대수의 차이점은 여러 가지로 나타난다. 먼저, 산술에서의 문제 해결은 기본적으로 특정한 상황에서의 수치적 해를 찾는 것이지만, 대수의 목적은 특수한 경우를 넘어 일반적인 방법을 찾아내고 표현하는 일이다. 또한, 산술은 알려진 수를 가지고 직접적인 계산을 다루는 반면, 대수는 미지수 또는 변수에 대한 추론이다. 이 외에도, 산술과 대수는 동등성의 개념, 문자, 기호, 표현 등에서도 차이를 보인다.

2. 산술 문제와 대수 문제

대수 추론 유형의 탐구와 이에 대한 검사 문항 제작을 위하여 산술 문제와 대수 문제를 명확히 구분할 필요가 있다. 흔히 대수의 문장제 문제를 '복잡한 산술 문제'라고 부르는 것과 같이, 산술 문제와 대수 문제를 혼동하기도 한다.

Bednarz & Janvier(1996)은 산술 문제와 대수 문제의 구분을 '연결성'의 관점에서 파악하였다. 산술에서 학생들에게 일반적으로 주어지는 문제는 이른바, '연결된' 문제인데, 이는 학생이 기지의 자료로부터 다른 조건들을 일련의 연산을 통하여 순차적으로 알아낼 수 있는 문제들이다. 반면, 대수 문제는 '연결되지 않은' 문제로서, 기지의 자료로부터 모르는 자료로의 직접적인 다리를 연결할 수 없다.

Puig & Cerdán (1990; Rojano, 2004에서 재인용)은 문장제 문제에서 문장을 식으로 변환하는 과정에서의 연산이 결국 문제에 주어진 자료에만 관련되는가, 아니면 미지 양에 관련되는가에 따라 각각 산술 문제와 대수 문제로 구분하였다. 결국 이것은 그 과정이 방정식이 되는가의 여부에 달려있다.

Filloy & Rojano(1984, 1989)는 일차방정식 차원에서의 산술과 대수 사이의 경계를 등호 양변의 미지수로 정의하였다(예, $an+b=cn+d$).

위와 같이 보았을 때, 어떤 문제를 산술 문제로 볼 것인가, 대수 문제로 볼 것인가에 대한 관점은 문제의 구조적 또는 형태적으로 연구자들의 공통된 의견을 도출해 낼 수 있다. 즉, 문제에서의 요소들이 실마리로부터 출발하여 해결에 이를 수 있도록 구조적으로 연결되어 있다면 이는 '순차적으로 풀기'가 가능할 것이므로 이는 산술 문제에 해당한다. 반면, 미지수가 양변에 있는 문제의 경우에는 대개 연립방정식으로 표현이 가능한데, 이는 이항이나 동류항끼리의 계산을 거쳐야만 하고 문제 해결자가 자발적으로 풀 수 없는 경우에 해당하여 대수 문제로 볼 수 있다.

3. 대수 추론 방법

본 절에서는 연구자들이 제시한 여러 가지 유형의 대수 추론 전략들을 탐구하여 학생들의 추론 전략 수준을 파악하는데 기준을 세우고 한다.

대수 문제 해결의 추론 방법은 고대로부터 여러 수학자들의 관심이 되어 왔다. Diophantos는 Arithmetica(A.D. 250년경)에서 대수 문제의 해법을 합차를 이용하는 방법, 동치를 두 번 이용하는 방법, 가설을 이용하는 방법, 임시값을 이용하는 방법을 제시하였다. al-Kh-warizmi는 '대수(algebra)'라는 용어를 처음 사용했다고 알려진 그의 논문 'Hisâb al-jabr ẃai-muquâbalah'에서 방정식론을 다루었는데, 여기서 그가 '이항과 소

거'의 방법을 제시한 이후로 오랫동안 이항과 소거가 방정식을 해결하는 주요 추론 방법으로 여겨지게 된다.

Van Dooren, Verschaffel, Onghena(2002)는 대수적 추론과 산술적 추론을 구분하였다. 그들은 식을 세워 문제를 해결하는 방법을 대수적 해법으로 보았으며, 산술적 추론을 크게 '구조를 조작하기', '예상하고 확인하기', '수를 생성하기'로 분류하였다. Bednarz & Janvier(1996)은 산술적인 수준에 있는 학생들의 대수 문제 해결 방식에 주목하여 '문제에서 알려진 것을 시작점으로 삼기', '가공의 수를 이용하여 출발 조건 만들기', '나누고 생성하기', '구조를 고려하기' 등의 유형으로 나누어 정리하였다. 박교식(2003)은 연립일차방정식 문제 해결에 있어서 '그림을 그려 알아보기', '규칙성 찾기', '비례적 사고'와 같은 아이디어를 제시하였다. Breiteig & Grevholm(2006)은 11학년 학생들에게 간단한 연립일차방정식 문제를 제시하여, 올바르게 해결하거나 정당화하는 유형을 정리하였다. 학생들은 '예상하고 확인하기', '표로 검사하기', '구조적으로 연산하기', '일반적으로 연산하기', '한 개의 방정식을 세우고 풀기', '두 개의 방정식을 세우고 풀기', '일반해 구하기' 등의 방법을 나타내었다.

산술적 추론과 형식적 대수 추론의 연결을 위한 대수 추론 전략을 연구한 연구자들도 있다. van Amerom(2002)은 연립방정식의 해결 방법들을 산술적, 전대수적, 대수적 추론으로 구분하여 제시하였다. 산술적 방법으로는 '시행착오', '시행조정' 전략, 전대수적 방법으로는 '양적 비교', '규칙 발견' 전략, 대수적 방법으로는 '가감승제에 의한 미지수 소거', '대수식 세우기' 방법을 들었다. 권석일과 임재훈(2007)은 방정식의 구조적 이해에 대한 어려움을 줄여줄 수 있는 방안으로 사각형의 길이와 넓이를 이용하는 그림그리기 전략을 제시하였다. 또한, 그들은 사각형의 길이와 넓이 그림 그리기를 통하여 연립일차방정식을 해결한 경험을 토대로 기호(△, □) 사용을 통한 비형식적인 가감법 아이디어를 제시하였다.

4. 대수 추론 방법의 분류

이상과 같은 문제 해결을 위한 대수 전략에 관한 여러 연구들을 살펴본 결과, 일반적으로 문자를 이용하여 식을 세우고 이항과 소거에 의한 추론을 '형식적 대수 추론'으로 본다면, 기호와 문자, 대수 구문을 이용하지 않는 대수 추론을 '비형식적 대수 추론'이라고 볼 수 있다. 본 연구자는 <표 Ⅱ-1>과 같이 각각의 대수 문제 해결 전략을 특징에 따라 범주화하고 추론 유형을 정의하였다.

<표 Ⅱ-1> 대수 추론의 특징별 분류

<table>
<tr><th colspan="2">추론 유형</th><th>특징</th><th>전 략</th></tr>
<tr><td rowspan="12">비형식적 대수추론</td><td rowspan="5">산술적 추론</td><td>직관적</td><td>그림 그려 세기</td></tr>
<tr><td rowspan="4">조작적</td><td>체계적 분배</td></tr>
<tr><td>나누고 조정</td></tr>
<tr><td>예상하고 확인</td></tr>
<tr><td>표로 검사</td></tr>
<tr><td rowspan="7">전형식적 대수추론</td><td rowspan="3">구조적</td><td>시각화로 구조 파악</td></tr>
<tr><td>구조적 연산</td></tr>
<tr><td>구조를 조작하기</td></tr>
<tr><td rowspan="3">분석적</td><td>규칙성 찾기</td></tr>
<tr><td>비례적 사고</td></tr>
<tr><td>양적 추론(양적 비교)</td></tr>
<tr><td>기하적</td><td>사각형의 길이· 넓이 그림</td></tr>
<tr><td colspan="3">형식적 대수추론</td><td>방정식 세우고 풀기
일반해 구하기</td></tr>
</table>

<표 Ⅱ-1>에서 '산술적 추론'은 직관적으로 세

거나 수를 조작하는 방법이다. 산술적 추론은 직관적 추론, 조작적 추론으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 직관적 추론은 문제 상황을 간단한 그림이나 도형, 수직선 등으로 구체화하여 표상함으로써 문제 상황의 이해를 돕고, 문제 해결의 결정적 역할을 한다. 대부분 표상된 그림의 개수나 수직선의 칸의 수를 셈으로써 해답을 얻을 수 있다. 조작적 추론은 수치적으로 여러 번의 계산에 의하거나, 계산에 의하여 다음 계산을 조정함으로써 문제를 해결하는 경우를 말한다.

