

축대칭 원통형 셸의 응력해석 Stress Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell

최명수*† · 여동준**
M. S. Choi*† and D. J. Yeo**

(접수일 : 2012년 06월 01일, 수정일 : 2012년 08월 28일, 채택확정 : 2012년 09월 04일)

Key Words : Stress(응력), Axisymmetric Cylindrical Shell(축대칭 원통형 셸), Finite Element Method(유한요소법), Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method(유한요소-전달강성계수법)

Abstract : In this paper, the algorithm for the static analysis of an axisymmetric cylindrical shell by using the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) is suggested. TE-TSCM combining both the modeling procedure of the finite element method (FEM) and the transfer procedure of the transfer stiffness coefficient method (TSCM) has the advantages of FEM and TSCM. After computational programs are made by both FE-TSCM and FEM for the stress analysis of the axisymmetric cylindrical shell, we compare the numerical results by FE-TSCM with those of FEM for two computational models in order to confirm the trust of FE-TSCM.

1. 서 론

액체 또는 가스를 운반하거나 저장하는데 사용되는 파이프(pipe) 및 압력 용기 그리고 우주 항공 구조물 등에서 쉽게 찾아볼 수 있는 원통형 셸 구조물은 공학적으로 중요한 구조물로서, 안전성을 확보하기 위해 설계 시에 응력해석¹⁾이 수행되어야 한다.

현재, 셸 구조물의 응력해석을 위해 다양한 소프트웨어들이 개발되어 있고, 이 소프트웨어들의 내부 알고리즘을 분석해 보면 거의 대부분 유한요소법(finite element method)²⁾이 기본 알고리즘으로 채택되어 있다. 유한요소법은 복잡한 구조물의 해석을 기본적인 요소들의 결합으로 단순화하여 모델링하고 이를 해석하므로 전산 알고리즘이 단순하다는 것이 장점이다. 그러나 대규모 자유도를 갖는 복잡한 구조물에 대해 해석을 수행할 경우에는 계산 시간이 아주 길어지고 대용량의 컴퓨터 메모리를 필요로 하는 취약점이 있다³⁾.

저자들은 유한요소-전달강성계수법(finite element-

transfer stiffness coefficient method)^{3~5)}을 개발하여 평판 구조물과 솔리드(solid) 구조물의 정적 및 동적 해석에 적용하여 그 유효성을 확인해 왔다. 이 방법은 유한요소법의 모델링 과정과 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)⁶⁾의 강성계수의 전달 과정을 조합하여 해석을 수행하는 방법으로서 유한요소법과 전달강성계수법의 장점을 공유하는 특징이 있다. 그러나 해석기법으로서 완전한 독자성 및 신뢰성을 확보하기 위해서는 다양한 구조물에 대한 일반적인 해석이 가능해야하므로, 본 연구에서 저자들은 원통형 셸의 응력해석에 유한요소-전달강성계수법을 도입하는 연구를 수행하게 되었다.

원통형 셸이 구조적으로 축대칭이고, 하중도 축대칭인 경우에는 응력해석을 효과적으로 수행할 수 있다. 따라서 이 논문에서는 축대칭 원통형 셸⁷⁾을 해석 대상으로 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 응력해석을 수행하고, 유한요소법과의 수치 계산 결과의 비교를 통해 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인한다.

*최명수(교신저자) : 전남대학교 해양경찰학과
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-7183
**여동준 : 전남대학교 해양기술학부

*M. S. Choi(corresponding author) : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-7183
**D. J. Yeo : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

2. 축대칭 원통형 셸의 응력해석 알고리즘

이 장에서는 유한요소법을 통해 축대칭 원통형 셸의 요소강성행렬을 구하는 과정⁷⁾과 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달 과정⁶⁾을 통해 축대칭 원통형 셸의 응력해석을 수행하는 알고리즘을 설명한다.

