

감마분포를 따르는 재료강도의 신뢰도 예측과 응용

박성호* · 김재훈***

* 국방과학연구소 종합시험단, ** 충남대학교 기계설계공학과

Estimation and Application of Reliability Values for Strength of Material Following Gamma Distribution

Sung Ho Park* and Jae Hoon Kim***

* Defence Systems Test Center, Agency for Defence Development,

** Dept. of Mechanical Design, Choongnam Nat'l Univ.

(Received June 7, 2011; Revised December 7, 2011; Accepted December 12, 2011)

Key Words : Reliability(신뢰도), Stress-Strength Interference Theory(응력-강도 간섭이론), Gamma Distribution(감마분포), Extreme Value Distribution(극치분포), Factor of Safety(안전율), Coefficient of Variation(변동계수)

초록: 취성이 큰 재료의 강도는 일반적으로 정규분포 또는 와이블분포로 설명되어 왔으나 감마분포도 적합할 수 있다. 재료의 파손이 가해진 응력의 연속된 값 중 가장 큰 값에 좌우된다면 극치분포를 적용하는 것이 합당하다. 본 논문에서는 재료강도가 감마분포를 따르며 극치분포하는 응력이 작용할 경우 응력-강도 간섭이론에 기반하여 신뢰도 계산식을 제시하였으며, 확률분포 파라미터별 신뢰도와 안전율 및 변동계수와의 관계를 통하여 신뢰도 계산식의 유효성을 입증하였다. 안전율과 변동계수에 기반한 신뢰도 예측방법으로 목표 신뢰도가 설정되었을 때 최소한 요구되는 안전율과 최대 허용되는 응력의 변동계수를 예측할 수 있다.

Abstract: The strength of brittle material has commonly been characterized by a normal distribution or Weibull distribution, but it may fit the gamma distribution for some material. The use of an extreme value distribution is proper when the largest values of a set of stresses dominate the failure of the material. This paper presents a formula for reliability estimation based on stress-strength interference theory that is applicable when the strength of material is distributed like a gamma distribution and the stress is distributed like an extreme value distribution. We verified the validity of the equation for the reliability estimation by examining the relationships among the factor of safety, the coefficient of variation, and the reliability. The required minimum factor of safety and the highest allowable coefficient of variation of stress can be estimated by choosing an objective reliability and estimating the reliabilities obtained for various factors of safety and coefficients of variation.

1. 서론

신뢰도(reliability)는 “어떤 제품, 부품 또는 시스템이 규정된 조건에서 정해진 기간 동안 의도한 기능을 만족스럽게 수행할 수 있는 확률”이라고 정의된다.⁽¹⁾ 재료가 파손되지 않고 기능을 원만히 수행하기 위해서는 재료의 강도가 외부 하중에 의해 재료에 발생하는 응력보다 클 필요가 있다. 이때 기준이 되는 재료 강도로서 항복응력, 인장강도, 피로한도 등이 사용된다.

이러한 재료의 기준강도는 실험 등에 의해 얻어지며 본질적으로 크기효과, 표면처리, 노치효과 등에 의한 변동요소로 불확실성이 존재한다.⁽²⁾ 재료에 가해지는 하중에 의하여 발생하는 응력 역시 응력집중, 온도요소, 응력의 조합 등의 변동요소로 특정한 확률분포로 가해진다. 따라서, 어떤 제품, 부품 또는 시스템의 신뢰도를 예측하기 위해서는 재료강도의 변동과 부가되는 하중에 의한 응력의 변동을 고려하여야 하며 강도 및 응력의 확률분포를 확인하여야 한다.

세라믹재료와 같이 취성이 큰 재료는 경도, 강성 및 탄성계수, 내마모성, 내식성 등이 뛰어나지

† Corresponding Author, kimjhoon@cnu.ac.kr

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

Table 1 Combination of statistical distributions for stress and strength presented in ref. [8]

Stress \ Strength	Normal	Log-Normal	Exponential	Gamma	Weibull	Type I - L.E.V.	Type II - L.E.V.
Normal	○		○				
Log-Normal		○					
Exponential	○		○				
Gamma				○			
Weibull	○				○	○	○
Type I - S.E.V.					○	○	○
Type I - L.E.V.					○	○	○

만, 인성과 강도신뢰성이 나쁘다. 일반적으로 취성이 큰 재료의 파손은 와이블분포로 설명되어 왔으며^(3,4) 부품 또는 시스템에 작용하는 응력은 정규분포로 가정하고 설계에 응용하여 왔다. 그러나, B. Basu 등⁽⁵⁾은 취성재료 4종(ZrO₂-TiB₂ composite, ZrO₂ ceramic, Si₃N₄ ceramic 및 glass)의 굽힘실험 결과에 대한 적합도 검정으로 ZrO₂-TiB₂ composite과 glass는 와이블분포를 가장 잘 따르지만 ZrO₂ ceramic은 감마분포를, Si₃N₄ ceramic은 로그-정규분포를 가장 잘 따르며, 취성재료의 강도해석시 와이블분포만 적용할 것이 아니라 다양한 확률분포에 대한 적합도 검정이 필요하다고 주장하였다.

