

해석적 방법을 통한 3축 공작기계의 기하학적 오차 민감도 분석[§]

박성령* · 양승한*[†]

* 경북대학교 기계공학부

Analytical Sensitivity Analysis of Geometric Errors in a Three-Axis Machine Tool

Sung Ryung Park* and Seung Han Yang*[†]

* School of Mechanical Engineering, Kyungpook Nat'l Univ.

(Received June 21, 2011; Revised December 3, 2011; Accepted December 8, 2011)

Key Words : Sensitivity Analysis(민감도 분석), Geometric Error(기하학적 오차), Machine Tool(공작기계), Analytical Method(해석적 방법), Variance Decomposition(분산 분해)

초록: 본 연구는 3축 공작기계에 있어 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향을 해석적 방법으로 분석하는데 목적이 있다. 먼저 기하학적 오차가 공작기계의 체적 오차에 미치는 영향을 제시하는 수학적 모델인 오차합성모델에 대해 분석한다. 민감도 분석은 분산 기반의 방법(Variance based method)을 사용하였으며 해석적 방법으로 분석하기 위해 평균 및 분산에 대해 목적 함수의 유형별로 그 해를 제시한다. 마지막으로 3축 공작기계의 예를 들어 민감도 분석을 하였다.

Abstract: In this paper, an analytical method is used to perform a sensitivity analysis of geometric errors in a three-axis machine tool. First, an error synthesis model is constructed for evaluating the position volumetric error due to the geometric errors, and then an output variable is defined, such as the magnitude of the position volumetric error. Next, the global sensitivity analysis is executed using an analytical method. Finally, the sensitivity indices are calculated using the quantitative values of the geometric errors.

1. 서론

조정밀 가공물의 수요 급증에 따라 이를 만드는 공작기계 또한 조정밀에 대한 요구가 높아지고 있다. 하지만 조정밀을 구현하기에는 동적인 영향, 가공 조건에 의한 영향, 환경에 의한 영향 및 기하학적 오차에 의한 영향 등으로 인해 그 한계가 있다. 현재 이러한 영향의 분석 및 해결 방법에 대한 연구가 많이 이루어졌다. 공작기계에 있어 1)동적인 영향은 서보 계인 불일치에 의해 발생하는 오차에 대한 선행 연구가 있다.⁽¹⁾ 또한 볼바 데이터에서 기하학적 오차의 영향을 제거하고 서보 계인 불일치를 추출하여 보정하는 방법이 제시된

바가 있다.⁽²⁾ 2)가공 조건에 의해 발생하는 오차는 가공 조건을 최적화하여 그 영향을 최소화하는 방법으로 해결한다.⁽³⁾ 3)환경에 의해 발생하는 오차 요소는 그 정도를 판단하는 기준을 제시한 연구⁽⁴⁾가 있지만 다른 요인과는 다르게 소프트웨어적인 보정 방법을 제시하기는 어렵다. 즉 고성능의 방진 시스템 및 항온·항습 시스템으로 환경에 의해 발생하는 오차를 최소화하고 있다. 마지막으로 4) 기하학적 오차는 공작기계에 있어 주요한 오차 요인으로 기하학적 오차의 평가 및 보정에 대한 연구는 많이 이루어졌다.⁽⁵⁻⁸⁾

가공물에 나타나는 오차에 대한 분석 및 평가는 직간접적으로 많은 선행 연구가 있지만 설계 단계에서 이를 예측하고 최적의 설계변수를 구하는 방법은 미비한 것이 현실이다. 특히 설계 단계에서 기하학적 오차에 의해 체적 오차에 미치는 영향의 정도를 분석한 사례⁽⁹⁾는 미비하며, 이는 민감도 분석을 통하여 그 영향의 파악이 가능한데 크게 국부(Local