2.1 해석 모델

축대칭 원통형 셸은 Fig. 1과 같이 원통형 셸과 기초지지 탄성스프링으로 구성된다. 원통형 셸은 각각 일정한 반경을 갖는 다수의 원통형 셸요소로 분할되며, 인접 셸 요소와의 결합점 및 좌단과 우단을 모두 원 절점(circular node, 이하에서는 ‘절점’으로 생략함)이라 부른다. 따라서 Fig. 1과 같이 n 개의 원통형 셸요소로 이루어진 해석 모델은 총 $(n+1)$ 개의 절점을 가지며, 좌단에서 우단으로 순서대로 각각 절점 1, 절점 2, 절점 $(n+1)$ 로 정의한다.

각 절점에서 변위벡터 ($\mathbf{d} = \{u, w, \theta\}$)는 셸의 길이방향(s 방향) 변위 u , 반지름방향(r 방향) 변위 w , 그리고 각변위 $\theta = dw/ds$ 로 구성되고, 힘벡터($\mathbf{f} = \{N, V, M\}$)는 셸의 길이방향 힘 N , 반지름방향 힘 V , 그리고 모멘트 M 으로 구성된다. 각 절점이 3자유도를 가지므로, Fig. 1의 해석 모델은 총 $3(n+1)$ 개의 자유도를 갖는다. 기초지지 스프링은 절점당 3방향의 스프링이 존재할 수 있으며, 스프링의 방향별 스프링상수를 각각 k_N, k_V, k_M 이라고 한다.

원통형 셸의 경계조건은 해석 모델에 사용된 기초지지 스프링으로 모델링한다. 예를 들어, 좌단의 경계조건이 고정인 경우에는 절점 1의 기초지지스프링의 스프링상수(k_N, k_V, k_M) 값에 무한대에 해당하는 큰 값(이 연구에서는 10^{20})을 입력한다.

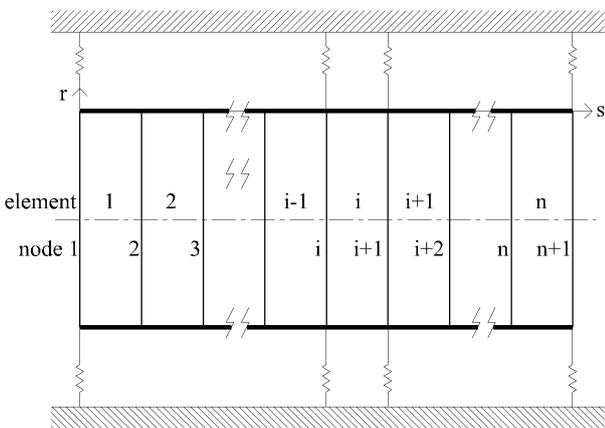


Fig. 1 Analytical model

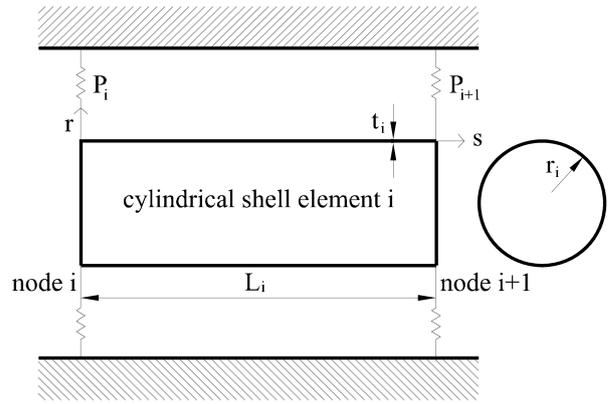


Fig. 2 Cylindrical shell element

2.2 축대칭 원통형 셸요소의 강성행렬

이 절에서는 유한요소법에서 사용되는 축대칭 원통형 셸의 요소강성행렬⁷⁾을 유도하는 과정을 간략히 설명한다.

Fig. 2와 같이 길이 L_i , 반경 r_i , 두께 t_i 인 i 번째 원통형 셸요소 내부에서 s 방향의 변위 u , r 방향의 변위 w 그리고 각변위 θ 를 다음 식과 같이 s 좌표의 함수로 가정한다.