모집단이 어떤 확률분포를 하고 있을 때 n 개의 표본 샘플링을 m 회 되풀이하여 얻어진 최소값 또는 최대값들은 극치분포(extreme value distribution)를 따른다. 일반적으로 재료의 파손은 가해진 응력의 연속된 값 중 가장 큰 값들에 좌우되며 정규분포와 같이 지수함수로부터 얻어진 최대값들은 제1형 최대치 극치분포를 적용하는 것이 적합하다.^(6,7)

Table 1과 같이 다양한 재료강도와 응력의 확률분포모형 조합에 대한 신뢰도 예측식이 연구되어 왔으며 Kapur와 Ramberson⁽⁸⁾은 강도와 응력이 정규분포, 로그-정규분포, 지수분포, 감마분포, 와이블분포 및 극치분포를 따를 경우 신뢰도 예측식을 제시하였다. 또한, Herrington⁽⁹⁾은 와이블분포를 따르는 복합재료에 제1형 최대치 극치분포가 작용할 경우의 신뢰도 예측식을 제시하였다. 그렇지만 재료강도가 감마분포를 따를 때 제1형 최대치 극치분포가 작용할 경우의 신뢰도 예측식은 발표되지 않았다.

본 논문에서 재료강도가 감마분포이며 응력이 제1형 최대치 극치분포를 따를 때 신뢰도 예측식과 각 확률분포의 파라미터로부터 계산된 안전율

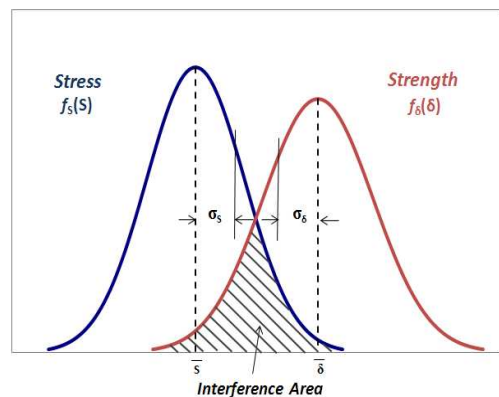


Fig. 1 Stress-strength interference model

과 변동계수로부터 신뢰도를 예측하는 방법을 제시하였다. 또한, 목표 신뢰도가 주어졌을 때 강도 설계를 위하여 최소한 요구되는 안전율과 최대 허용되는 응력의 변동계수를 결정하는 방법을 제시하였다.

2. 신뢰도 계산방법

2.1 신뢰도 계산식 도출

응력과 재료강도가 어떠한 확률적 분포를 하고 있을 때 파손확률 또는 신뢰도를 평가하는 방법으로 응력-강도모델 또는 간섭이론을 이용한다. 응력-강도모델의 개념은 Fig. 1과 같이 설명되며 신뢰도(R)는 식 (1)과 같이 응력(s)과 강도(δ)가 각각 특정의 확률분포를 따를 때 강도가 응력보다 클 확률로 표현되며 $f_s(s)$ 와 $f_s(\delta)$ 는 각각 응력과 강도의 확률밀도함수이다. 응력과 강도는 확률분포로서 표현되는 변동요소에 의한 불확실성으로 Fig. 1의 간섭영역에 해당하는 파손확률(\bar{R})을 가지며 식 (2)로 표현할 수 있다.

$$R = P(\delta > s) = P(\delta - s > 0) \tag{1}$$

$$\bar{R} = 1 - R = P(\delta \leq s) \tag{2}$$

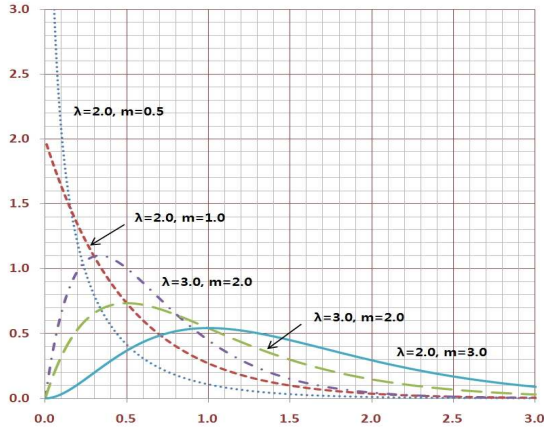


Fig. 2 Probability density functions for gamma distribution of various parameters

감마분포를 따르는 강도의 확률밀도함수는 식 (3)과 같으며, λ 는 척도모수, m 은 형상모수이며 $\Gamma(m)$ 은 감마함수이다. 평균은 $\mu_\delta = m/\lambda$ 이며, 표준편차는 $\sigma_\delta = \sqrt{m}/\lambda$ 이다.