대수식을 세워 문제를 해결하는 전략을 '형식적 대수 추론'이라고 하였을 때, '전(前)형식적 대수 추론'은 산술적 추론에서 벗어나 있으면서 변수와 기호, 대수 구문 규칙을 사용하지 않는 비형식적 대수 추론 유형이다. 즉, 전형식적 대수 추론은 문제의 구조를 이용하거나, 문제에 주어진 양들 사이의 관계를 이용하여 문제를 해결하는 추론 방법을 말한다. 전형식적 대수 추론은 산술적 추론에 비하여 문제 구조에 대한 논리적인 근거를 가지고 숨어있는 방정식의 미지수를 소거하므로, 형식적 대수 추론에 한층 가까운 추론 유형이다. 전형식적 대수 추론은 특징에 따라 구조적 추론, 분석적 추론, 기하적 추론으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 구조적 추론은 그림 등의 시각화 수단 등을 이용하여 문제의 구조를 파악한 후, 이를 계산하여 해결하는 경우이다. '시각화로 구조 파악', '구조적 연산', '구조를 조작하기' 등이 이 경우에 속한다. 분석적 추론은 양들 사이의 규칙성을 찾아내어 문제를 해결하거나, 양들 사이의 비례 관계를 이용하여 미지수를 소거하는 추론 유형이다. 또한, 양적인 비교를 통하여 양들 사이의 '차' 또는 '비' 를 찾아내어 이를 문제 해결의 단서로 이용하기도 한다. 기하적 추론은 방정식의 미지수를 그림에서의 한 요소로 표현하여 직관적 도구를 통하여 직접적으로 미지수를 소거하는 방법의 일종이다. '시각화로 구조 파악' 방법은 문제 상황의 시각화를 통하여 드러난 문제 구조를 식으로 표현하거나 계산하여 해에 이르도록 하는 전략이다. 전형식적 대수 추론에서의 '사각형의 넓이와 길이 그림'과 같은 기하적 추론은 양 사이의 관계를 그림으로 표현하여 이를 이용하여 미지항을 소거하는데 목적을 두며, 대수적 추론 방법인 가감법의 비형식적인 전략이라는 점에서 '시각화로 구조 파악' 방법과는 차이가 있다.

형식적 대수 추론은 문자와 기호를 사용하여 문제를 식으로 표현하고, 대수 규칙을 써서 해를 구하는 추론 방법이다. 방정식을 세우고 푼다든지, 일반해를 구하는 경우가 이에 해당한다.

5. 우리나라 교육과정에서의 대수 추론 유형

<표 Ⅱ-2> 초등학교 교육과정에서의 문제 해결 추론 전략의 지도 내용

학 년 전 략	1-2	2-2	3-2	4-2	5-1	5-2	6-1	6-2
식 세우기	○			○		○		○
그림 그리기	○				○	○	○	○
미지수가 있는 식 세우기	○	○					○	○
거꾸로 생각하기		○			○		○	○
예상하고 확인하기			○		○	○	○	○
표 만들기			○		○	○	○	○
식을 세워 예상하고 확인하기						○		

본 절에서는 우리나라 교육과정에서의 대수 추론을 조사하여 학생들의 대수 추론의 분석을 위한 기초로 삼고자 하였다.

우리나라 교육과정에서 다루는 대수 추론 유형을 분석하기 위하여 초등학교 교과서와 중학교 교과서를 분석하였다. 초등학교 수학 교과서는 2007개정교육과정[2] 수학교과서(1학년 1학기~4학년 2학기), 제7차 개정교육과정 초등학교 수학교과서(5학년 1학기~6학년 2학기)를 분석하였다. 중학교 교육과정은 중학교 1학년 수학교과서 3종(이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원, 2009; 신항균, 이광연, 윤혜영, 이지현, 2009; 정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 서혜숙, 박부성, 강은주, 2009)을 분석하였다.

초등학교 교육과정에서 방정식과 관련된 '문제해결' 영역에서 다루고 있는 추론 유형을 초등학교 교과서와 교사용 지도를 근거로 분석하였다. 그 결과, 1학년 2학기에서 '식 세우기', '그림 그리기', '실제로 해보기' 전략으로부터 시작하여 6학년까지 산술 문제와 대수 문제에 대하여 '예상하고 확인하기', '규칙 찾기', '거꾸로 풀기', '그림 그리기', '표 만들기', '단순화하기', '미지수가 있는 식 만들기', '식을 만들어 예상하고 확인하기'까지 산술적 전략의 지도가 반복되며 확대되는 것을 알 수 있었다.

<표 Ⅱ-2>에서 알 수 있듯이, 우리나라 초등학교 교과서에서 문제 해결과 관련된 전략의 대부분이 산술적 전략으로 제시되어 있다. 또한, 연립일차방정식의 문장제의 해결 또한 '예상하고 확인하기' 등의 산술적 전략으로 해결하도록 제시되어 있다. 한편, '식을 세워 예상하고 확인하기'는 형식적 대수 추론을 염두에 두고 있다고 볼 수 있을 것이나, 예상하고 확인하기의 원리가 등식 양변의 동등성에 기초한 식 세워 풀기의 이해에 기여하지 못하므로, 이것이 산술적 추론과 형식적 대수 추론의 연결에 도움을 준다고 할 수는 없을 것이다.

이는 우리나라 중학교 1학년 교과서에 의하여 더욱 뒷받침된다. 우리나라 중학교 1학년 교과서의 방정식 단원을 살펴보면, 내용 제시 방식에 있어 여러 교과서들이 일반적으로 1) 등식의 성질, 2) 등식의 성질을 방정식에 이용하여 푸는 것을 '이항'이라고 정의, 3) 일차방정식을 이항에 의하여 풀기의 순서로 제시되어 있다. 일차 방정식 관련 문장제는 '일차방정식의 활용' 차시에서 다루는데, 이때에는 문장제에서 구하고자 하는 것을 x로 놓고 방정식을 세워 풀도록 제시되어 있다. 이렇게, 중학교 1학년에서 이미 완전한 형식적 대수 추론 방법이 제시되고 있으며, 초등학교에서 다루었던 여러 가지 산술적 전략들이 관련되지 않는다.

요약하면, 우리나라 교과서에서는 일차방정식 관련 문제를 다룰 때, 산술적인 전략과 형식적인 대수 전략이 서로 연결되지 않는다는 것이다. 이는, 학생들이 초등학교와 중학교 교육과정 사이에서 전형식적 대수 추론 방법을 접할 기회가 없다는 것을 의미한다.

Ⅲ. 연구 방법

초등학생의 대수 추론 전략을 검사하기 위하여 본 연구에서는 10개의 본검사 문항을 개발하였으며, 학생들의 추론 전략 분석을 위하여 예비검토를 통하여 <표 Ⅱ-1>을 참고하여 추론 전략 분류의 기준을 정하여 적용하였다. 통계 측정 방법은 문항별·추론 전략별로 정답자 수를 측정하였으며, 각 문항에서 학생들이 사용한 추론 전략

2) '2007 개정 교육과정'은 2009년부터 1, 2학년에 적용, 2010학년부터 3, 4학년, 2011학년도부터 5, 6학년도에 적용되었다. 따라서, 본 연구를 실시한 2010학년도에는 1~4학년까지는 '2007개정교육과정'이, 5~6학년은 '제7차 개정교육과정'이 적용되었다.

의 예를 면밀히 검토하였다.

1. 검사 도구

검사 문항 제작을 위하여 27개의 대수 추론 검사 문항을 개발하여 예비검사를 실시하였다. 대수 추론 검사를 위한 대수 문제는 전술하였듯이 문제에 주어진 조건에 의한 '순차적으로 풀기'가 불가능하며 양 변에 미지수가 있거나 연립일차방정식으로 표현이 가능한 문제들로 대부분 구성하였다. 개발된 문항을 예비검사를 통하여 문항의 적절성, 난이도, 타당도를 고려하여 수정하고 보완하여 최종적으로 총 10개의 본검사 문항을 제작하였다. 본검사 문항은 <부록 1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 학년별 검사 적용 문항

적용학년 / 문항코드	1	2	3	4	5	6
2UC1		○	○	○	○	○
2UC2		○	○	○	○	○
2US	○	○	○	○	○	○
2TS	○	○	○	○	○	○
2TC		○	○	○	○	○
2UM		○	○	○	○	○
2TM	○	○	○	○	○	○
3TA			○	○	○	○
3TM			○	○	○	○
3TC			○	○	○	○

검사 문항은 2원 1차(2), 3원 1차(3) 방정식 문제로, 연산 구조로는 덧셈(A) 및 뺄셈(S) 구조, 곱셈(M) 및 나눗셈(D) 구조 문항, 혼합셈(C) 구조의 문항이다. 2원 1차 방정식 문항에서는 1개의 미지수로 방정식 표현이 쉬운 문항(U)과 2개의 미지수로 방정식 표현이 쉬운 문항(T)을 구별하여 구성하였다. 또한, van Dooren 외(2002)이 제시한 수학 문장제의 의미적 구조의 분류를 참고하여 그가 제시한 '비등분할', '변환', '양들 사이의 관계'의 의미 구조를 지닌 문장제가 본 검사 문항에 골고루 포함되도록 문항을 구성하였다.

검사지에는 학년 수준에 따라 수의 크기를 다르게 하여 동형 문항을 제시하였으며, 다음 <표 Ⅲ-1>과 같이, 학년에 따라 검사 문항을 다르게 적용하였다.

2. 검사 대상 및 검사 방법

예비검사는 경기도 E초등학교 2~6학년의 각 한 학급 집단을 대상으로 담임교사의 주관 하에 독립적으로 27개의 검사문항으로 실시하였다. 예비검사 인원은 2학년 30명, 3학년 28명, 4학년 34명, 5학년 30명, 6학년 27명으로 총 149명을 대상으로 실시하였다.

본검사는 인천광역시 E초등학교 1~6학년[3] 339명과 경기도 시흥시 J초등학교 1~6학년 361명, 총 690명을 대상으로 실시하였다. 학년별 검사 인원은 1학년 104명, 2학년 115명, 3학년 109명, 4학년 114명, 5학년 119명, 6학년 129명이다. 검사는 2010년 12월 6일~22일에 걸쳐 학급 담임교사의 감독 하에 각 반별로 실시되었다.

3. 분석 방법

본검사 결과를 분석하기에 앞서 학생들이 사용한 대수 추론 방법의 분석을 명확히 하기 위하여 추론 전략들간의 관점을 분명히 정할 필요가 있다.