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 s, \\ w &= a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3, \\ \theta &= \frac{dw}{ds} = a_4 + 2a_5 s + 3a_6 s^2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 a_1, a_2, \dots, a_6 는 미정계수이고, 식 (1)을 행렬 형태로 나타내면 셸요소 내부의 변위벡터는

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{a}} \quad (2)$$

이고, 여기서

$$\hat{\mathbf{d}} = \{u, w, \theta\}^T, \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}^T$$

이다. 절점 i 와 절점 $(i+1)$ 사이에 있는 i 번째 셸요소는 $s = 0$ 에서 변위벡터가 절점 i 의 변위벡터 \mathbf{d}_i 와 동일하고, $s = L_i$ 에서는 절점 $(i+1)$ 의 변위 \mathbf{d}_{i+1} 과 일치한다. 따라서 식 (2)의 행렬 $\hat{\mathbf{N}}$ 에 $s = 0$ 및 $s = L_i$ 를 각각 대입하여 구한 두 식을 하나의 식으로 묶으면

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{a}} \quad (4)$$

로 되고, 여기서

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \{\mathbf{d}_i^T, \mathbf{d}_{i+1}^T\}^T,$$

$$\hat{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_i & L_i^2 & L_i^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L_i & 3L_i^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_i = \{u_i, w_i, \theta_i\}^T, \quad \mathbf{d}_{i+1} = \{u_{i+1}, w_{i+1}, \theta_{i+1}\}^T \quad (5)$$

이다. 따라서 셀요소 내부의 변위벡터와 절점 변위벡터 사이의 관계를 식 (2)와 (4)로부터 유도하면

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (6)$$

로 되고, 원통형 셀에서 변형률벡터 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 와 변위벡터 $\hat{\mathbf{d}}$ 사이의 관계는 다음 식과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{d}} \quad (7)$$

여기서

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\varepsilon_s, \varepsilon_\phi, \chi_s, \chi_\phi\}^T, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} d/ds & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & d^2/ds^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다. 식 (6)을 (7)에 대입하여 정리하면, 변형률과 절점 변위 사이의 관계를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{B}}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (9)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{C}}_i^{-1} \quad (10)$$

이다. 한편, 합응력(stress resultant)벡터 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 와 변형률 벡터 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (11)$$

여기서

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{N_s, N_\phi, M_s, M_\phi\}^T, \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \frac{E_i t_i}{(1-\nu_i^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (t_i^2/12) & (\nu_i t_i^2/12) \\ 0 & 0 & (\nu_i t_i^2/12) & (t_i^2/12) \end{bmatrix}$$

이다. 보존계에서는 외부 가상일과 내부 가상일이 일치하는 가상일의 원리로부터 다음 식과 같은 셀요소의 강성 방정식을 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \hat{\mathbf{K}}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (13)$$

여기서 $\hat{\mathbf{f}}_i$ 는 요소의 양 절점에 작용하는 하중으로 구성되는 절점하중벡터이고 $\hat{\mathbf{K}}_i$ 는 원통형 셀요소에 대한 강성행렬로써 다음 식과 같다.

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \{\tilde{\mathbf{f}}_i^T, \tilde{\mathbf{f}}_{i+1}^T\}^T, \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \int \hat{\mathbf{B}}_i^T \hat{\mathbf{D}}_i \hat{\mathbf{B}}_i dv$$

2.3 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달

이 절에서는 원통형 셀 구조물의 응력해석을 위해 전달강성계수법⁶⁾을 기반으로 하는 해석 알고리즘을 간략히 설명한다.

식 (13)에 나타낸 셀요소의 강성방정식을 절점 i 와 절점 $(i+1)$ 로 나누어 생각해보면, 대칭행렬이 되는 i 번째 원통형 셀요소의 강성행렬($\hat{\mathbf{K}}_i$)은 부분 행렬 ($\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$)로 분해된다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_i \\ \tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{f}}_i$ 와 $\tilde{\mathbf{f}}_{i+1}$ 는 각각 i 번째 원통형 셀요소의 좌측 절점과 우측 절점에 작용하는 힘벡터이다.