$$f_\delta(\delta) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \delta^{m-1} e^{-\lambda\delta} \quad (3)$$

여기서, $\lambda > 0, m > 0, 0 \leq \delta < \infty$

감마분포는 와이블분포와 마찬가지로 형상모수에 따라 세가지 고장율의 형태를 모두 표현할 수 있는데, $m < 1$ 일 때 시간에 따라 고장율이 감소하는 감소고장율(DFR), $m > 1$ 일 때 증가고장율(IFR) 그리고 $m = 1$ 일 때 일정고장율(CFR)의 특성을 보인다. 특히, $m = 1$ 일 때 지수분포를 따르며 고장율 함수의 형태가 와이블분포보다 복잡함 등의 이유로 수명분포로서의 활용도가 떨어지지만 여러 수명자료에 잘 적합하는 경우도 종종 발생한다. Fig. 2는 감마분포의 파라미터에 대한 확률밀도함수 그래프이다. 척도모수를 고정하고 형상모수를 증가시키면 평균과 표준편차가 커지며 오른쪽으로 꼬리모양이 커지고 퍼진 모양이 된다. 반대로 형상모수를 고정하고 척도모수를 증가시키면 평균과 표준편차가 반비례적으로 작아지며 뾰족한 모양으로 그래프 경사가 커진다.

제1형 최대치 극치분포(Gumbel 분포)를 따르는 응력의 누적분포함수는 식 (4)와 같으며, s_0 는 위치모수, θ 는 척도모수이다. 평균은 $\mu_s = s_0 + \gamma\theta$ 이며, 표준편차는 $\sigma_s = \theta \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ 이다. γ 는 Euler-Mascheroni 상수로 $\gamma \approx 0.5772156649015328606$ 이다.

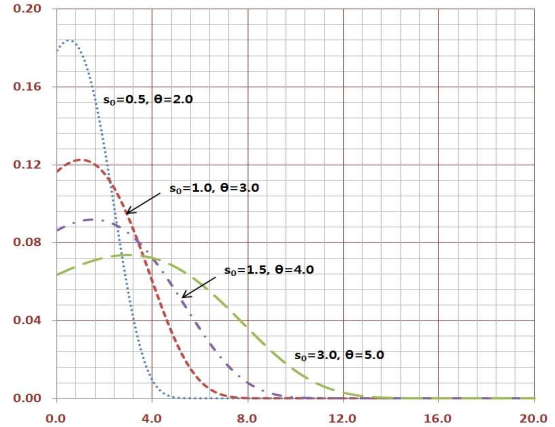


Fig. 3 Probability density functions for Gumbel distribution of various parameters

$$F_s(s) = \exp\left[-\exp\left\{-\left(\frac{s-s_0}{\theta}\right)\right\}\right] \quad (4)$$

여기서, $-\infty < s < \infty, \theta > 0$

특정한 분포를 하는 모집단에서 표본을 채취하고 최소치 또는 최대치를 선택할 때 반복된 샘플링 집단으로부터 얻어지는 최소치 또는 최대치가 보이는 확률분포는 극치분포를 따른다. 따라서, 각 극치값의 분포는 각각의 모집단 분포의 꼬리부분의 형태에 크게 영향을 받으며 모집단 분포의 꼬리부분의 형태에 따라 3가지 종류가 있다. 모집단 분포의 꼬리부분이 정규분포와 같이 지수함수로 나타내어질 때 최대 극치값의 접근분포는 2중 지수분포가 되며 제1형 최대치 극치분포 또는 Gumbel 분포라고도 한다. Gumbel 분포에서 척도모수(θ)가 커질수록 평균과 표준편차가 커지므로 Fig. 3에서 오른쪽으로 분포하면서 퍼진 모양이 된다.

신뢰도는 응력-강도모델⁽²⁾로부터 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\delta) \left[\int_{-\infty}^{\delta} f_s(s) ds \right] d\delta \quad (5)$$

여기서, $\bar{R} = 1 - R = P(\delta \leq s)$ 이므로 파손확률(\bar{R})로 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{R} &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\delta) \left[\int_{-\infty}^{\delta} f_s(s) ds \right] d\delta \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\delta) F_s(\delta) d\delta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_s(\delta)] f_\delta(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (6)$$

식 (3)의 감마분포를 따르는 강도의 확률밀도함수($f_\delta(\delta)$)와 식 (4)의 제1형 최대치 극치분포를 따르는 응력의 누적분포함수($F_s(s)$)를 식 (6)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \int_0^\infty \left[1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] \right] \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \delta^{m-1} e^{-\lambda\delta} d\delta \\ &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \left[1 - \exp\left[-\exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] \right] \delta^{m-1} e^{-\lambda\delta} d\delta \\ &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \delta^{m-1} \left[\exp(-\lambda\delta) - \exp\left[-\lambda\delta - \exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] \right] d\delta \\ &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \left[\int_0^\infty \delta^{m-1} \exp(-\lambda\delta) d\delta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \delta^{m-1} \exp\left[-\lambda\delta - \exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] d\delta \right]\end{aligned}$$

여기서, $z = \lambda\delta$ 라고 놓으면 $\delta = z/\lambda$ 이고 $d\delta = dz/\lambda$ 이므로 식의 첫 번째 부분이 다음과 같이 간략화된다.