산술-조작적 추론에서 '예상하고 확인' 전략은 특정수를 예상하고 문제의 조건에 맞추어 계산하여 정답 유무를 확인하는 추론 방법으로, 본 연구에서는 '표로 검사' 방법과는 차이를 두었

3) 본 연구에서는 검사 대상을 초등학교 전학년을 대상으로 선정하였다. 이는 동류 문항이라도 초등학교 저학년과 중학년, 고학년 사이에 여러 차원의 전략 수준을 보고자 하였기 때문이다.

다. '표로 검사'가 연속된 수들을 차례대로 빠짐없이 검사하는 것임에 비하여 '예상 확인'은 특정수 또는 표의 형태로 그렸다고 하더라도 비연속적인 수들을 임의적으로 검사하는 것이다.

산술-조작적인 추론 방법 중에서 '나누고 조정'과 '체계적 분배'사이에도 차이가 있다. '나누고 조정'은 문제에서 주어진 양을 일단 2등분이나 3등분 한 후 작은 수들을 빼거나 더함으로써 문제의 조건에 맞는 해답을 찾아가는 과정을 거치는 전략이다. '체계적 분배'는 비등분할 문제를 주어진 양을 큰 양에서부터 작은 양으로 순차적으로 나누어 분배함으로써 해결해 나가는 전략이다.

전형식-구조적인 '구조적 연산'과 전형식-분석적인 '양적 추론'간에도 분명한 차이를 둔다. '구조적 연산'은 문제의 구조 파악을 바탕으로 하여 수식을 세우거나 계산하는 추론 전략이다. '양적 추론'은 문제에서 주어진 양들을 서로 비교함으로써 '차(差)' 또는 '비(比)'를 파악하고 이를 계산에 이용하는 추론 방식이다.

이렇게 대수 추론의 특성에 따라 명료화된 분석 관점을 반영하여, 학생들이 검사 문항에서 사용한 추론을 일관성 있게 분류하기 위하여 <부록 2>와 같은 분류 기준을 세우고, 이에 따라 학생들의 풀이를 분석하였다. 통계를 위하여 각 문항에서 정답자 수를 파악하였는데, 만약 한 가지 답안에서 두 가지의 추론 전략을 동시에 사용한 경우에는 해당 전략을 모두 0.5명씩으로 정답자 수에 반영하였다.

학생들의 답안 분석은 연구자와 전문가의 상호 교차 검토를 통하여 이루어졌다.

Ⅳ. 연구 결과

학생들의 본검사 답안을 분석한 결과, 총 정답률은 31.2%로, 1학년 12.8%, 2학년 9.4%, 3학년 17.2%, 4학년 29.9%, 5학년 39.2%, 6학년 54.7%이다.

추론 전략별로 정답자수와 정답률을 조사한 결과, 산술적 방법을 사용한 정답자수가 1,292명으로, 총 정답자 수 1,818.5명에 대비하여 약 71.0%에 해당하였다. 전형식적 대수 추론을 사용한 정답자 수는 334명(18.4%), 대수적 방법을 사용한 정답자는 74명(4.1%)로 나타났다.

학생들이 가장 보편적으로 사용하는 추론 전략은'예상하고 확인(48.8%)'이었고, '구조적 연산(13.5%)', '나누고 조정(11.2%)', '표로 검사(10.0%)'등이 주요 해결 방법으로 나타났다.

또한, 10개의 문항에서 추론 전략의 출현 빈도를 파악하였을 때, '예상하고 확인하기', '표로 검사하기', '방정식 세워 풀기'방법은 모든 문항에서 항상 나타났으며, '구조적 연산(7문항)', '나누고 조정하기(5문항)', '비례적 사고(5문항)', '시각화로 구조 파악(5문항)', '양적 추론(4문항)'등의 비형식적인 추론 전략들이 많은 문항에서 유효하게 사용되고 있다는 것을 확인하였다.

1. [연구 문제 1]에 따른 연구 결과

본 논문의 연구 문제 1은 다음과 같다.

> [연구 문제 1] 대수 문제 해결을 위해 초등학생들이 사용하는 산술적 추론, 전형식적 추론은 무엇인가?

가. 산술적 추론

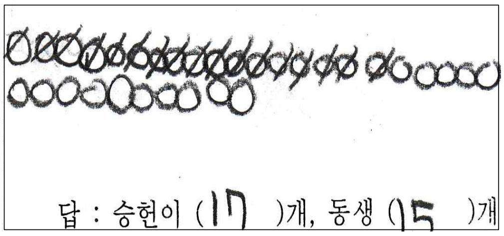
초등학생들이 대수 문제 해결에서 사용하는 산술적 추론 전략은 빈도가 높게 나타난 전략은 '예상하고 확인', '나누고 조정', '표로 검사', '그림 그려 세기', '체계적 분배'의 순서이다. 특히 '체계적 분배', '나누고 조정' 전략은 교육과정에서는 지도하고 있지 않으나, 학생들이 사용하고

있다는 점이 주목할 만하다.

2UC문항에서 학생들의 산술적 전략이 비교적 다양하게 나타났으므로, 이 문항을 중심으로 산술적 추론 전략을 기술하도록 한다. ‘예상하고 확인’, ‘표로 검사’는 일반적으로 이미 잘 알려진 전략이므로 여기에서는 기술을 생략한다.

그림 그려 세기

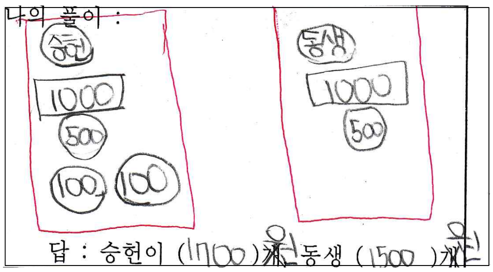
[그림 Ⅳ-1]에서 학생은 문제에서 주어진 3,200원을 100원짜리 동전 32개의 그림으로 그렸다. 문제의 조건에 맞추어 ‘승헌이’가 ‘동생’보다 더 가져야 할 동전 2개를 포함하여, ‘승헌이’가 가져야 할 동전을 하나씩 표시해 나간 뒤, ‘동전의 개수를 세어서 답을 구한 것을 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 2UC : 그림 그려 세기(2학년)

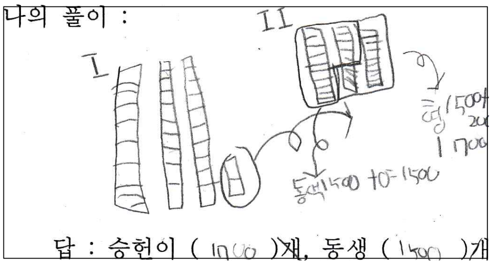
체계적 분배

‘체계적 분배’ 전략은 주어진 양을 큰 단위에서부터 또는 차이가 나는 양부터 의도적으로 순차적으로 비등분할 하는 추론 전략이다.



[그림 Ⅳ-2] 2UC : 체계적 분배 (5학년)

[그림 Ⅳ-2]에서, 학생은 우선 큰 단위의 양부터 분배하기 시작한다. 두 사람에게 각각 1,000원씩을 먼저 분배한 후, 남은 1,200원 중 1,000원을 500원씩으로 양쪽에 똑같이 분배한다. 남은 200원을 ‘승헌’ 쪽에 포함시켜 답을 구하였다.

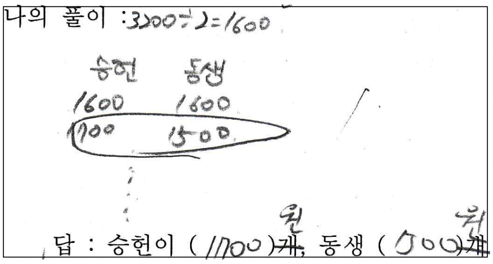


[그림 Ⅳ-3] 2UC : 체계적 분배(3학년)

[그림 Ⅳ-3]과 같이, 차이가 나는 200원을 미리 따로 놓은 다음 나머지 돈을 똑같이 분배한 후, 다시 200원을 더하는 방식으로 분배하는 학생들도 있었다.

나누고 조정하기

‘나누고 조정하기’는 주어진 양을 조건에 따라 2 또는 3 정도의 양으로 등분한 다음, 세부 조건에 따라 양을 높이거나 낮추어 답을 찾아나가는 전략이다.



[그림 Ⅳ-4] 2UC : 나누고 조정하기(4학년)

[그림 Ⅳ-4]에서 4학년 학생은 3,200원을 똑같이 2로 나누어 각각을 1,600원으로 놓는다. 그리고 한 쪽이 다른 한 쪽보다 200원이 많다는 조건에 맞추어 조정하기 시작한다. 한쪽에서 100원을 낮추고 다른 한 쪽에서 100원을 올림으로써 해에 이르는 것을 알 수 있다.

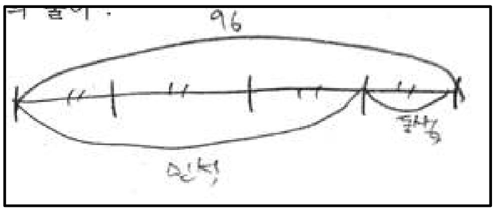
나. 전형식적 대수 추론

연립방정식과 관련된 문장제 문제의 해결에서 초등학생들은 산술적 추론뿐만 아니라 다양한 전형식적 대수 추론을 사용하는 것으로 나타났다. 특히, 우리나라 초등학교와 중학교 교육과정에서 전형식적 대수 추론을 다루고 있지 않은데 반하여 실제로 학생들은 '시각화로 구조 파악', '구조적 연산', '양적 추론', '비례적 사고' 등의 전형식적 대수 추론을 하고 있음이 파악되었다. 또한, 일부 학생들은 두 가지의 전형식적 대수 추론을 동시에 사용하여 문제를 해결하기도 하였다. 다음은 학생들이 사용한 주요 전형식적 대수 추론 전략의 예이다.