전달강성계수법에서는 전달식을 쉽게 설명하기 위해 하나의 절점을 절점 좌측과 절점 우측으로 분할하여 생각하고, 이를 구분하기 위하여 힘벡터, 변위 벡터, 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 기호 위에 -를 붙이면 절점 좌측을 의미하고, 동일 기호위에 아무것도 붙이지 않으면 절점 우측을 나타낸다. 그리고 하첨자는 절점 번호 또는 셀요소의 번호를 의미한다.

절점 i 의 우측에서 힘벡터(\mathbf{f}_i)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사이의 관계를 강성계수행렬(\mathbf{S}_i)과 힘보정벡터(\mathbf{e}_i)를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{e}_i \quad (16)$$

여기서 절점 i 의 자유도가 3이므로, \mathbf{S}_i 는 행렬의 크기가 3×3 인 정방행렬, \mathbf{e}_i 는 3×1 의 열벡터이다.

한편, 절점 $(i+1)$ 의 좌측에서 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_{i+1}$)와 변위벡터($\bar{\mathbf{d}}_{i+1}$) 사이의 관계를 강성계수행렬($\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$)과 힘보정벡터($\bar{\mathbf{e}}_{i+1}$)를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} \bar{\mathbf{d}}_{i+1} + \bar{\mathbf{e}}_{i+1} \quad (17)$$

유한요소법에서는 요소의 좌측 절점과 우측 절점의 힘벡터 방향이 동일하지만, 전달강성계수법에서는 요소 좌측 절점과 우측 절점의 힘벡터의 방향이 반대이다. 따라서 식 (15)를 전달강성계수법에 사용하기 편리한 형태로 바꾸어 주면 다음 식이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \bar{\mathbf{f}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \bar{\mathbf{d}}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

식 (16)~(18) 그리고 절점에서 변위벡터의 연속조건($\bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{d}_i$)으로부터 강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 구하면

$$\bar{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{C}_i + \mathbf{B}_i^T \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_{i+1} = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{E}_i \quad (19)$$

로 되고, 여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i \quad (20)$$

이다. 한편, 구조물의 절점 $(i+1)$ 에 스프링상수가 각각 $(k_N, k_V, k_M)_{i+1}$ 인 기초지지 스프링이 존재하거나 또는 외력($q_N, q_V, q_M)_{i+1}$ 이 작용할 경우에는 절점 $(i+1)$ 에서 힘과 모멘트의 평형식은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_{i+1} = \bar{\mathbf{F}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i+1} \quad (21)$$

여기서 대각행렬인 \mathbf{P}_{i+1} 과 열벡터 \mathbf{Q}_{i+1} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{P}_{i+1} = \text{diag}(k_N, k_V, k_M)_{i+1}, \quad (22)$$

$$\mathbf{Q}_{i+1} = \{q_N, q_V, q_M\}_{i+1}^T$$

식 (16)의 i 대신에 $(i+1)$ 을 대입한 식과 식 (17), 식 (21), 그리고 절점에서 변위벡터의 연속조건($\bar{\mathbf{d}}_{i+1} = \mathbf{d}_{i+1}$)을 이용하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{S}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1}, \quad \mathbf{E}_{i+1} = \bar{\mathbf{E}}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i+1} \quad (23)$$

좌단의 경계조건을 절점 1의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 1 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_1$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (21)의 i 대신에 0을 대입한 식과 식 (16)의 i 대신에 1을 대입한 식들로부터 \mathbf{S}_1 및 \mathbf{e}_1 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{Q}_1 \quad (24)$$

식 (24)를 시작으로, 식 (19)와 (23)을 순차적으로 반복 적용하면, 마지막 절점의 강성계수행렬 \mathbf{S}_{n+1} 및 힘보정벡터 \mathbf{e}_{n+1} 을 계산할 수 있다.