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty \delta^{m-1} \exp(-\lambda\delta) d\delta \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{m-1} \exp(-z) \frac{1}{\lambda} dz \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m-1} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty z^{m-1} \exp(-z) dz \\ &= \frac{\Gamma(m)}{\lambda^m}\end{aligned}$$

따라서, 파손확률식은 다음과 같다. 즉,

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \left[\frac{\Gamma(m)}{\lambda^m} - \int_0^\infty \delta^{m-1} \exp\left[-\lambda\delta - \exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] d\delta \right] \\ &= 1 - \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \delta^{m-1} \exp\left[-\lambda\delta - \exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] d\delta\end{aligned}$$

신뢰도는 $R = 1 - \bar{R}$ 이므로 식 (7)과 같다.

$$R = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \delta^{m-1} \exp\left[-\lambda\delta - \exp\left(-\frac{\delta-s_0}{\theta_s}\right)\right] d\delta \quad (7)$$

식 (7)은 재료강도의 확률분포와 관련된 파라미터인 λ , m 과 재료에 작용할 것으로 예상되는 응력의 확률분포와 관련된 파라미터 s_0 , θ_s 가 결정되면 δ 에 관한 적분식이며 수치해석 방법으로 해를 구할 수 있다. 재료강도의 확률분포와 관련된 파라미터는 실험으로 구해지지만 작용응력은 미리 결정되지 않기 때문에 재료에 작용하는 응력에 대한 신뢰도는 s_0 , θ_s , δ 에 관한 적분식이다.

작용응력의 확률분포와 관련된 파라미터가 결정되면 δ 에 관한 적분식의 해를 구할 수 있다.

2.2 안전율과 변동계수의 표현

안전율($n = \mu_\delta/\mu_s$) 또는 안전계수는 구조물의 안전을 유지하는 정도를 나타내기 위하여 재료강도를 설계하중으로 나눈 값으로 식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$n = \frac{m/\lambda}{s_0 + \gamma\theta_s} \quad (8)$$

안전율값은 일반적으로 경험을 바탕으로 결정되며 규격⁽¹⁰⁻¹¹⁾이나 법률로 규정되기도 한다. 일반적으로 1보다 크며 재해나 인명과 관련된 경우 4 또는 5이상이며 경우에 따라 10이 될 때도 있다. 일반적으로 항공기 부품은 1.25~2.25, 고압용기는 3.5~4.0, 자동차 부품은 3.0의 값을 취한다. 또한, 취성재료는 상대적으로 연성, 금속재료에 비하여 높은 안전율값을 취한다.

변동계수($c_v = \sigma/|\mu|$)는 확률분포의 퍼진 정도를 정규화하기 위하여 표준편차를 평균의 절대값으로 나눈 값으로 응력의 변동계수는 식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$c_{vs} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\theta_s}{|s_0 + \gamma\theta_s|} \quad (9)$$

식 (8)로부터 $s_0 + \gamma\theta_s = \frac{m/\lambda}{n}$ 이므로 식 (9)에서

$\theta_s = \frac{\sqrt{6}}{\pi} c_{vs} |s_0 + \gamma\theta_s| = \frac{\sqrt{6}}{\pi} c_{vs} \left| \frac{m/\lambda}{n} \right|$ 이다. 즉, 안전율(n)과 응력의 변동계수(c_v)가 주어지면, 식 (8)과 식 (9)로부터 식 (10)과 식 (11)의 응력에 관한 확률분포의 척도모수(θ_s)와 위치모수(s_0)를 구할 수 있다. 강도에 관한 확률분포의 척도모수(λ) 및 형상모수(m)는 실험을 획득하므로 설계변수인 안전율(n)과 응력의 변동계수(c_{vs})로부터 식 (10)과 식 (11)로부터 θ_s 와 s_0 를 구하면 식 (7)을 δ 에 관하여 수치적분하여 신뢰도를 예측할 수 있다.

$$\theta_s = \frac{\sqrt{6}}{\pi} c_{vs} \left| \frac{m/\lambda}{n} \right| \quad (10)$$

$$s_0 = \frac{m/\lambda}{n} - \gamma\theta_s \quad (11)$$

3. 신뢰도 계산결과

지르코니아(ZrO_2)는 엔지니어링용 세라믹스 중

Table 2 Estimated parameters, the fitted chi-square values, K-S distances and log-likelihood values for different distribution functions, taken from Ref. [5]