§ 이 논문은 2011년도 대한기계학회 생산 및 설계공학부문 춘계 학술대회(2011.6.30-7.1, 라마다프라자 제주호텔)발표논문임

† Corresponding Author, syang@knu.ac.kr

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

sensitivity analysis) 및 전민감도 분석(Global sensitivity analysis)이 있다.⁽¹⁰⁾ 용어에서 알 수 있듯이 국부민감도 분석은 특정 위치에서의 영향을 파악할 수 있지만 모든 영역에서의 영향을 파악하기 힘든 단점이 있다. 이런 단점을 극복하기 위한 방법으로 전민감도 분석 기법이 있는데 이 방법은 목적함수가 복잡한 경우 계산상 어려운 단점이 있다. 분산 기반 민감도 분석(Variance based sensitivity analysis)은 전민감도 분석의 하나로 널리 알려져 있다.^(10,13) 이는 목적함수의 분산을 각 변수에 의해 영향을 받는 분산으로 분해(Decomposition)하여 민감도 분석을 하는 방법이다. 앞서 언급한 바와 같이 분산 기반 민감도 분석에 있어 큰 단점이 해석적인 계산이 용이하지 않다는 것이다. 그래서 일반적으로 몬테카를로 방법을 이용하여 민감도 분석을 한다. 이는 다른 통계적 방법에 비해 빠른 수렴으로 시행 횟수를 줄일 수 있는 장점이 있지만 랜덤한 수를 생성할 때의 방법에 따라 그 해가 달라지는 경우가 발생하기도 한다.⁽¹⁰⁾

본 연구에서 체적 오차를 이용하여 정의하는 목적 함수는 특수한 형태로 1 차 함수 또는 1 차 함수의 제곱 형태로 유도된다. 이러한 특징을 이용하면 계산에 있어 수열의 형태와 유사한 계산 과정을 거치게 된다. 그러므로 알고리즘의 구현 면에서는 쉬운 접근이 가능하다. 본 논문에서는 분산 기반 민감도 분석을 이용하여 공작기계의 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향을 해석적 방법으로 분석하였다. 먼저 2 장에서 오차합성모델에 의해 유도되는 체적 오차의 형태에 대해 분석을 하고 3 장에서는 분산 기반 민감도 분석에 대한 기초 이론을 설명한 후 이를 기반으로 체적 오차에 적용하여 해석적인 방법으로 관련 수식을 유도한다. 마지막으로 4 장에서는 3 축 공작기계에 적용하여 민감도 분석을 하였다.

2. 오차합성모델

가공물을 가공할 때 초정밀 공작기계를 이용하더라도 최종 가공물에는 형상오차가 존재한다. 이에 대한 오차 원인으로 동적, 가공 조건 및 환경 등이 있지만 기하학적 오차가 주요한 오차 원인으로 본 연구에서 이러한 기하학적 오차들이 체적 오차에 미치는 영향의 정도를 분석하는 것이 목적이다. 그러므로 먼저 공작기계의 체적 오차를 기술하는 수학적 모델이 필요하다. 동차행렬변환(Homogeneous transformation matrix)을 이용하여 각 구동축의 자세를 정의하고 합성하여 만든 수학 모

델이 오차합성모델이다.^(5,8,11)

오차합성모델은 각 구동축의 위치 오차, 각 오차 및 축간 관계 오차와 테이블과 공구 사이의 이상적인 자세에서 벗어난 정도를 나타내는 체적오차와의 관계를 제시한다. 기하학적 오차는 미소한 값으로 두 기하학적 오차의 곱에 의한 체적 오차에의 영향은 미비하다. 그러므로 오차합성모델을 유도할 때 곱차 항은 무시하고 생성한다. 이렇게 생성한 체적 오차를 분석하면, 식 (1)과 같이 각 기하학적 오차를 변수로 하고 오프셋 혹은 구동축의 입력을 계수로 하는 1 차 함수의 형태가 된다. 이는 본 연구에서 수행하고자 하는 민감도를 해석적으로 분석 가능하게 해 주는 큰 특징이다.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{1,i} X_i & T_4 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{4,i} X_i \\
 R_2 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{2,i} X_i & T_5 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{5,i} X_i \\
 R_3 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{3,i} X_i & T_6 &= \sum_{i=1}^n \Omega_{6,i} X_i
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

여기서, R_1, R_2 및 R_3 은 x, y 및 z 축의 방향 체적 오차이고 T_4, T_5 및 T_6 은 x, y 및 z 축의 위치 체적 오차이다. 또한 X_i 는 기하학적 오차이고 Ω_{1i} 에서 $\Omega_{6,i}$ 는 각 체적 오차의 성분에서 기하학적 오차의 계수이다.