2.4 변위벡터 및 응력 계산

우단의 경계조건을 마지막 절점인 절점 $(n+1)$ 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 $(n+1)$ 우측의 힘벡터 \mathbf{f}_{n+1} 은 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (16)의 i 대신에 $(n+1)$ 을 대입한 식으로부터 마지막 절점인 절점 $(n+1)$ 의 변위벡터를 다음 식과 같이 먼저 구한다.

$$\mathbf{d}_{n+1} = -\mathbf{S}_{n+1}^{-1} \mathbf{e}_{n+1} \quad (25)$$

식 (16)과 (18)로부터 식(26)을 유도할 수 있다. 식 (26)으로부터 마지막 절점의 변위벡터를 제외한 모든 절점의 변위벡터를 순차적으로 계산해 간다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \quad (26)$$

절점의 변위벡터를 모두 구하고 나면, 각 절점의 힘벡터는 식 (16)과 (17)로부터 구할 수 있고, 요소별 각 절점의 응력은 식 (11)로부터 계산할 수 있다.

3. 수치 계산 결과

2장에서 기술했던 알고리즘인 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)을 이용하여 원통형 셸의 변위와 합응력(stress resultant)을 구할 수 있는 전산 프로그램을 직접 만들었다. 그리고 계산 결과의 신뢰성을 확인하기 위해 유한요소법(FEM)으로 동일 해석을 수행할 수 있는 전산 프로그램을 추가로 만들었다. 이 장에서는 2 종류의 축대칭 원통형 셸에 대해 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 변위 및 합응력(stress resultant)을 각각 계산하고 그 결과를 비교한다.

3.1 계산 모델 1

Fig. 3에 나타난 계산 모델 1은 길이가 10 m, 지름이 20 m, 두께가 0.1 m인 원통형 셸이다. 원통형 셸 내부의 압력은 500 kPa로 일정하고, 경계조건은 좌단과 우단 모두 완전 구속이다. 재료의 물성치는 종탄성계수가 2.06×10^{11} Pa, 푸아송 비가 0.3이다.

원통형 셸을 10개의 셸요소로 분할하여 FE-TSCM과 FEM으로 계산 모델 1의 각 절점의 길이방향(s 방향)의 변위(u) 및 반지름방향 변위(w)를 계산한 결과가 Table 1이다. FE-TSCM으로 계산한 절점의 변위는 FEM의 결과와 완전히 일치하였다.

Fig. 4는 FE-TSCM으로 계산한 각 절점의 길이방향 및 반경방향의 변위를 보여준다. Fig. 4에서 길이방향 각 절점의 변위 u 는 셸의 중앙인 절점 6을 기

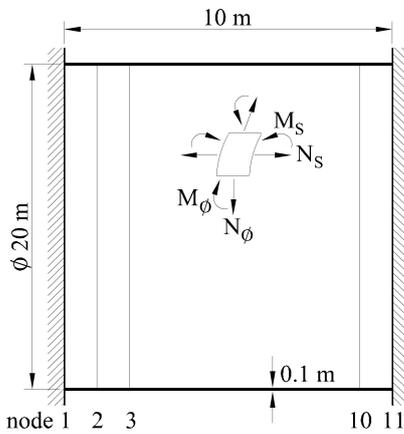


Fig. 3 Computational model 1

Table 1 Displacements of computational model 1

Node (i)	FE-TSCM		FEM	
	u_i [m]	w_i [m]	u_i [m]	w_i [m]
1	0.0000E-5	0.0000E-3	0.0000E-5	0.0000E-3
2	3.8298E-5	1.4727E-3	3.8298E-5	1.4727E-3
3	3.5231E-5	2.2885E-3	3.5231E-5	2.2885E-3
4	2.2116E-5	2.3053E-3	2.2116E-5	2.3053E-3
5	1.0534E-5	2.2460E-3	1.0534E-5	2.2460E-3
6	0.0000E-5	2.2331E-3	0.0000E-5	2.2331E-3
7	-1.0534E-5	2.2460E-3	-1.0534E-5	2.2460E-3
8	-2.2116E-5	2.3053E-3	-2.2116E-5	2.3053E-3
9	-3.5231E-5	2.2885E-3	-3.5231E-5	2.2885E-3
10	-3.8298E-5	1.4727E-3	-3.8298E-5	1.4727E-3
11	0.0000E-5	0.0000E-3	0.0000E-5	0.0000E-3