시각화로 구조 파악

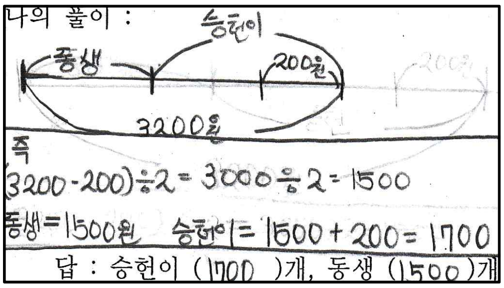
대수 문제의 해결에서 시각화는 문제의 구조를 드러내는데 매우 효과적인 방법이다. '시각화로 구조 파악' 전략은 문제의 요소들을 그림, 도식, 표, 수직선 등의 수단을 통하여 시각화하여 문제의 구조를 파악한 후, 이를 계산에 반영하여 해답을 찾는 방법이다.

[그림 Ⅳ-5]에서 4학년 학생은 '민서'가 '동생'의 3배라는 것을 수직선 그림으로 그렸다. 전체가 4등분으로, '민서'는 그 중 3부분이며 '동생'은 1부분인 구조를 시각화를 통하여 파악한 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-5] 2UM : 시각화로 구조 파악(4학년)

2US문항에서도 5학년 학생이 총 3,200원 중 '승헌이'가 '동생'보다 200원 더 많이 갖는 구조를 [그림 Ⅳ-6]과 같이 표현하였다. 수직선을 그림으로써, 문제 구조를 파악하는데 도움을 얻었음이 드러난다.

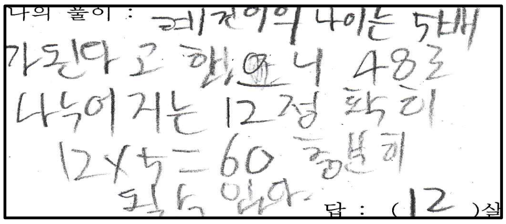


[그림 Ⅳ-6] 2US : 시각화로 구조 파악(5학년)

구조적 연산

Freudenthal(1991)은 문장제를 해결할 때 문맥 안에서 수학적인 구조를 파악하고 적용할 수 있는지를 판단하고 이를 활용하여 문제를 해결하는 방법을 학생들에게 가르치는 것은 수학자들의 문화에 적응시키는 좋은 방법이라고 하였다. '구조적 연산'은 문제의 구조 파악을 바탕으로 하여 식을 세우거나 계산에 의하여 해결해 나가는 방식이다.

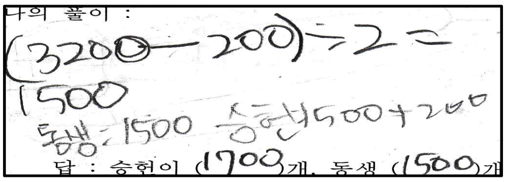
[그림 Ⅳ-7]에서 학생은 문제에서의 구조를 파악한 것을 알 수 있다. 48년 후의 나이가 올해 나이의 5배라고 하였으니, 올해 나이가 1배라면 5배에서 1배를 뺀 48을 4로 나누어 구한 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-7] 2UC1 : 구조적 연산(4학년)

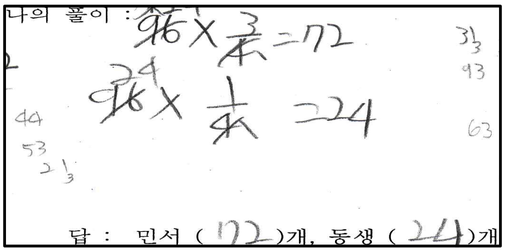
[그림 Ⅳ-8]에서도 4학년 학생이 문제 전체의 구조를 파악한 후, 그에 따른 계산을 하였음을 알 수 있다. 즉, $a+(a+200)=3,200$ 이라는 구조를 파악한 후, 거꾸로 계산해 나간 후, 200원을

한 쪽에 붙이는 방식으로 해답을 구한 것을 볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-8] 2US : 구조적 연산(4학년)

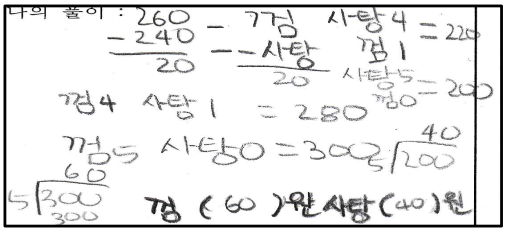
2UM문항에서도 문제의 구조를 파악하고 그것을 산술식으로 표현하여 간단히 답을 구한 예를 찾아볼 수 있다. [그림 Ⅳ-9]에서 5학년 학생은 민서와 동생을 합하여 전체가 크게 4부분이 된다는 것을 파악한 후, 그것을 일반식에 가까운 계산에 적용하여 답을 구하는 것을 알 수 있다.



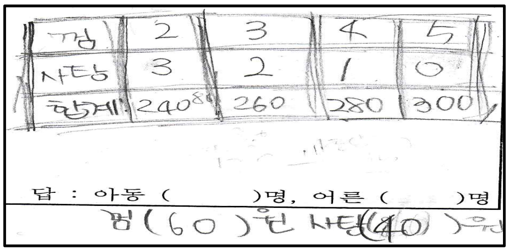
[그림 Ⅳ-9] 2UM : 구조적 연산 (5학년)

양적 추론

‘양적 추론’ 전략은 문제에서 주어진 양들을 서로 비교함으로써, ‘차’나 ‘비’를 파악하고 이를 계산에 이용하는 방법이다. 양적 추론에 대한 정의는 분명하지 않으나, 양적 추론에 대한 Thompson(1993)과 Smith와 Thompson(전형옥 외, 2008)에 따르면, 양적 추론은 ‘상황을 양적 구조 즉, 양과 양의 관계의 연결망 구조로 분석하는 것’, ‘양과 양 사이의 관계에 대한 이해를 통해 추론하는 것’이다.

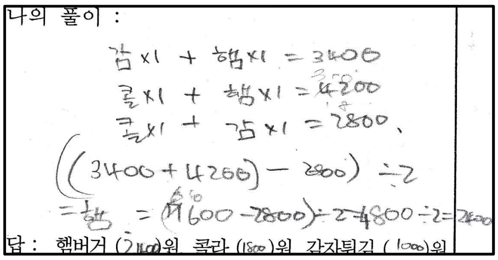


[그림 Ⅳ-10] 2TM : 양적 추론(6학년)



[그림 Ⅳ-11] 2TM : 양적 추론(5학년)

2TM문항에 관한 [그림 Ⅳ-10]와 [그림 Ⅳ-11]에서 두 학생 모두 두 식을 비교하여 ‘껌’이 ‘사탕’보다 20원 비싸다는 것을 파악하였다. 그리고 나서 ‘껌’을 ‘사탕’에 관한 식으로 점차 바꾸어 나감으로써 ‘사탕’을 모두 소거하고 ‘껌’의 가격을 구하였다. 이러한 추론 방법은 한 양을 다른 양에 관하여 바꾸어 표현함으로써 소거하는 비형식적인 ‘소거법’이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅳ-12] 3TA : 양적 추론(4학년)

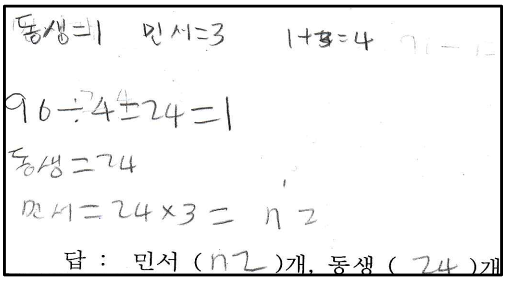
3TA문항 풀이인 [그림 Ⅳ-12]에서 4학년 학생의 경우에는 두 식을 더한 후, 두 식에 공통적으로 들어가 있는 ‘햄버거’를 남겨두기 위해 ‘감자’

와 ‘콜라’의 합인 세 번째 식을 뺌으로써, ‘햄버거’ 2개의 값을 알아내고, 이를 2로 나누고 ‘햄버거’ 1개의 가격을 구해내었다. 위의 예는 양의 관계를 파악하여 미지항을 소거해 나가는, 비형식적인 ‘대입법’이 사용된 것을 알 수 있다.

비례적 추론

‘비례적 추론’ 또한 ‘비’를 통한 양적 추론이라고 할 수 있다. 즉, 비례적 추론은 양들 사이의 비례 관계를 이용하여 문제를 단순화하거나 주어진 양들을 조작하는 방법이다. 비례 관계를 ‘본질상 곱의 수학적 관계’(Ben-Chaim, et, al., 1998)라고 정의하면, 비례적 추론은 양들 사이의 비교를 통한 승법적 ‘비’를 이용한 추론이라고 할 수 있다. 비례 추론은 학교 교육과정에서 성공하기 위한 필수적인 요소이며 인지 발달에서 가장 높은 단계로 고려되고 있다.