3. 민감도 분석

민감도 분석의 한 방법으로 본 논문에서는 분산 기반 민감도 분석을 적용하였다. 이는 전민감도 분석 방법의 하나로 모든 영역에 대한 불확실도가 반영되며 모든 요소가 동시에 고려되어 그 결과도 도출되므로, 공작기계의 체적 오차에 영향을 주는 기하학적 오차의 주요 인자 선정 방법으로 더 정확한 기준을 제시한다.

3.1 기초 이론

먼저 본 절에서는 분산 기반 민감도 분석을 수

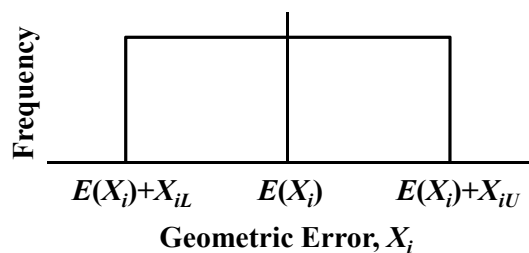


Fig. 1 A uniformly distributed error component

행하기 앞서 기초 이론을 설명한다. 공작기계에 있는 모든 기하학적 오차들이 서로 독립적이며 랜덤하게 생성된다고 가정하면, 식 (2)와 같은 동시 확률밀도함수(Joint probability density function)를 가진다.⁽¹⁰⁾

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n p_i(X_i) \quad (2)$$

여기서, $p_i(X_i)$ 는 기하학적 오차 X_i 가 가지는 확률 밀도함수로 Fig. 1 과 같이 균일확률밀도함수 (Uniform probability density function)로 가정한다.⁽¹²⁾ 평가하고자 하는 목적 함수를 $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 와 같이 두고, Y 에 대한 평균과 분산을 구하면 식 (3)과 같다.

$$E(Y) = \iiint Y \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i$$

$$V(Y) = \iiint (Y - E(Y))^2 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \quad (3)$$

$$= E(Y^2) - E^2(Y)$$

여기서 Y 에 대한 분산을 분해하면 식 (4)와 같은 형태가 된다. 첫 번째 항은 단일 변수에 의해 분산에 미치는 영향이고 두 번째 항은 두 변수의 상호 작용으로 분산에 미치는 영향이다.

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} + \dots + V_{12\dots k} \quad (4)$$

위 식에서 양변에 $V(Y)$ 로 나누어 주면 식 (5)와 같이 되고 이 식에서 민감도 지수(Sensitivity index)를 구하게 된다. 식 (5)에서 첫 번째 항이 1 차 민감도 지수(First sensitivity index) 및 두 번째 항을 2 차 민감도 지수(Second sensitivity index) 등으로 정의한다.^(10,13)

$$I = \sum_i S_i + \sum_i \sum_{j>i} S_{ij} + \dots + S_{12\dots k} \quad (5)$$

각 변수에 대한 민감도 분석은 1 차 민감도 지수만을 사용하여 완전하게 그 민감도를 제시할 수 없다. 즉 상호 작용에 의한 영향도 고려하여 민감도 지수를 정의해야 한다. 이해를 돕기 위해 변수 3 개를 예로 들어 제시한다. 식 (5)와 같이 표현하면 식 (6a)와 같이 되고 변수 1 에 대한 총 민감도 지수(Total sensitivity index)는 식 (6b)와 같다.⁽¹⁰⁾

$$I = S_1 + S_2 + S_3 + S_{12} + S_{13} + S_{23} + S_{123} \quad (6a)$$

$$S_1^T = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123} \quad (6b)$$

최종적으로 변수 j 에 대한 총 민감도 지수는 식

(7)과 같다.^(10,12)

$$S_j^T = 1 - \frac{V(E(Y|X_j))}{V(Y)} \quad (7)$$

여기서, $V(E(Y|X_j))$ 의 의미는 변수 j 를 제외하고 평균을 구한 후 변수 j 에 대한 분산을 계산하는 것이다.