Statistical distribution	Shape parameter	Scale parameter	Kolmogorov	Log-likelihood
Weibull	2.8045	0.1030	0.1873	-85.9770
Gamma	6.3305	0.7358	0.1634	-85.5922
Log-normal	0.4087	0.1260	0.1608	-85.6416
Gen. Exp.	10.2548	0.3432	0.1617	-85.6909
Normal	8.6032(mean)	0.2956(variance)	0.1989	-85.6209

Table 3 Basic statistics for strength of ZrO₂ following gamma distribution

Statistic	Value	Statistic	Value
Scale parameter(λ)	0.7358	Mode ($(m-1)\lambda$)	7.24
Shape parameter(m)	6.3305	Median	8.16
Expectation (m/λ)	8.60	Skewness ($\gamma_1 = 2/\sqrt{m}$)	0.795
Variance (m/λ^2)	11.69	Kurtosis ($\gamma_2 = 6/m$)	0.948

상온에서 매우 우수한 기계적 강도를 가지며 열팽창률도 금속과 가까와 금속과 조합해서 사용하는 데 적합하다. 또한, 열전도율이 낮으며 인성이 높고 일반적으로 세라믹스의 약점이었던 무릎을 극복한 재료이다. 이러한 기계적 특성으로 지르코니아는 내화재, 유백제, 연마재 등으로 활용되고 있으며 높은 생체친화성으로 생체재료로도 각광받고 있다.

자료가 특정 확률분포를 따르는지 여부를 확인하고 모집단의 모수를 추정하기 위하여 콜모고로프-스미르노프법(Kolmogorov-Smirnov test)과 최대우도법(Maximum-likelihood test)이 많이 활용된다. Table 2는 굽힘실험으로 얻은 지르코니아의 강도에 대한 적합도 검정 및 모수추정 결과이며, Kolmogorov값이 작을수록 Log-likelihood값이 클수록 해당 확률분포에 더욱 적합하다고 볼 수 있다. 적합도 검정결과 Kolmogorov값을 볼 때 로그-정규분포가 가장 적합하나, 소수점 이하 2자리까지 감마분포 및 지수분포와 차이가 없다. 반면, Log-likelihood값에 대하여 소수점 이하 2자리까지 볼 때 감마분포가 가장 적합하다. Kolmogorov값과 log-likelihood값에 대한 확률분포간 적합도 검정값의 차이가 크지 않지만 지르코니아 재료의

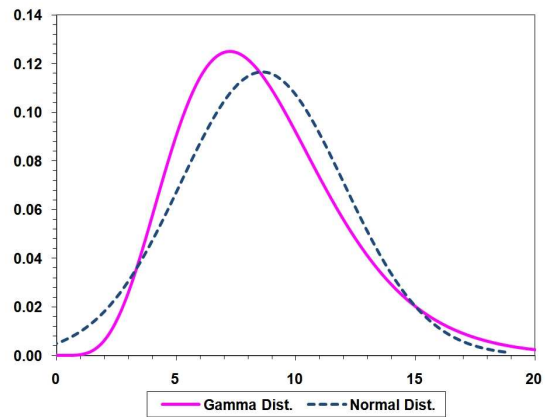


Fig. 4 Comparison of p.d.f. of gamma and normal distribution with same mean and variance

강도분포가 감마분포에 충분히 적합하다고 볼 수 는 있다.

Table 3은 형상모수값과 척도모수값으로 계산된 기초통계량이다. 정규분포는 최빈값과 중앙값이 기댓값과 동일한 좌우대칭이며 왜도(Skewness)와 첨도(Kurtosis)가 모두 0이다. Table 3에서 감마분포와 동일한 기댓값(평균)과 분산을 가지는 정규분포와 비교해 볼 때, 최빈값과 중앙값은 기댓값보다 작으며 왜도와 첨도가 0보다 크다. 즉, Fig. 4의 확률밀도함수 형상과 같이 확률분포의 꼬리가 오른쪽으로 치진(right skewed) 형태이며, 정규분포보다 가파르다(steeper).

Fig. 5는 본 논문에서 계산한 응력과 강도 분포의 다양한 파라미터 조합중 서로 다른 척도모수(θ)와 위치모수(s_0)값을 가지고 극치분포하는 응력의 확률밀도함수(점선)와 Table 3의 감마분포를 따르는 강도의 확률밀도함수(실선)를 그래프로 함께 그린 것이다. 그래프에서 겹치는 부분 즉, 간섭영역이 파손확률(\bar{R})이며 신뢰도(R)는 $R=1-\bar{R}$ 로 식 (7)과 같이 예측할 수 있다.