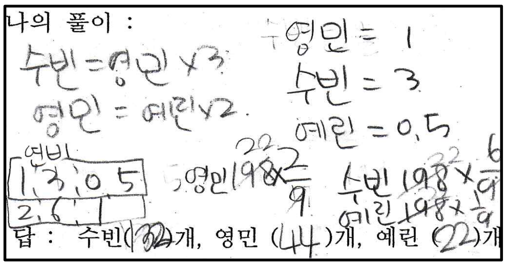
[그림 Ⅳ-13]에서 학생은 ‘민서’와 ‘동생’의 양의 관계를 1 : 3인 비로 파악한 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-13] 2UM : 비례적 사고(6학년)

3TM문항에서도 비례적 추론의 예를 찾아볼 수 있다. [그림 Ⅳ-14]에서 6학년 학생은 처음에는 ‘영민이’를 기준량인 1로, ‘수빈이’는 3, ‘예린이’는 0.5로 파악하였으나, 비례식의 성질에 의하여 1 : 3 : 0.5를 2 : 6 : 1로 환산하였다. ‘영민이’를 기준량 1로 보았을 때 전체는 비례관계에 의하여 9라는 것을 파악한 후, ‘영민이’는 198의 $\frac{2}{9}$에 해당하는 양, ‘수빈이’는 $\frac{6}{9}$, ‘예린이’는 $\frac{1}{9}$에 해당하므로 각각을 분수의 곱셈을 통하여 구하였다.

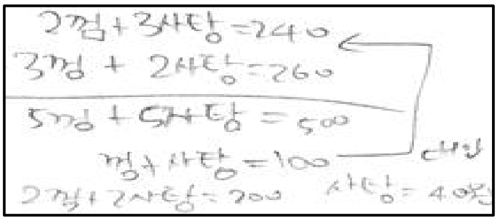
비례적 추론 전략은 주로 6학년에서 많이 발견되었다.



[그림 Ⅳ-14] 3TA : 비례적 추론(6학년)

두 가지 이상의 전략을 함께 사용

학생들은 한 가지 추론 방법을 사용하기도 하지만 때때로 두 가지 이상의 추론 방법을 동시에 사용하는 예들을 볼 수 있었다. 이러한 예는 주로, ‘식 세우기를 통한 예상-확인’, ‘양적 추론을 통한 예상-확인’, ‘양적 추론을 통한 비례적 추론’등이다.

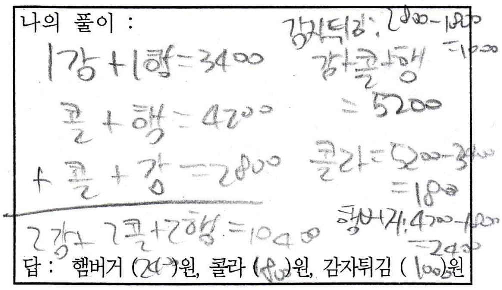


[그림 Ⅳ-15] 2TM : 비례적 추론을 통한 양적 추론(5학년)

[그림 Ⅳ-15]에서 보면, 두 식을 합한 후 ‘비례적 추론’을 이용하여 ‘껌+사탕=100’이라는 것을 추론하였다는 것을 알 수 있다. 또 다시 2배의 비를 이용하여 ‘껌 2개+사탕 2개=200원’이라는 생각에 이른다. 이 식을 처음의 식과 비교하여 사탕이 40원이라는 해답을 얻게 되는 과정에서는 양적 추론을 사용한 것을 알 수 있다. 이러한

방법은 비형식적인 '가감법'과 유사하다.

[그림 Ⅳ-16]도 이와 유사하다. 여기에서 6학년 학생은 문제의 조건을 각각 세 개의 식으로 나타낸 후, 세 개의 식을 모두 더하여 '감자튀김 2개 + 햄버거 2개 + 콜라 2개 = 10,400원'이라는 것을 파악한다. 이 때, '비례적 추론'에 의하여 양 변을 2로 나눈 '감자튀김 + 햄버거 + 콜라 = 5,200원'을 구한다. 그리고나서 이 학생은 새롭게 추론해 낸 식과 처음에 문제의 조건에 따라 썼던 식을 차례대로 그 양을 비교하는 양적 추론을 통하여 각각의 가격을 구하는 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-16] 3TA : 비례적 사고를 통한 양적 추론 (6학년)

[연구 문제 1]에 따라 분석한 결과, 학생들이 대수 문제 해결에서 사용하는 산술적 추론은 '예상하고 확인', '나누고 조정', '표로 검사', '체계적 분배', '그림 그려 세기' 등으로 나타났다. 또한 학생들은 '시각화로 구조 파악', '구조적 추론', '양적 추론', '비례적 추론' 등의 한층 대수적 추론에 가까운 방법인 전형식적 대수 추론을 사용하기도 하는 것을 알 수 있었다. 특히, 이러한 전형식적 대수 추론들은 형식적 대수 추론방법인 '대입법', '가감법' 등의 비형식적 표현인 것을 파악할 수 있다.

2. [연구 문제 2]에 따른 연구 결과

본 논문의 연구 문제 2은 다음과 같다.

> [연구 문제 2] 대수 문제 해결을 위해 초등학생들이 사용하는 대수 추론 전략은 문제 구조에 따라 다르게 나타나는가?

가. 의미 구조에 따른 대수 추론 전략

van Dooren 외 (2002)는 문장제 문제의 의미 구조에 대하여 '비등분할', '변환', '양들 사이의 관계'로 제시한 바 있다. 이에 따라 본검사 문항을 분류하면, 다음 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 의미 구조에 따른 추론 전략

의미 구조	비등분할	변 환	양들 사이의 관계
문항	2US, 2UM, 3TM, 3TM	2UC1, 2UC2, 2TC	2TS, 2TM, 3TA
정답률	27.3%	24.0%	27.4%
공통 전략	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 **나누고 조정** **구조적 연산** **시각화로 구조 파악** **비례적 추론**	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 **구조적 연산**	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 **양적 추론**

의미 구조에 따른 추론 전략을 분석한 결과, 모든 의미 구조에서 '예상하고 확인', '표로 검사', '대수식 세우기' 전략이 나타났다. '비등분할'구조를 가진 문항들은 4문항 모두에서 '나누고 조정', '구조적 연산' 전략이 나타났고, 3문항(2UM, 3TM, 3TC)에서 '시각화로 구조 파악', '비례적 추론' 이 공통적으로 나타났다. '변환' 구조를 가진 2UC1, 2UC2 문항에서 '구조적 연산' 추론이 공통적으로 나타났으며, '양들 사이의 관계'구조를 가진 문항은 2TS, 2TM, 3TA인데, 이들 세 문항 모두에서 '양적 추론'전략이 공통적으로 나타났다. 이러한 결과를 <표 Ⅳ-1>에 정리

하였다.

나. 연산 구조에 따른 대수 추론 전략

본검사 문항은 '덧셈 또는 뺄셈' 구조를 가진 문항, '곱셈 또는 나눗셈' 구조를 가진 문항, 또한 이들 덧셈 또는 뺄셈과, 곱셈 또는 나눗셈 구조가 섞여 있는 '혼합' 구조로 구성되었다. 이러한 연산 구조에 따른 본검사 문항은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 연산 구조에 따른 추론 전략

의미 구조	덧셈 · 뺄셈	곱셈 · 나눗셈	혼합 구조
	2US, 2TS, 3TA	2UM, 2TM, 3TM	2UC1, 2UC2, 2TC, 3TC
정답률	36.7%	23.4%	20.8%
공통 전략	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 구조적 연산 **양적 추론**	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 구조적 연산 **비례적 추론** **시각화로 구조 파악**	예상하고 확인 표로 검사 대수식세우기 구조적 연산

문항의 연산 구조에 따라 학생들이 사용한 추론 전략을 분석한 결과, 모든 연산 구조에서 '예상하고 확인', '표로 검사', '대수식 세우기', '구조적 연산'추론이 나타났다. 주요 결과를 다음 <표 Ⅳ-2> 에 제시하였다.

<표 Ⅳ-2>에 따르면, '덧셈 · 뺄셈'구조를 가진 문항에서는 특히 '양적 추론' 전략이 유효하게 나타났으며, '곱셈 · 나눗셈' 구조를 가진 문항에서는 '비례적 추론'과 '시각화로 구조 파악'전략이 나타났다. '혼합' 구조에서는 다른 구조에서 나타난 전략들이 나타나지 않는다는 점이 특징이다.

[연구 문제 2]에 의하여 분석한 결과, 본 연구에서 구안한 모든 의미 구조와 모든 연산 구조에서 학생들이 '예상하고 확인', '표로 검사', '대수식 세우기'의 추론을 사용한다는 것을 알 수 있었으며, 문제의 의미 구조나 연산 구조에 따라 학생들이 유효하게 사용한 추론 전략의 차이가 파악되었다.

3. [연구 문제 3]에 따른 연구 결과

본 논문에서 설정한 연구 문제 3은 다음과 같다.

[연구 문제 3] 대수 문제 해결에서 실패하는 경우의 전략 사용의 특성은 어떻게 나타나는가?

초등학생들이 문제 해결에서 사용한 추론 전략을 파악하기 위해서는 문제 해결에 성공한 경우뿐만 아니라 실패한 경우의 추론 전략 조사도 필요하다. 본 절에서는 문항에 대한 오답 추론 통계를 살펴보고, 실패 사례의 원인을 분석할 것이다.

본 절에서는 문항에 대한 학생들이 잘못 추론한 경우의 특성을 자세히 알아보기 위하여 본검사 문항들 중 3TA문항에 대한 오답의 추론을 자세히 다루기로 한다.

3TA문항에서 학생들이 사용한 추론 전략은 <표 Ⅳ-3>과 같다.

위의 <표 Ⅳ-3>에 따르면, 3TA 문항에서 가장 많이 실패한 전략은 '예상하고 확인(12.6%)', '나누고 조정(11.7%)'이다.

산술적 전략을 시도하여 실패한 비율은 24.5%로, 전형식적 대수 추론이나 형식적 대수 추론의 실패율보다 훨씬 높은 것을 알 수 있다. 표에는 제시하지 않았으나, 학년별 분포를 살펴보았을 때에도 오히려 6학년으로 갈수록 산술적 전략을 시도하는 아동의 수도 많아지고 그에 따른 실패율도 커지는 점을 파악할 수 있었다.