준으로 점대칭을 이룬다. 그리고 절점 1과 절점 6 사이의 셸은 길이방향의 변위가 양수이고, 절점 6과 절점 11 사이의 셸은 길이방향의 변위가 음수임을 알 수 있다. 또한 절점 2와 절점 10에서 길이방향의 변위의 절대치가 최대가 된다. 한편, 반경방향의 각 절점의 변위 w 는 셸의 중앙인 절점 6을 기준으로 좌우 대칭을 이룬다. 그리고 절점 1과 절점 11을 제외한 모든 절점의 변위는 양수이고, 절점 4와 절점 8에서 반경방향의 변위가 최대가 된다.

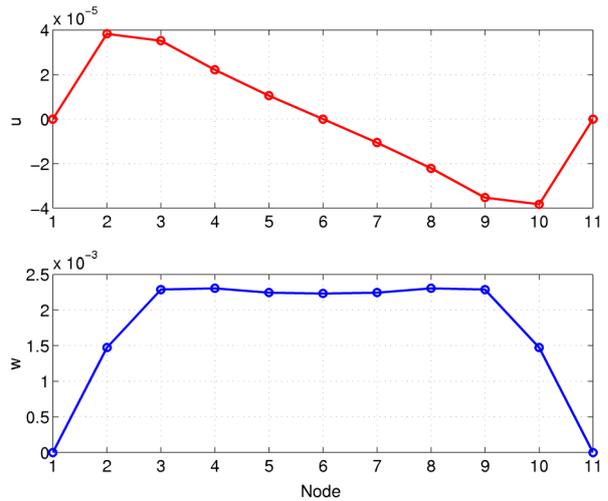


Fig. 4 Displacements of computational model 1

Table 2 Stress resultants of computational model 1

Node	N_s [N/m]	N_ϕ [N/m]	M_s [N]	M_ϕ [N]
1	0.8670E+6	0.2601E+6	1.0913E+5	3.2739E+4
2	1.3989E+6	3.4534E+6	-0.4163E+5	-1.2489E+4
3	1.3710E+6	5.1255E+6	-0.1498E+5	-0.4495E+4
4	1.2860E+6	5.1346E+6	0.0075E+5	0.0226E+4
5	1.2750E+6	5.0094E+6	0.0116E+5	0.0349E+4
6	1.2781E+6	4.9836E+6	0.0027E+5	0.0080E+4
7	1.2750E+6	5.0094E+6	0.0116E+5	0.0349E+4
8	1.2860E+6	5.1346E+6	0.0075E+5	0.0226E+4
9	1.3710E+6	5.1255E+6	-0.1498E+5	-0.4495E+4
10	1.3989E+6	3.4534E+6	-0.4163E+5	-1.2489E+4
11	0.8670E+6	0.2601E+6	1.0913E+5	3.2739E+4

FE-TSCM과 FEM으로 계산 모델 1의 합응력을 계산한 결과를 비교해 보면, 양 방법의 결과는 완전히 일치하였다. Table 2는 FE-TSCM과 FEM으로

계산한 각 절점의 합응력을 나타낸 것이다.

Table 2를 분석해 보면, 절점의 모든 합응력은 절점 6을 기준으로 좌우대칭이다. 합응력 N_ϕ 는 절점 4와 절점 8에서 최대가 되고, 그 값은 5.1346×10^6 N/m이다. 합응력 N_ϕ 를 셀의 두께로 나누면, 합응력 N_ϕ 로 인한 응력을 구할 수 있다. 계산 모델에서 셀의 두께는 일정하므로, 절점 4와 절점 8에서 N_ϕ 로 인한 응력은 최대가 되고, 그 값을 계산한 결과는 51.346 MPa이었다. 한편, 합응력 M_S 는 절점 1과 절점 11에서 최대가 되고, 그 값은 1.0913×10^5 N이다. 합응력 M_S 를 $t^2/6$ 으로 나누면, 합응력 M_S 로 인한 응력을 구할 수 있다. 계산 모델에서 셀의 두께는 일정하므로, 절점 1과 절점 11에서 M_S 로 인한 응력은 최대가 되고, 그 값을 계산한 결과 65.478 MPa이 되었다.