재료강도 분포의 척도모수(λ)가 0.7358, 형상모수(m)가 6.3305인 감마분포를 따르며, 제1형 최대

Table 4 Coefficients of regression curve for reliability as coefficient of variation

Factor of Safety (n)	Coefficients of Regression Curve							Coefficient of Determination
	c ₆	c ₅	c ₄	c ₃	c ₂	c ₁	c ₀	
1.25	-0.0327	0.4862	-2.8586	8.2975	-11.5680	4.0030	65.3633	0.9998
1.50	-0.0831	1.1127	-5.7286	13.7857	-13.3216	-4.9603	79.7306	1.0000
1.75	-0.1052	1.4076	-7.2459	17.4715	-17.0034	-6.4774	88.0412	1.0000
2.00	-0.1069	1.4476	-7.5870	18.8776	-19.8125	-5.0097	92.7458	1.0000
2.25	-0.0961	1.3215	-7.0889	18.3208	-20.8153	-2.9420	95.4346	1.0000
2.50	-0.0793	1.1114	-6.1240	16.4977	-20.2253	-1.1883	97.0107	1.0000
3.00	-0.0441	0.6504	-3.8484	11.4676	-16.4095	0.7753	98.5685	1.0000
4.00	-0.0012	0.0579	-0.6736	3.4091	-7.8361	1.1706	99.5559	1.0000
5.00	0.0106	-0.1253	0.4652	-0.0994	-2.9096	0.5684	99.8377	1.0000

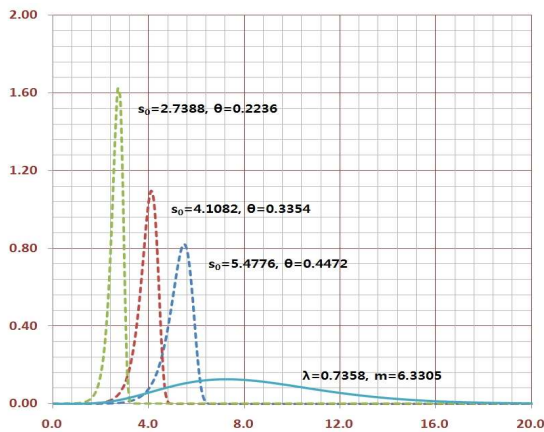


Fig. 5 Probability density functions of gamma and extreme value distribution

치 극치분포하는 응력이 작용할 경우 응력의 변동계수가 0.10 ~ 1.00, 안전율이 1.25 ~ 5.00일 때 응력의 척도모수(θ)와 위치모수(s_0)를 식 (10)과 식 (11)로부터 구하고 식 (7)을 수치적분하여 신뢰도를 계산하였다. 변동계수는 평균에 대한 표준편차 비율이므로 1.00까지만 계산하였으며, 안전율은 고압용기에 일반적으로 적용하는 3.5~4.0보다 큰 5.00까지 계산하였다.

Fig. 6은 응력의 변동계수에 대한 안전율과 신뢰도와와의 관계이다. 응력의 변동계수가 작을수록, 안전율이 클수록 신뢰도가 높다. Fig. 7은 변동계수에 대한 분산비와 신뢰도와와의 관계이다. 척도모수는 확률분포의 퍼진 정도를 나타내는데, 감마분포에서 척도모수(λ)는 분포의 표준편차와 반비례하며 극치분포에서 척도모수(θ)는 분포의 표준편차와 비례한다. 극치분포하는 응력의 척도모

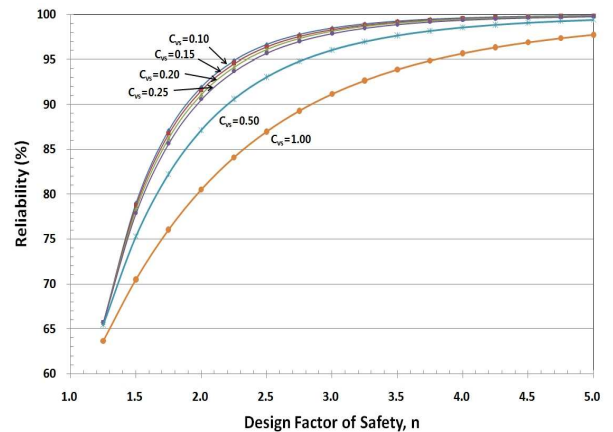


Fig. 6 Reliability as design factor of safety for coefficient of variation

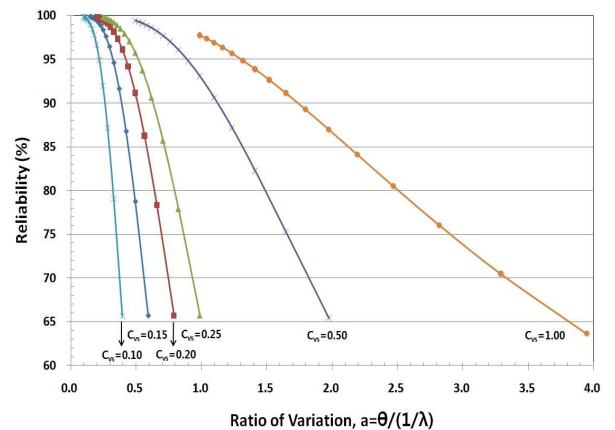


Fig. 7 Reliability as ratio of variance for coefficient of variation

수와 감마분포하는 강도의 척도모수간 비율을 분산비(ratio of variance, $a = \theta/(1/\lambda)$)라고 할 때 Fig. 7에서 분산비가 커질수록 신뢰도는 작아진다. 또