<표 Ⅳ-3> 3TA 문항 추론 전략별 통계(3~6학년)

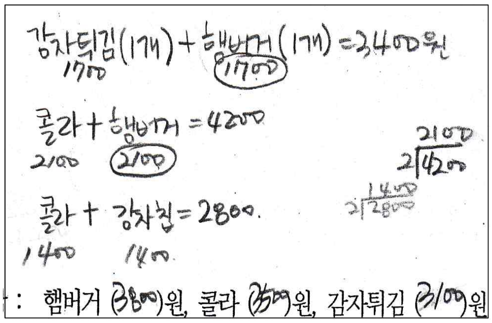
(N=471)

추론 전략 \ 계		학생수 소계	학생수 정답/오답	백분율 (%)	오답률 (%)
나누고 조정		55	0	0	24.5
			55	11.7	
예상하고 확인		156	96.5	20.5	
			59.5	12.6	
표로 검사		2	1	0.2	
			1	0.2	
시각화로 구조파악		13	2	0.4	9.2
			11	2.3	
비례적 사고		13	7	1.5	
			6	1.3	
양적 추론		33.5	7	1.5	
			26.5	5.6	
방정식 세워 풀기		2.5	2.5	0.5	0
			0	0	
기타	기타 전략	51	6	1.3	39.7
			45	9.6	
	풀이 방법 없음	145	3	0.6	
			142	30.1	
총 계		471	125	26.5	73.4
			346	73.4	

'예상하고 확인', '나누고 조정' 시도율과 실패율이 동시에 가장 높다는 사실은 이들 전략이 3TA문항에서 적합하지 않거나 적절히 수행되지 않았다는 사실을 말해준다. 다음에서 추론 전략 선택이 적절하지 않은 경우와 추론 전략 적용이 적절하지 않은 경우로 나누어 사례를 자세히 살펴본다.

가. 추론 전략 선택 오류

학생들이 대수 문제를 해결할 때 유효한 추론 전략을 선택하지 못하면 시도에 그치거나 성공하지 못한다. 다음에서 추론 전략을 잘못 선택한 예를 볼 수 있다.



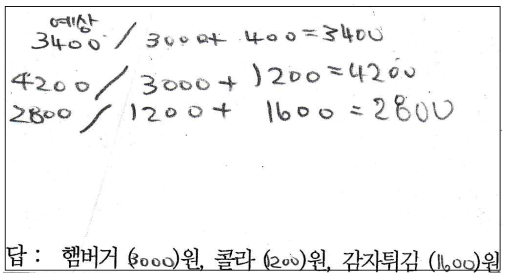
[그림 Ⅳ-17] 3TA : '나누고 조정하기' 선택 오류

위의 [그림 Ⅳ-17]에서 학생은 처음에 값을 반으로 나눈 것은 '나누고 조정하기'의 전형적인 시작에 해당하나, 이후 조정에 실패하였다. 이 학생은 문제의 조건에 따른 세 개의 식을 적고, '감자튀김', '햄버거', '콜라'를 각각의 식에서의 $\frac{1}{2}$이라고 가정한다. 그런 후, 첫 번째 식에서의 '햄버거' 1,700원과 두 번째 식에서의 '햄버거' 2,100원을 합한 3,800원을 '햄버거' 가격이라고 답을 적어 넣었으며, '감자튀김'과 '콜라'도 마찬가지 방식으로 답을 적어 넣었다. 즉, 조정할 수 있는 또 다른 조건이 주어지지 않았음에도 일단 각각의 식에서 가격을 절반으로 나눈 것은 유효하지 않다.

3TA 문항은 변수가 3개이기 때문에 '나누고 조정하기' 전략을 사용한 경우 해결하기 어려우며, 이 전략을 선택한 학생 55명이 모두 이와 유사한 방식으로 실패한 것이 드러났다.

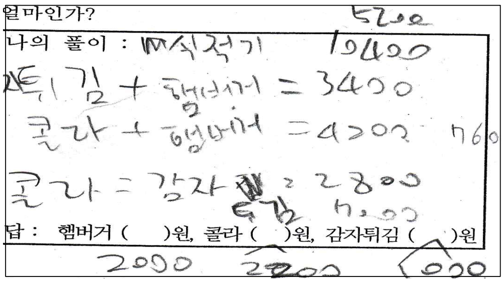
나. 추론 전략 수행 오류

문제 해결에서 유효한 추론 전략을 선택하였다 하더라도, 해결 과정에서 전략을 올바르게 수행하지 못하면 해결에 이를 수 없다. 다음의 예는 학생이 선택한 추론 전략을 수행하는 과정에서의 오류를 보여준다.



[그림 Ⅳ-18] 3TA : '예상하고 확인' 수행 오류

위의 [그림 Ⅳ-18]은 '예상하고 확인' 수행 과정에서의 오류 사례이다. 이 학생은 처음 예상한 값들을 검산하거나 다시 시도하지 않고 그대로 답안에 적은 것을 볼 수 있다. '예상하고 확인' 추론을 사용할 때에는 자신의 추론을 확인해보고 맞지 않는 부분이 발생할 때 다시 예상하고 확인하는 시행을 반복해야 성공할 수 있는데, 이 학생은 이 과정을 반복하지 않았다는 것을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-19] 3TA : '비례적 추론' 수행 오류

위의 [그림 Ⅳ-19]는 '비례적 추론' 전략 수행에서의 오류를 잘 보여준다. 위의 학생은 주어진 문제에 따라 세 개의 식을 적은 후 세 식을 모두 합하여 10,400원을 추론한다. 10,400원 안에는 '감자튀김', '햄버거', '콜라'가 모두 2번씩 더해져 있으므로, 비례적 추론에 의하여, 이를 반으로 나누어 5,200원을 추론한다. 이 학생은 여기까지의 추론은 성공하였으나, 답안에는 5,200원을 임의대로 나누어 적은 것을 알 수 있다.

위와 같이 살펴보았을 때, 3TA 문항에서 산술적인 추론 전략으로 접근한 경우 성공률이 낮은 이유를 생각해 보아야 한다. 3TA 문항의 경우에는 변수가 3개이며 큰 수가 포함되어 있는 문제이므로 산술적 전략보다는 전형식적 대수 추론이나 형식적 대수 추론이 보다 적합할 것이다.

[연구 문제 3]에 따라 분석한 결과, 초등학생들이 추론 전략을 잘못 선택하거나, 추론 전략을 적절히 수행하지 못하여 대수 추론에 실패하는 오류를 파악할 수 있었다.

Ⅴ. 결론

학생들이 산술적 추론 방법만을 다루다가 중학교에 진학하여 갑자기 대수 문제를 형식 대수로 배우게 되었을 때, 형식적 대수 추론을 단지 기계적인 기호 조작으로 받아들여 그만큼 학습 곤란을 겪을 가능성이 커진다. 학생들의 직관을 문제 해결의 추론 전략으로 연결시키고, 이렇게 경험한 추론이 형식적 대수 추론으로 연결될 때에 비로소 학생들에게 의미 풍부한 형식적 대수 추론이 될 것이다.

본 논문에서는 대수 문제 해결에서 가능한 다양한 추론을 산술적 추론, 전형식적 대수 추론, 형식적 대수 추론의 세 가지 범주로 분류하였다. 그리고 이에 따라 초등학생들이 실제로 대수 추론 문제 해결에서 사용하는 세 가지 수준의 추론이 어떤 것인지, 문제의 구조에 따라 초등학생들이 사용하는 추론 전략이 어떻게 다른지, 그리고 문제 해결에 실패하는 경우의 전략 사용의 특성은 어떻게 나타나는지를 분석하였다.

분석 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 대수 추론 방법을 개발하고 학생들에게 교육과정을 통하여 보다 다양하게 제시할 필요가 있다. 초등학생들의 대수 문제 해결에서 교과서에서 제시되는 추론 전략 외에 다양한 추론

전략이 발견되었다는 점이 이를 시사한다. 본 검사 결과, 교과서에서 제시하는 '예상하고 확인하기', '표로 검사' 이외에도 '체계적 분배', '나누고 조정' 등의 산술적 전략들도 실제로 학생들이 많이 사용하는 것으로 나타났으며, '시각화로 구조 파악', '구조적 연산', '비례적 추론', '양적 추론' 등의 보다 진보된 전형식적 대수 추론들도 많은 학생들이 구사하였다. 형식적 대수 추론과 거의 동일한 '가감법', '대입법' 아이디어가 사용된 전형식적 대수 추론 전략들을 학생들이 사용하고 있다는 점 또한 교육과정에서 전형식적 대수 추론을 명시적으로 다루어야 할 필요성을 뒷받침한다. 따라서, 교육과정에서는 산술적 추론, 전형식적 대수 추론을 다양하게 개발하고 교과서에 학년 수준에 따라 반영하여 산술적 추론에서 형식적 대수 추론으로 자연스러운 연결을 도와야 할 것이다.

둘째, 초등학생들의 직관과 수준에 맞는 일반적 대수 추론 전략을 제시할 필요가 있다. 문제의 의미 구조와 연산 구조에 따라 학생들이 사용한 공통 전략이 다르게 나타나는 사실은 문제의 구조에 따라 효율적인 추론 전략이 다르다는 것을 나타낸다. 달리 말하면, 유사한 구조를 지닌 문제에서는 일정한 유형의 추론 전략을 일반화할 수 있는 가능성을 암시한다. 따라서, 초등학교 학생들에게 일정한 구조를 지닌 대수 추론 문제에 적용할 수 있는 일반적인 대수 추론을 경험하게 함으로써, 점진적으로 가장 일반적인 대수 추론 전략인 방정식을 만드는 단계까지를 자연스럽게 연결할 수 있을 것으로 생각된다.