3.2 계산 모델 2

Fig. 5에 나타낸 계산 모델 2는 길이가 50 m, 지름이 20 m, 두께가 0.02 m인 원통형 셀이다. 원통형 셀 내부에는 물이 가득 채워져 있다. 따라서 원통형 내부는 수압을 받아서 압력이 아래로 내려올수록 선형적으로 증가한다. 경계조건은 최상부와 최하부에서 모두 완전 구속이다. 재료의 물성치는 종탄성계수가 2.06×10^{11} Pa, 푸아송 비가 0.3이다.

원통형 셀을 10개의 셀요소로 분할하여 FE-TSCM과 FEM으로 계산 모델 2의 각 절점의 길이방향 및 반지름방향의 변위를 계산한 결과가 Table 3이다. 두 방법에 의한 계산 결과는 완전히 일치하였다. 따라서 FE-TSCM의 신뢰성을 재확인할 수 있었다.

Fig. 6은 FE-TSCM으로 계산한 각 절점의 길이방향 및 반경방향의 변위를 보여준다. Fig. 6에서 길이

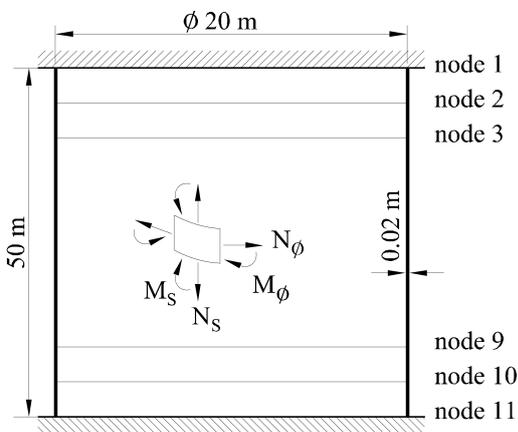


Fig. 5 Computational model 2

방향 및 반경방향의 변위는 절점 1과 절점 11을 제외한 모든 절점에서 양수이다. 그리고 길이방향의 변위 u 는 셀의 중앙인 절점 6에서 최대가 되고, 반경방향의 변위 w 는 절점 10에서 최대가 된다.

Table 3 Displacements of computational model 2

Node (i)	FE-TSCM		FEM	
	u_i [m]	w_i [m]	u_i [m]	w_i [m]
1	0.0000E-3	0.0000E-2	0.0000E-3	0.0000E-2
2	0.6658E-3	0.0184E-2	0.6658E-3	0.0184E-2
3	1.2291E-3	0.1722E-2	1.2291E-3	0.1722E-2
4	1.6212E-3	0.3022E-2	1.6212E-3	0.3022E-2
5	1.8367E-3	0.4245E-2	1.8367E-3	0.4245E-2
6	1.8743E-3	0.5453E-2	1.8743E-3	0.5453E-2
7	1.7343E-3	0.6680E-2	1.7343E-3	0.6680E-2
8	1.4178E-3	0.7996E-2	1.4178E-3	0.7996E-2
9	0.9300E-3	0.9629E-2	0.9300E-3	0.9629E-2
10	0.2968E-3	1.2057E-2	0.2968E-3	1.2057E-2
11	0.0000E-3	0.0000E-2	0.0000E-3	0.0000E-2

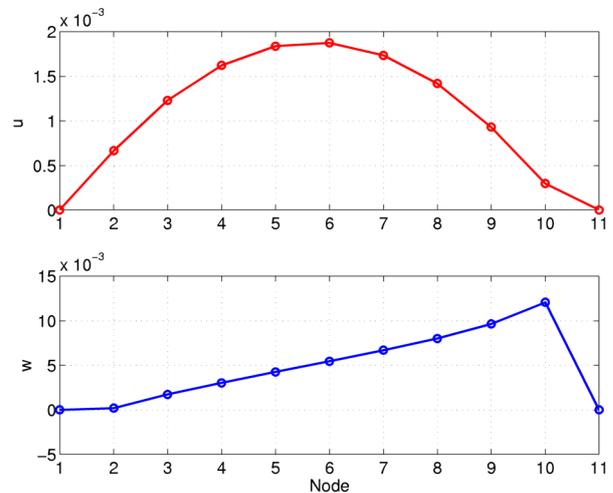


Fig. 6 Displacements of computational model 2

FE-TSCM과 FEM으로 계산 모델 2에 대한 합응력을 계산한 결과는 완전히 일치하였고, Table 4는 FE-TSCM과 FEM으로 계산한 각 절점의 합응력을 나타낸 것이다.