3.2 수식 유도 과정

2 장에서 제시한 오차합성모델을 보면 식 (1)과 같이 체적 오차는 각각 3 개의 방향 및 위치 성분으로 구성된다. 공작기계에 따라 체적 오차 중 가공 형상에 영향을 주지 않는 성분이 있다. 이러한 경우 목적 함수에 그 성분을 반영할 필요가 없다. 예를 들어 그루빙 머신의 경우, 그루빙하는 방향으로의 위치 체적 오차가 밀링 머신의 경우, 공구 방향을 축으로 하여 생기는 각도 오차가 가공 형상에 영향을 주지 않으므로 그 항목을 고려할 필요가 없다. 이렇듯 공작기계에 따라 목적 함수를 다르게 해야 하는데, 모든 경우에 대해 민감도 분석을 하기 위해 필요한 수식들의 형태는 식 (8a)에서 식 (8d)이며 본 절에서는 이를 해석적으로 유도하는 과정을 보인다.

$$\iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n) \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \quad (8a)$$

$$\iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^2 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \quad (8b)$$

$$\iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^3 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \quad (8c)$$

$$\iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^4 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \quad (8d)$$

먼저 위 네 식을 유도하기 전에 수식 유도의 편의를 위해 아래와 같이 식 (9a)와 식 (9b)를 정의한다.

$$H_{i,axis}^j = \sum_{p=1}^{j+1} \Omega_{i,axis}^j X_{iU}^{j+1-p} X_{iL}^{p-1} \quad (9a)$$

$$G_{s-n/axis}^l = \iiint (\Omega_{axis,s} X_s + \dots + \Omega_{axis,n} X_n)^l \prod_{i=s}^n p_i(X_i) dX_i \quad (9b)$$

여기서, $axis$ 는 x, y 및 z 방향의 직선 및 회전 구동축을 의미하며 편의상 위 순서대로 1~6 으로 표기한다. X_i 는 기하학적 오차이고 Ω_i 는 기하학적 오차 X_i 의 계수이다. 또한 X_{iU} 및 X_{iL} 는 기하학적 오차의 설계 상한 및 하한 허용치이다. 민감도 분

석에서 구동축과 관계없이 같은 유도 과정을 거치므로 다음의 유도 과정에서 *axis* 부분은 생략하고 그 유도 과정을 전개한다.

3.2.1 체적 오차 성분 1의 평균[식 (8a)] 유도 과정
체적 오차 성분 1의 평균은 다음과 같은 유도 과정을 거친다.

$$\begin{aligned} G_{l-n}^1 &= \iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n) \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \frac{1}{2} \Omega_1 (X_{1U} + X_{1L}) + \\ &\quad \iiint (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n) \prod_{i=2}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \frac{1}{2} H_1^1 + G_{2-n}^1 \end{aligned} \quad (10a)$$

식 (10a)는 수열의 형태와 유사하며, 위 과정을 *l* 번 반복하게 되면 식 (10b)와 같다.

$$G_{l-n}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l H_i^1 + G_{l+1-n}^1 \quad (10b)$$

마지막으로 식 (8a)의 결과는 아래와 같이 식 (10c)가 된다.

$$G_{l-n}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n H_i^1 \quad (10c)$$

3.2.2 체적 오차 성분 2의 평균[식 (8b)] 유도 과정
체적 오차 성분 2의 평균은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{l-n}^2 &= \iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^2 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \iiint \left\{ \frac{1}{3} \Omega_1^2 (X_{1U}^2 + X_{1U} X_{1L} + X_{1L}^2) \right. \\ &\quad \left. + \Omega_1 (X_{1U} + X_{1L}) (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n) \right. \\ &\quad \left. + (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^2 \right\} \prod_{i=2}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \frac{1}{3} H_1^2 + \frac{1}{2} H_1^1 \sum_{i=2}^n H_i^1 + G_{2-n}^2 \end{aligned} \quad (11a)$$

위 과정을 *l* 번 반복하게 되면 식 (11b)와 같다.

$$G_{l-n}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^l H_i^2 + \sum_{i=1}^l \{ H_i^1 G_{i+1-n}^1 \} + G_{l+1-n}^2 \quad (11b)$$

마지막으로 식 (8b)의 결과는 아래와 같이 식 (11c)가 된다.

$$G_{l-n}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n H_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \{ H_i^1 G_{i+1-n}^1 \} \quad (11c)$$

3.2.3 체적 오차 성분 3의 평균[식 (8c)] 유도 과정

체적 오차 성분 3의 평균은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{l-n}^3 &= \iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^3 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \iiint \left\{ \frac{1}{4} \Omega_1^3 (X_{1U}^3 + X_{1U}^2 X_{1L} + X_{1U} X_{1L}^2 \right. \\ &\quad \left. + X_{1L}^3) + \Omega_1^2 (X_{1U}^2 + X_{1U} X_{1L} + X_{1L}^2) \right. \\ &\quad \left. (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \Omega_1 (X_{1U} + X_{1L}) (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^3 \right\} \prod_{i=2}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \frac{1}{4} H_1^3 + H_1^2 G_{2-n}^1 + \frac{3}{2} H_1^1 G_{2-n}^2 + G_{2-n}^3 \end{aligned} \quad (12a)$$