셋째, 초등학교 교육과정에서 모든 학년에서 강조되고 있는 '예상하고 확인' 전략에 대한 대안적 전략의 지도가 필요하다. '예상하고 확인' 전략은 모든 문항에서 대부분의 학생들이 가장 선호하는 추론 전략으로 파악되었지만, 실패율도 가장 높음으로써, 이 전략이 가장 효율적인 것이 아님을 나타내었다. 학생들은 다양한 전략적 도구를 제공받을 때, 문제에 따라 적절한 방법을 선택하여 사용할 수 있을 것이다. 특히, 전형식적 대수 추론 전략들은 문제의 구조와 양에 집중하여 학생들로 하여금 문제 해결에서의 효율적인 추론의 필요성을 느끼고, 대수 추론 개발의 동기를 가져다 줄 것이며, 보다 효율적으로 형식적 대수 추론으로 이행할 수 있게 해 줄 것으로 판단된다.

Ⅵ. 논의

이 장에서는 본 논문에서 초등학생들의 대수 추론에 관한 조사에서 나타난 결과의 의미에 대하여, 대수 학습에서의 '수준 상승'과 직관·분석적 사고를 조기 대수 교육과 관련지어 생각해 보기로 한다.

먼저, 대수 학습에서의 수준에 대한 논의가 명확히 밝혀진 바는 없으나, van Hiele(1986)는 대수에서의 수준을 다음과 같이 언급한 바 있다.

> 제 2 수준과 제 3 수준의 대상의 차이는 표현 방식의 차이에 의해 예시될 수 있다. 제 2 수준에서 연산은 구체적 수들 사이의 관계를 다룬다. $4\times3=12$, $6+8=14$이다. 사고의 제 3 수준에서는 $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$와 같은 결과의 일반화를 다룬다(van Hiele, 1986, p. 51).

이를 바탕으로 대수 추론 학습에서의 수준을 생각해 볼 수 있다. 즉, 대수 추론에서의 제 3 수준이 일반화를 다루는 '형식적 대수 추론'이라면, 제 2 수준은 아이디어는 유사하지만 표현방식에서 일반성을 지니지 않는 '전형식적 대수 추론'이라고 할 수 있을 것이다. 따라서, 본 논문에서 분석한 '산술적 추론'수준에서 '전형식적 대수 추론'으로 이행한다면 그것은 1수준에서 2

수준으로의 수준 상승이며, '전형식적 대수 추론'을 '형식적 대수 추론'으로 연결하는 것은 2 수준에서 3수준으로의 수준 상승이라고 볼 수 있다. 본 논문에서 밝힌 '전형식적 대수 추론' 단계를 반드시 고려함으로써 1수준에서 2수준으로, 2수준에서 3수준으로의 단계적인 수준 상승을 도모할 수 있다.

다음으로, 수학에서의 직관과 분석적 사고와 관련하여 논의하도록 한다. Fischbein(1987)은 수학 문제에 대한 학생의 태도에서 직관적 기초를 탐지하는 것은 교수학적으로 중요하다고 말한 바 있다. Hadamard(1945; Krutetskii, 1976에서 재인용)는 수학적 사고를 크게 논리적 사고와 직관적 사고로 구분하였다. 논리적 사고는 무의식에서 작은 부분을 차지하고 보다 좁게 직접적으로 사고-무모순성-사고 과정의 명백한 구분이 있다. 이에 반하여 직관적 사고는 무의식의 큰 부분을 차지하며 보다 즉각적이고, 사고 과정이 생략되는 경우가 많다. 인지심리학자인 Leron과 Hazzan(2009)의 설명에 의하면, 우리의 인지와 행동은 직관적 양식과 분석적 양식이 나란히 작동되는데, 분석적 양식은 직관적 양식을 감시하고 양쪽의 상호작용을 조정하는 역할을 한다. 대부분의 상황에서 이 둘은 협력하여 작용하지만, 어떤 경우에는 직관적 양식은 재빠르게 자동적인 반응을 생성하는 반면, 분석적 양식은 모니터 역할을 하지 못할 수도 있다는 것이다. 이러한 연구 결과는 수학 추론 상황에서 직관이 분석적 사고를 방해하거나 분석적 사고가 작동하지 못하여 오류가 발생할 가능성을 생각하게 한다.

따라서, 위의 내용을 조기 대수 추론 지도의 목적에 비추어 생각해보면, 조기 대수 추론 지도는 학생들의 대수 추론 과정에서 직관과 분석적 사고가 적절히 협동하여 작용하도록 돕는 것이라고 할 수 있을 것이다. 이렇게 볼 때, 본 논문의 연구 결과는 형식적 대수와 직관의 간극을 연결하는 방법을 찾는 조기 대수 교육의 심리적 타당성을 더욱 뒷받침하였으며, 구체적인 한 가지의 방법을 제시하였다고 볼 수 있다. 또한, 본 논문의 연구 결과는 학생들의 대수 추론 과정에서 직관적 바탕에서 분석적 사고로 이행하도록 돕는데 쓰일 수 있을 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 1-2**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 2-2**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 3-2**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-2**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-1**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-2**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-1**. 두산동아(주)

______ (2010). **초등학교 교사용 지도서 수학 6-2**. 두산동아(주)

권석일, 임재훈 (2007). 그림그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화. **수학교육학연구 제17권, 제2호**, pp. 91-109. 대한수학교육학회

김성준 (2003). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구 제13권 제3호**. 대한수학교육학회.

______ (2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

박교식 (2003). **문제해결력 키우기** : 다시보기 시리즈 5. 수학사랑.

신항균, 이광연, 윤혜영, 이지연 (2009). **중학교 수학** 1. (주) 지학사.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원 (2009). **중학교 수학** 1. 천재교육.

장경윤 (2007). ICT 시대의 대수교육의 방향과 과제. **학교수학, 제9권 제3호**. pp. 409-426. 대한수학교육학회.

장지현 (2008). **대수적 사고 증진을 위한 연립방정식 지도 계열에 관한 연구**. 건국대학교 석사학위 청구논문. 건국대학교.

전형옥, 이경화, 방정숙(2009). 초등학교 6학년 학생의 양적 추론 사례 연구. **수학교육학연구, 제19권 제1호**, pp. 81-98. 대한수학교육학회.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 서혜숙, 박부성, 강은주 (2009). **중학교 수학** 1. (주) 금성출판사.

Bednarz , N. & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra As a Problem-Solving Tool : Continueties and Discontinueties with Arithmetic. *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. 1996 Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, C. (1998). Proportional Reasoning among 7th Grade Students with Different Curricuar Expriences. *Educational Studies in Mathematics, vol 36*, no. 3, pp. 247-293.

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The Tranition from Arithmetic to Algegra : to reason, explain, argue, generalize and justify. in Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M, & Stehlîková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 225-232. Prague : PME.

Collis. K. F. (1975). The Development of Formal Reasoning, Report of a social Science Research Council sopnsored project(HR 2434/1) carried out at the University of Nottingham, University of Newcastle, NSW, Australia.

De Morgan, A. (1835/1837). *Elements of algebra; preliminary to the differential calculus*, London; Taylor, Walton, 209-222.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Mathematics and Science*. Dordrecht and Boston and Norwell, MA, U.S.A.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithme-tic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 2, 19-25.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education : China Lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Katz, V. J. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics. 66*. 181-201

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra : *The Transition from Arithmetic to Algebra, Research Ideas for the Classroom : Middle Grades mathematics*, NCTM. MacMillan Publishing Comany, New York.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. University of Chicago Press.

Leron. U. & Hazzan. O. (2009). Intuitive vs analytical thinking : four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 71, No. 3 (Jul., 2009). Springer.

Lins & Kaput (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning : The Current State of the Field. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. The 12th ICMI Study. The University of Melbourne, Australia. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.

Nathional Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM.

Rojano, T. (2004). Local Theoretical Models in Algebra Learning : a Meeting Point In Mathematics Education. in D. MacDougal (Ed.) *Psychology of Mathematics Education*, North American, Chapter (1) pp. 37-56. Toronto.

Sadovsky, P. & Sessa, C., (2005) The Adidactical Interaction with the Procedures of Peers in the Transition from Arithmetic to Algebra : A Milieu for the Emergence of New Question. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 85-112.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative Reasoning, Complexity, and Additive Structure. *Educational Studies in Mathematics*, vol 25, pp. 165-208. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Usiskin, Z. (1988). Concepts of School Algebra and Uses of Variable. In A. F. Coxford(Ed.). *The ideas of algebra*, K-12 : 1988 Yearbook(pp. 8-19). Reston, Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics, INC.

van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra*, Freudenthal Institute.

van Dooren, Verschaffel. L, & Onghena, P. (2002). The Impact of Preservice Teachers' Content Knowledge on Their Evaluation of Students' Strategies for Solving Arithmetic and Algebra Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5(Nov., 2002), pp. 319-351.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press. pp. 51-52.

Algebraic Reasoning Abilities of Elementary School Students and Early Algebra Instruction(1)

Lee, Hwa Young (Jeongwang Elementary School)
Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This study is tried in order to link informal arithmetic reasoning to formal algebraic reasoning. In this study, we investigated elementary school student's non-formal algebraic reasoning used in algebraic problem solving.