Table 4에서 합응력 N_ϕ 는 절점 10에서 최대가 되고, 그 값은 5.3324×10^6 N/m이다. 합응력 N_ϕ 를 셀의 두께로 나누면, 합응력 N_ϕ 로 인한 응력을 구할 수

있다. 계산 모델에서 셸의 두께는 일정하므로, N_ϕ 로 인한 응력은 절점 10에서 최대가 되고, 그 값을 계산한 결과는 266.62 MPa이었다. 한편, 합응력 M_S 는 절점 11에서 최대가 되고, 그 값은 588.70 N이다. 합응력 M_S 를 $t^2/6$ 으로 나누면 합응력 M_S 로 인한 응력을 구할 수 있다. 계산 모델에서 셸의 두께는 일정하므로, M_S 로 인한 응력은 절점 11에서 최대가 되고, 그 값을 계산한 결과 2.64915 MPa이 되었다.

Table 4 Stress resultants of computational model 2

Node	N_S [N/m]	N_ϕ [N/m]	M_S [N]	M_ϕ [N]
1	0.6029E+6	0.1809E+6	0.8895E+2	0.2668E+2
2	0.5815E+6	0.2504E+6	0.9389E+2	0.2817E+2
3	0.6665E+6	0.9094E+6	0.3211E+2	0.0963E+2
4	0.6855E+6	1.4506E+6	0.0889E+2	0.0267E+2
5	0.6911E+6	1.9562E+6	0.0174E+2	0.0052E+2
6	0.6942E+6	2.4548E+6	-0.0219E+2	0.0066E+2
7	0.7006E+6	2.9622E+6	-0.1019E+2	-0.0306E+2
8	0.7219E+6	3.5108E+6	-0.3704E+2	-0.1111E+2
9	0.8003E+6	4.2071E+6	-1.2937E+2	-0.3881E+2
10	1.2166E+6	5.3324E+6	-2.9665E+2	-0.8900E+2
11	-0.2688E+6	-0.0806E+6	5.8870E+2	1.7661E+2

4. 결 론

본 연구에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용한 축대칭 원통형 셸의 응력해석 알고리즘이 정식화된다. 그리고 이를 기반으로 전산 프로그램을 개발한 후, 2가지 수치계산 모델에 대해 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 축대칭 원통형 셸의 변위와 응력을 계산하였고, 그 결과를 비교해 보면 유한요소-전달강성계수법이 축대칭 원통형 셸의 응력해석에 대해 신뢰성 있는 계산 결과를 제공함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. W. Flügge, 1973, "Stresses in Shells", Springer-Verlag, New York.
2. W. Jr. Weaver and P. R. Johnston, 1984, "Finite Elements for Structural Analysis", Prentice-Hall,

3. M. S. Choi and D. H. Moon, 2012, "Static Analysis of Three Dimensional Solid Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method Introducing Hexahedral Element", Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 16, No. 1, pp. 78-83.
4. M. S. Choi, 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element- Transfer Stiffness Coefficient Method", KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805-815.
5. M. S. Choi, 2007, "Structural Analysis of Plate Structures by Transfer of Stiffness Coefficient", Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 11, No. 1, pp. 92-97.
6. M. S. Choi, D. H. Moon and H. Y. Jung, 2003, "Static Analysis of Frame Structures Using Transfer of Stiffness Coefficient", Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea, Vol. 16, No. 1, pp. 9-18.
7. J. E. Gibson, 1980, "Thin Shells (Computing and Theory)", Pergamon, Oxford, pp. 224-248.