위 과정을 *l* 번 반복하게 되면 식 (12b)와 같다.

$$\begin{aligned} G_{l-n}^3 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l H_i^3 \\ &\quad + \sum_{i=1}^l \left\{ H_i^2 G_{i+1-n}^1 + \frac{3}{2} H_i^1 G_{i+1-n}^2 \right\} + G_{l+1-n}^3 \end{aligned} \quad (12b)$$

마지막으로 식 (8c)의 결과는 아래와 같이 식 (12c)가 된다.

$$G_{l-n}^3 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n H_i^3 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ H_i^2 G_{i+1-n}^1 + \frac{3}{2} H_i^1 G_{i+1-n}^2 \right\} \quad (12c)$$

3.2.4 체적 오차 성분 4의 평균[식 (8d)] 유도 과정

체적 오차 성분 4의 평균은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{l-n}^4 &= \iiint (\Omega_1 X_1 + \dots + \Omega_n X_n)^4 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \iiint \left\{ \frac{1}{5} \sum_{p=1}^5 \{ \Omega_1^p X_{1U}^{5-p} X_{1L}^{p-1} \} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^4 \{ \Omega_1^p X_{1U}^{4-p} X_{1L}^{p-1} \} (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^3 \{ \Omega_1^p X_{1U}^{3-p} X_{1L}^{p-1} \} (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^2 \{ \Omega_1^p X_{1U}^{2-p} X_{1L}^{p-1} \} (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^3 \right. \\ &\quad \left. + (\Omega_2 X_2 + \dots + \Omega_n X_n)^4 \right\} \prod_{i=2}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \frac{1}{5} H_1^4 + H_1^3 G_{2-n}^1 + 2 H_1^2 G_{2-n}^2 + 2 H_1^1 G_{2-n}^3 + G_{2-n}^4 \end{aligned} \quad (13a)$$

위 과정을 l 번 반복하게 되면 식 (13b)와 같다.

$$G_{l-n}^4 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^l H_i^4 + \sum_{i=1}^l \{H_i^3 G_{i+l-n}^1 + 2H_i^2 G_{i+l-n}^2 + 2H_i^1 G_{i+l-n}^3\} + G_{l+l-n}^4 \quad (13b)$$

마지막으로 식 (8d)의 결과는 아래와 같이 식 (13c)가 된다.

$$G_{l-n}^4 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^n H_i^4 + \sum_{i=1}^{n-l} \{H_i^3 G_{i+l-n}^1 + 2H_i^2 G_{i+l-n}^2 + 2H_i^1 G_{i+l-n}^3\} \quad (13c)$$

3.3 민감도 분석

앞서 언급한 바와 같이 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향에 대해 민감도를 분석하기 위해 목적 함수를 정의해야 하는데, 체적 오차의 성분 혹은 위치 체적 오차를 목적 함수로 두는 것이 타당하다. 여기서 위치 체적 오차를 목적 함수로 두면 해석적 유도가 용이하지 않다. 그러므로 위치 체적 오차의 각 성분을 제공하여 더한 형태, 즉 식 (14)와 같이 목적 함수로 두고 민감도 분석을 수행하였다.

$$Y = T_4^2 + T_5^2 + T_6^2 = (\Omega_{4,l} X_l + \dots + \Omega_{4,n} X_n)^2 + (\Omega_{5,l} X_l + \dots + \Omega_{5,n} X_n)^2 + (\Omega_{6,l} X_l + \dots + \Omega_{6,n} X_n)^2 \quad (14)$$

식 (7)과 같이 총 민감도 지수를 도출하기 위해 $V(Y)$ 및 $V(E(Y|X_j))$ 의 계산 과정을 수행해야 하는데, 목적 함수를 식 (14)와 같이 정의하면 식 (15a) 및 식 (15b)의 계산이 필요하다.