Table 5 Maximum allowed value of coefficient of variation to obtain the reliability objectives

Factor of Safety (n)	Reliability Objectives							
	70%	80%	90%	95%	97%	99%	99.5%	99.9%
1.25	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
1.50	1.0682	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
1.75	1.8286	0.6733	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
2.00	2.5619	1.0480	0.2929	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
2.25	3.3283	1.3935	0.5487	0.0922	n/a	n/a	n/a	n/a
2.50	4.0064	1.7413	0.7512	0.3240	0.0079	n/a	n/a	n/a
3.00	4.5765	2.4206	1.1167	0.6161	0.3863	n/a	n/a	n/a
4.00	n/a	3.7300	1.8206	1.1006	0.7943	0.3922	0.2018	n/a
5.00	n/a	n/a	2.5088	1.5631	1.1668	0.6567	0.4561	n/a

한, 변동계수가 작을수록 분산비의 차이에 대한 신뢰도의 차이가 커진다.

Table 4는 각 안전율값에 대하여 변동계수와 신뢰도의 관계를 식 (12)의 6차 다항식으로 회귀분석한 결과이다. Table 4에서 기여율은 결정계수라고도 하며 회귀분석에서 총변동(total variation) 중에서 회귀선에 의하여 설명되는 변동이 차지하는 비율로, 만약 모든 값이 회귀선상에 위치한다면 기여율은 1이다. 기여율을 보면 대부분 1.0000에 가까운 값을 보이므로 6차 회귀식으로 매우 잘 설명되고 있음을 알 수 있다.

$$R = c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \quad (12)$$

Fig. 8은 안전율에 대한 변동계수와 신뢰도와의 관계이다. 변동계수는 평균에 대한 표준편차의 비율을 의미하므로 변동계수가 클수록 신뢰도는 작다. 또한, 동일한 변동계수에 대하여 안전율이 클수록 신뢰도 역시 크다. Fig. 9는 안전율에 대한 분산비와 신뢰도와의 관계이다. 분산비가 커질수록 신뢰도가 작아지며, 동일한 분산비에 대하여 안전율이 클수록 신뢰도 역시 크다.

Table 5는 Table 4에서 얻은 안전율별 변동계수와 신뢰도의 6차 회귀식으로 부터 목표 신뢰도 (R)가 주어졌을 때 회귀식을 만족하는 변동계수 값의 최대값을 계산한 것이다. 6차 방정식의 해를 구하기 위하여 뉴턴-랩슨의 수치해석법을 사용하였다. Table 5로부터 지르코니아 재료에 대하여 목표로 하는 신뢰도를 얻기 위하여 최소로 요구되는 안전율과 최대 허용되는 응력의 변동계수를 예측할 수 있다. 예를 들면, 97%의 신뢰

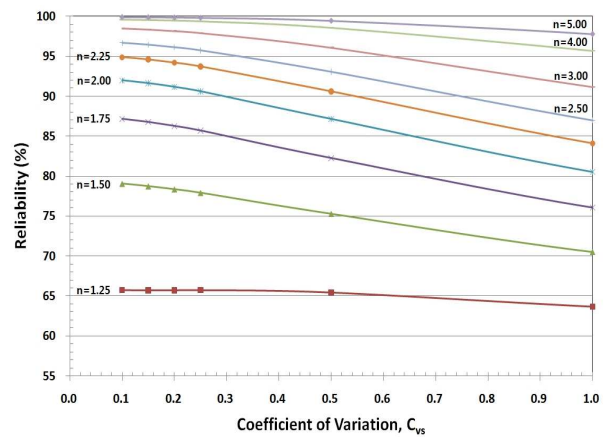


Fig. 8 Reliability as coefficient of variation for design factor of safety

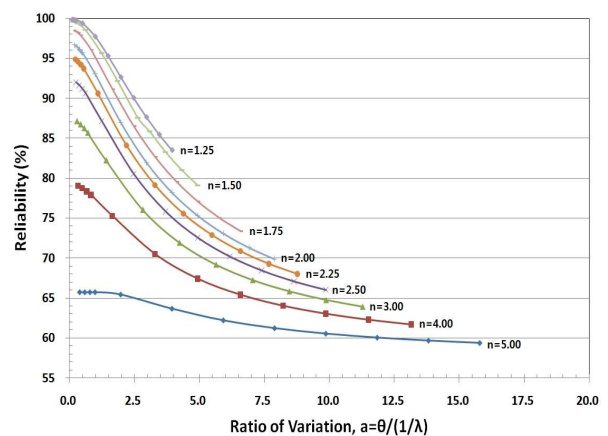


Fig. 9 Reliability as ratio of variation for design factor of safety

도를 얻기 위하여 안전율은 최소한 2.5 이상이어야 한다. 또한, 97%의 신뢰도를 얻기 위하여 안전율이 3.0일 때 최대 허용되는 응력의 변동계