The result of we investigated algebraic reasoning of 839 students from grade 1 to 6 in two schools, Korea, we could recognize that they used various arithmetic reasoning and pre-formal algebraic reasoning which is the other than that is proposed in the text book in word problem solving related to the linear systems of equation. Reasoning strategies were diverse depending on structure of meaning and operational of problems. And we analyzed the cause of failure of reasoning in algebraic problem solving.

Especially, 'quantitative reasoning', 'proportional reasoning' are turned into 'non-formal method of substitution' and 'non-formal method of addition and subtraction'.

We discussed possibilities that we are able to connect these pre-formal algebraic reasoning to formal algebraic reasoning.

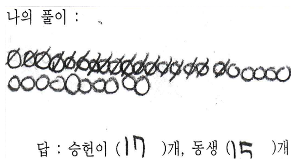
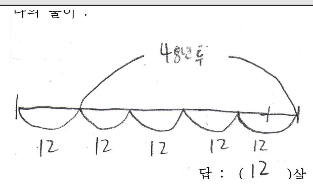
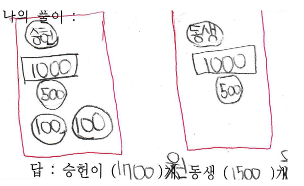
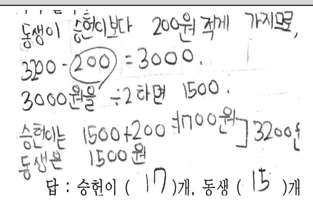
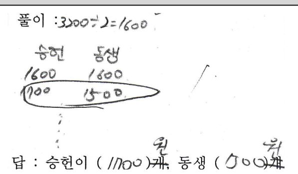
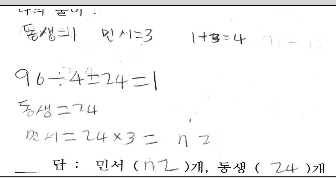
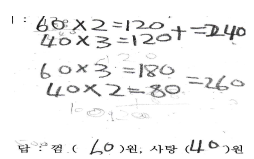
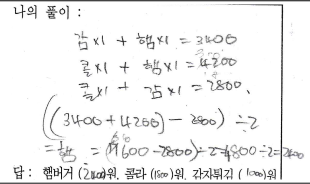
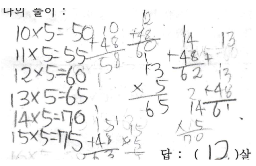
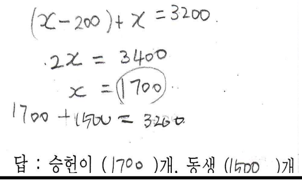
Key Words : Early Algebra(조기대수), algebraic reasoning(대수 추론), informal algebraic reasoning(비형식적 대수 추론), arithmetic reasoning(산술적 추론), pre-formal algebraic reasoning(전형식적 대수 추론), structural reasoning(구조적 추론), quantitative reasoning(양적 추론)

논문접수 : 2012. 10. 29
논문수정 : 2012. 12. 3
심사완료 : 2012. 12. 14

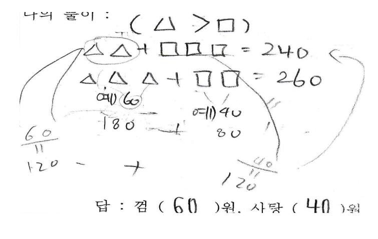
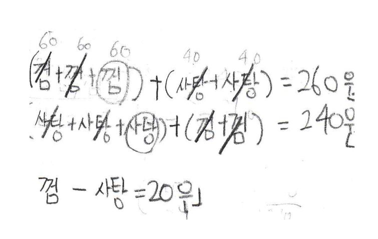
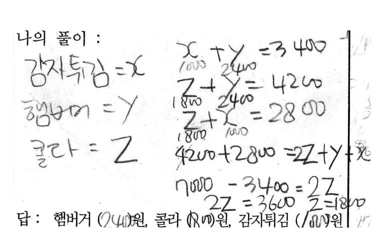
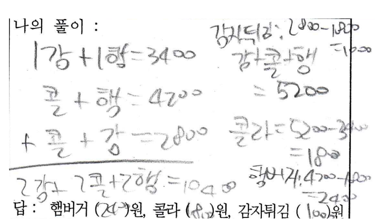
〈부록 1〉 본검사 문항

미지원 변수 / 연산	2원 1차 (2)		3원 1차(3)
	1개의 변수(U)	2개의 변수 (T)	3개의 변수 (T)
덧셈(A) 및 뺄셈(S)	(2US) 승헌이는 용돈 3200원을 동생과 나누어 가지려고 합니다. 동생이 승헌이보다 200원 적게 가지려면, 승헌이와 동생은 몇 개씩 가져야 합니까?	(2TS)수학 시험의 점수를 매기는데, 답이 맞으면 5점을 주고, 틀리면 2점을 빼었습니다. 민호가 수학 문제 10개를 풀고 29점을 받았다면, 답이 맞은 문제는 몇 개입니까?	(3TA) 감자 튀김 1개와 햄버거 1개는 3400원, 콜라와 햄버거는 4200원, 콜라와 감자칩은 2800원일 때, 햄버거와 콜라, 감자튀김의 가격은 각각 얼마인가?
곱셈(M) 및 나눗셈(D)	(2UM) 민서는 바둑돌 96개를 동생과 나누어 가지려고 합니다. 민서가 동생의 3배를 가지려면, 민서와 동생은 각각 몇 개씩 가져야 합니까?	(2TM) 슈퍼마켓에서 껌 2개와 사탕 3개를 사면 240원, 껌 3개와 사탕 2개를 사면 260원이다. 껌 1개와 사탕 1개는 각각 얼마인가?	(3TM) 3명의 아이들이 198개의 구슬을 가지고 구슬놀이를 하고 있다. 수빈이는 영민이의 3배만큼, 예린이의 6배만큼의 구슬을 가지고 있다. 수빈이, 영민이, 예린이는 각각 구슬을 몇 개씩 가지고 있는가?
혼합(C)	(2UC1) 48년 후에 혜진이의 나이는 올해 나이의 5배가 된다고 합니다. 혜진이는 올해 몇 살입니까? (2UC2) 예진이는 매주 엄마께 일정한 액수의 용돈을 받아 모은다. 이번주에는 용돈에 심부름값으로 700원을 받아 합한 액수의 2배가 3주 동안 받는 용돈의 액수와 같았다. 일주일에 받는 용돈은 얼마인가?	(2TC) 엄마는 아들보다 32살이 많고, 엄마의 나이는 9년 후에 아들의 나이의 3배가 된다. 엄마와 아들의 올해 나이는 몇 살인가?	(3TC) 380명의 학생들이 방과후 활동을 신청하였다. 수학부를 신청한 학생은 영어회화부를 신청한 학생의 3배이고, 논술부는 수학부를 신청한 학생보다 114명이 많다. 각 종목에 몇 명의 학생이 신청했는가?

<부록 2> 본검사 추론 전략 분류 기준

추론 전략	추론 방법	추론 전략	추론 방법
그림 그려 세기	문제 상황을 그림으로 표현한 후, 그림의 개수나 수직선의 칸을 세어 해답을 얻음	시각화로 구조 파악	문제 상황을 도형, 수직선 등으로 시각화하여 문제의 구조를 파악한 후 계산하여 해답을 찾음
	풀이 예 : 2US		2UC1
			
체계적 분배	비등분할 문제를 주어진 양을 큰 양에서부터 작은 양으로 순차적으로 나누어 분배하여 해답을 찾음	구조적 연산	문제의 구조 파악을 바탕으로 하여 수식을 세우거나 계산함.
	풀이 예 : 2US		2US
			
나누고 조정	주어진 양을 등분한 후, 일부분을 조정하여 문제의 조건에 맞는 해답을 찾음	비례적 사고	양들 사이의 비례 관계를 이용하여 문제를 단순화하거나 주어진 양들을 조작함
	풀이 예 : 2US		2UM
			
예상 확인	임의의 수를 예상하고 문제의 조건에 따라 계산하여 정답 유무를 확인	양적 추론	문제에서 주어진 양들을 서로 비교함으로써 '차' 나 '비' 를 파악하고 계산에 이용함
	풀이 예 : 3TA2		3TA
			
표로 검사	연속된 수들을 차례대로 빠짐없이 문제의 조건에 따라 계산하여 정답을 찾음	방정식 세우고 풀기	미지수를 사용하여 식을 세우고 대입, 이항에 의하여 미지수를 소거하여 해를 구함
	풀이 예 : 2UC1		2US
			

〈부록 3〉 두 가지 이상의 전략을 동시에 사용한 추론 분류 기준

<table>
<tr><th>추론 전략</th><th>추론 방법</th><th>문항 풀이의 예</th></tr>
<tr><td>식 세우기
및
예상 확인하기</td><td>문제 상황을 대수식이나 비형식적인 식으로 표현한 후, 예상 확인의 방법으로 여러 번의 시행착오에 의하여 해결함</td><td>2TM

</td></tr>
<tr><td>양적 추론
및
예상 확인하기</td><td>문제 상황을 표현하여 양들 간의 관계를 추론한 후, 여러 번의 시행 착오에 의한 예상 확인의 방법으로 해결함</td><td>2TM

</td></tr>
<tr><td>식 세우기
및
양적 추론</td><td>기호를 사용하여 식을 세운 후, 기호들간의 관계를 관찰하고 관계를 이용하여 문제를 해결함</td><td>3TA

</td></tr>
<tr><td>비례적 사고
및
양적 추론</td><td>비례적 사고에 의하여 새로운 양을 정의한 후, 양들 사이의 관계를 통하여 양적 추론에 의하여 문제를 해결함</td><td>3TA

</td></tr>
</table>