$$V(Y) = V(T_4^2 + T_5^2 + T_6^2) = V(T_4^2) + V(T_5^2) + V(T_6^2) \quad (15a)$$

$$V(E(Y|X_j)) = V(E(T_4^2|X_j) + E(T_5^2|X_j) + E(T_6^2|X_j)) = V(E(T_4^2|X_j)) + V(E(T_5^2|X_j)) + V(E(T_6^2|X_j)) \quad (15b)$$

여기서 식 (15a) 및 식 (15b)는 각각 3개 항목으로 구성되어 있는데, 동일한 계산 과정을 거치므로 각 식에서 한 항목만을, 즉 $V(T_4^2)$ 및 $V(E(T_4^2|X_j))$ 의 유도 과정을 보인다. 먼저 $V(E(T_4^2|X_j))$ 를 계산하면 다음과 같이 전개된다.

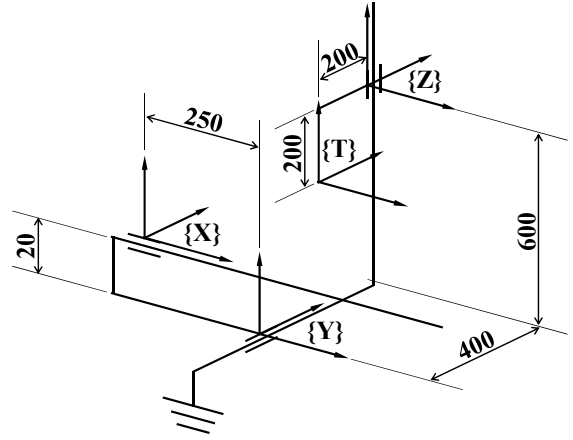


Fig. 2 Structure and offset in a 3-axis machine tool

$$\begin{aligned} E(T_4^2 | X_j) &= \iiint (\Omega_{4,l} X_l + \dots + \Omega_{4,j} \tilde{X}_j + \dots + \Omega_{4,n} X_n)^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= \iiint \{(\Omega_{4,l} X_l + \dots + \Omega_{4,n} X_n)^2 + 2(\Omega_{4,l} X_l + \dots + \Omega_{4,n} X_n)(\Omega_{4,j} \tilde{X}_j) + (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j)^2\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n p_i(X_i) dX_i \\ &= G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j) + (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j)^2 \end{aligned} \quad (16a)$$

여기서 $G_{l-n, \tilde{j}/4}^1$ 는 $G_{l-n, \tilde{j}/4}^1$ 의 계산에서 j 번 제 변수를 제외한 것으로 정의한다. 식 (7)에서 분자 부분에 해당하는 $V(E(T_4^2|X_j))$ 를 구하면 식 (16b)와 같다.

$$\begin{aligned} V(E(T_4^2 | X_j)) &= \int (G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j) + (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j)^2)^2 p_j(\tilde{X}_j) d\tilde{X}_j - \left\{ \int G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j) + (\Omega_{4,j} \tilde{X}_j)^2 p_j(\tilde{X}_j) d\tilde{X}_j \right\}^2 \\ &= G_{j/4}^4 + 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 G_{j/4}^3 + (2G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^1)^2 G_{j/4}^2 + 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 G_{j/4}^1 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 - G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 \\ &\quad - (G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 G_{j/4}^1)^2 - (G_{j/4}^2)^2 - 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 G_{j/4}^1 - 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^2 G_{j/4}^2 - 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 G_{j/4}^1 G_{j/4}^2 \\ &= G_{j/4}^4 - (G_{j/4}^2)^2 + G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 \{G_{j/4}^2 - (G_{j/4}^1)^2\} + 2G_{l-n, \tilde{j}/4}^1 \{G_{j/4}^3 - G_{j/4}^1 G_{j/4}^2\} \end{aligned} \quad (16b)$$

식 (7)에서 분모 부분에 해당하는 $V(T_4^2)$ 를 구하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
 & V(T_4^2) \\
 &= \iiint (\Omega_{4,1}X_1 + \dots + \Omega_{4,n}X_n)^4 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \\
 & - \left\{ \iiint (\Omega_{4,1}X_1 + \dots + \Omega_{4,n}X_n)^2 \prod_{i=1}^n p_i(X_i) dX_i \right\}^2 \\
 &= G_{1-n/4}^4 - \{G_{1-n/4}^2\}^2
 \end{aligned} \tag{17}$$