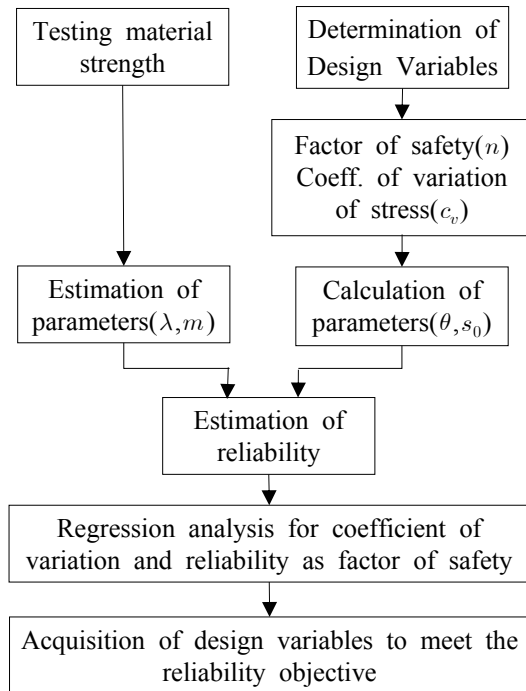


Fig. 10 Schematic diagram to estimate reliability and to obtain design variables

수는 0.3868 이하이다.

Fig. 10과 같이 재료강도 실험과 설계변수 결정에 의하여 산출된 모수를 이용하여 신뢰도를 예측하고, 안전율과 응력의 변동계수별 이미 계산된 신뢰도값과의 관계를 회귀분석하여 목표 신뢰도가 주어졌을 때 최소 요구안전율과 최대 허용응력의 변동계수를 구할 수 있다.

4. 결 론

재료강도가 감마분포를 따르며 제1형 최대치 극치분포를 따르는 응력이 작용할 경우 응력-강도 간섭이론을 이용한 신뢰도 예측식을 제시하였다. Fig. 6~Fig. 9의 각 설계변수별 신뢰도와의 관계도로부터 제시된 신뢰도 예측식의 유효성을 입증할 수 있었다. 또한, 목표로 하는 신뢰도를 얻기 위한 설계변수(최소요구 안전율 및 최대허용응력의 변동계수)를 선정하는 방법을 구체적으로 제시하였다.

참고문헌

- (1) DOD, 1966, Definitions of Terms for Reliability and Maintainability, MIL-STD-721B
- (2) Song, J. H. and Park, J. H., 2007, "An Introduction to Reliability Engineering in Mechanical Design," *Intervision*, Seoul, pp. 263~278.
- (3) Jayatilaka, A. De S. and Trustrum, K., 1977, "Statistical Approach to Brittle Fracture," *Journal of Materials Science*, Vol. 12, No. 7, pp. 1426~1430.
- (4) Wetherhold, R. C., 1986, "Statistical Distribution of Strength of Fiber-Reinforced Composite Materials," *Polymer Composites*, Vol. 7, No. 2, pp. 116~123.
- (5) Basu, B., Tiwari, D., Kund, D. and Prasad, R., 2009, "Is Weibull Distribution the Most Appropriate Statistical Strength Distribution for Brittle Materials?," *Ceramics International*, Vol. 35, pp. 237~246.
- (6) Gumbel, E. J. and Lieblein, J., 1954, "Some Applications of Extreme Value Methods," *The American Statistician*, Vol. 8, No. 5, pp. 14~17.
- (7) Shin, J. I., Park, C. H., Lee, S. S. and Lee, B. J., 2007, "An Improvement for Evaluating Load Carrying Capacity by Passing Vehicles of PSC-BOX Bridge," *J. of KSMI*, Vol. 11, No. 4, pp. 147~151.
- (8) Kapur, K. C. and Lamberson, L. R., 1977, *Reliability Engineering Design*, John Wiley & Sons, NewYork, pp. 122~159.
- (9) Herrington, P. D., 1994, "Stress-Strength Interference Theory for a Pin-Loaded Composite Joint," *Composite Engineering*, Vol. 5, No. 8, pp. 975~982.
- (10) NASA, 2008, *Structural Design and Test Factors of Safety for Spaceflight Hardware*, NASA-STD-5001A.
- (11) AIAA, 2005, *Space Systems - Structures, Structural Components, and Structural Assemblies*, AIAA S-110-2005.