최종적으로 식 (16b)와 식 (17)을 이용하여 j 변수에 대한 총 민감도 지수를 구하면 식 (18)과 같다.

$$S_j^T = 1 - \frac{\sum_{a=4}^6 \left[G_{j/a}^4 - (G_{j/a}^2)^2 + G_{1-n, \tilde{j}/a}^1 \{G_{j/a}^2 - (G_{j/a}^1)^2\} + 2G_{1-n, \tilde{j}/a}^1 \{G_{j/a}^3 - G_{j/a}^1 G_{j/a}^2\} \right]}{\sum_{a=4}^6 \left[G_{1-n/a}^4 - \{G_{1-n/a}^2\}^2 \right]} \tag{18}$$

하지만 3 축 공작기계에서 각 스테이지의 위치에 따라 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향은 달라진다. 즉 기하학적 오차의 민감도를 대표하는 다른 지표가 필요하다. 그 중 하나는 모든 작업공간에서 각 기하학적 오차에 대한 총 민감도 지수 중 최대값을 구하는 방법이고, 두 번째는 총 민감도 지수를 모든 스테이지의 전 구동 영역에서 적분하는 방식이다. 이는 총 민감도 지수를 평균하는 효과를 가진다. 본 논문에서는 두 번째 방법을 채택하였다. 하지만 총 민감도 지수를 3 축(x, y 및 z)에 대해 해석적으로 적분하는 것은 쉬운 일이 아니므로 각 축에서 유한의 점을 조합하여 더하는 방식을 이용하였으며 식 (19)와 같다.

$$SI_j = \sum_l \sum_m \sum_n S_j^T(x_l, y_m, z_n) \tag{19}$$

4. 시뮬레이션

본 장에서는 3 축 공작기계를 대상으로 앞서 구한 수식을 이용하여 민감도 분석을 수행하는 예를 보이고자 한다. Fig. 2 은 3 축 공작기계의 구조 및 오프셋을 나타내는 그림이며 단위는 mm 이다. 기하학적 오차의 허용치는 직선 스테이지의 경우, 진직도($\delta_{yx}, \delta_{zx}, \delta_{xy}, \delta_{zy}, \delta_{xz}$ 및 δ_{yz})는 $\pm 5 \mu\text{m}$ 및 선형변위 오차(δ_{xx}, δ_{yy} 및 δ_{zz})는 $\pm 1 \mu\text{m}$ 로 설계하였다. 스핀들의 경우, 축 방향의 오차(δ_{xt})는 $\pm 0.5 \mu\text{m}$ 및 반경 방향의 오차(δ_{xt} 및 δ_{yt})는 $\pm 2 \mu\text{m}$ 로 설계하였다.

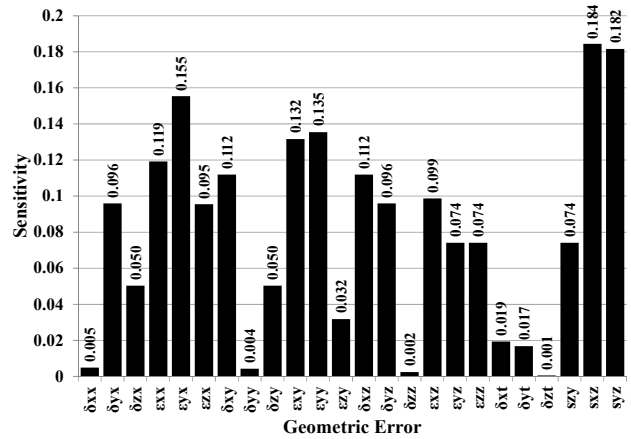


Fig. 3 Sensitivities of geometric errors

또한 각 오차($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yx}, \epsilon_{zx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ 및 ϵ_{zz}) 및 축간 관계 오차(s_{yz}, s_{xz} 및 s_{xy})는 ± 0.00002 rad 으로 설계하였다. 목적 함수는 위치 체적 오차 크기의 제곱으로 설정하였다. 위치 체적 오차는 테이블과 공구 사이에서 발생하는 오차 중 위치와 관련된 오차로 스핀들에서 생기는 각 오차 및 축간 관계 오차는 영향을 미치지 않는다. Fig. 3 은 민감도를 분석한 결과로 총 민감도 지수를 정량적으로 제시한 그림이며 그 수치는 각 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 기여도를 의미한다. 그 결과를 분석하면 축간 관계 오차가 위치 체적 오차에 미치는 영향이 크며 전반적으로 각 오차가 위치 체적 오차에 크게 미친다. 이는 각도와 관련된 오차가 아베 오프셋(Abbe offset)에 의해 위치 체적 오차에 미치는 영향이 커지는 현상이다.⁽¹⁴⁾ 하지만 3 축에서 선형 변위 오차 및 스핀들의 위치 오차는 위치 체적 오차에 미치는 영향이 크지 않은 것으로 나타났다.

5. 결론

본 논문은 3 축 공작기계에 있어 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향의 정도를 분석하였다. 먼저 체적 오차의 수학적 모델인 오차합성모델에 대해 분석을 하였다. 기하학적 오차가 체적 오차에 미치는 영향을 분석하기 위해 전민감도 분석의 하나인 분산 기반 민감도 분석(Variance based sensitivity analysis)을 사용하였으며 해석적 방법으로 총 민감도 지수를 유도하였다. 최종적으로 3 축 공작기계에 대해 기하학적 오차의 설계 변수를 설정한 후 민감도 분석을 하여 주요한 기하학적 오

차를 정량적으로 제시하였다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2011-0020445), (No. 2011-0018392).

참고문헌

- (1) Schmitz, T. and Ziegert, J., 2000, "Dynamic Evaluation of Spatial CNC Contouring Accuracy," *Precision Engineering*, Vol. 24, pp. 99~118.
- (2) Park, S. R., Kweon, S. H. and Yang, S. H., 2010, "A Method for Compensation of Servo Gain Mismatch Using Ball-bar by Excluding Geometric Error," *The 4th International Conference on Positioning Technology*, pp. 265~268.
- (3) Yang, W. H. and Tarng, Y. S., 1998, "Design Optimization of Cutting Parameters for Turning Operations Based on the Taguchi Method," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 84, pp. 122~129.
- (4) Park, S. R., Kim, T. H. and Yang, S. H., 2010, "Analysis of Error Source on Machined Surface using OMM," *Proceeding of the KSPE 2010 Autumn Conference*, pp. 11~12 [in Korean].
- (5) Yang, S. H., Kim, K. H., Park, Y. K. and Lee, S. G., 2004, "Error Analysis and Compensation for the Volumetric Errors of a Vertical machining Centre using a Hemispherical Helix Ball Bar Test," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 23, pp. 495~500.
- (6) Lee, J. H. and Yang, S. H., 2005, "Measurement of Geometric Errors in a Miniaturized Machine Tool Using Capacitance Sensors," *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 164-165, pp. 1402~1409.
- (7) Wang, W., Kweon, S. H., Kim, Y. S. and Yang, S. H., 2008, "Design of Geometric Error Measuring System on a Miniaturized Machine Tool with Optics," *Key Engineering Materials*, Vol. 364-366, No. 2, pp. 1215~1220.
- (8) Lee, D. M., Zhu, Z., Lee, K. I. and Yang, S. H., 2011, "Identification and Measurement of Geometric Errors for a Five-axis Machine Tool with a Tilting Head Using a Double Ball-bar," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 12, No. 2, pp. 337~343.
- (9) Park, S. R. and Yang, S. H., 2010, "Design of a 5-axis Machine Tool Considering Geometric Errors," *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 24, No. 15-16, pp. 2484~2489.
- (10) Saltelli, A., 2002, "Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices," *Computer Physics Communications*, Vol. 145, pp. 280~297.
- (11) Lee, D. M. and Yang, S. H., 2010, "Mathematical Approach and General Formulation for Error Synthesis Modeling of Multi-axis System," *International Journal of Modern Physics B*, Vol. 24, No. 15-16, pp. 2737~2742.
- (12) Shen, Y. L. and Duffie, N. A., 1993, "Comparison of Combinatorial Rules for Machine Error Budgets," *Annals of the CIRP*, Vol. 42, No. 1, pp. 619~622.
- (13) Sobol, I. M., 2001, "Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and their Monte Carlo Estimates," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 55, pp. 271~280.
- (14) Ekinici T. O. and Mayer J. R. R., 2007, "Relationships Between Straightness and Angular Kinematic Errors in Machines," *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 47, pp.1997~2004.