

횡등방성 압전재료에서의 가중함수이론을 이용한 확대계수 계산

손 인 호*† · 안 득 만*

* 부산대학교 기계공학부

Calculation of Intensity Factors Using Weight Function Theory for a Transversely Isotropic Piezoelectric Material

In Ho Son*† and Deuk Man An*

* Dept. of Mechanical Engineering, Pusan Nat'l Univ.

(Received February 24, 2011; Revised December 9, 2011; Accepted December 14, 2011)

Key Words : Piezoelectric Material(압전재료), Weight Function Theory(가중함수이론), Stress Intensity Factor(응력 확대계수), Electric Displacement Intensity Factor(전기변위확대계수)

초록: 파괴역학에서 가중함수는 응력확대계수를 계산하기 위하여 사용되어진다. 본 논문에서는 균열을 가진 횡등방성 압전재료에 대한 전기-기계적 분석을 행하여 평면변형률 상태의 압전문제를 Leknitskii 해석법으로 풀었고 가중함수이론을 압전재료에 확대 적용하였다. 가중함수이론을 이용하여 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하였다.

Abstract: In fracture mechanics, the weight function can be used for calculating stress intensity factors. In this paper, a two-dimensional electroelastic analysis is performed on a transversely isotropic piezoelectric material with an open crack. A plane strain formulation of the piezoelectric problem is solved within the Leknitskii formalism. Weight function theory is extended to piezoelectric materials. The stress intensity factors and electric displacement intensity factor are calculated by the weight function theory.

- 기호설명 -

1. 서론

- σ_{ij} : 응력
- ϵ_{ij} : 변형률
- D_i : 전기변위
- E_i : 전기장
- u : 변위
- ϕ : 전기포텐셜
- K_I : 모드 I에서의 응력확대계수
- K_{II} : 모드 II에서의 응력확대계수
- K_D : 전기변위확대계수
- r : 정상장
- f : 기초장

압전재료는 외부에서 기계적인 힘을 가해주면 재료 내부에 전기적인 분극현상이 발생하고 반대로 외부에서 전기장을 작용시키면 재료가 변형을 일으키는 전기-기계적인 커플링 특성으로 인해 감지기(sensor), 변환기(transducer), 작동기(actuator) 등 첨단산업분야 및 마이크로전자기계시스템(MEMS)에도 널리 사용되고 있다.

압전재료의 사용이 늘어나면서 압전재료의 기계적 특성과 내부에 있는 전위(dislocation), 균열, 공동(void) 등의 결함이 압전재료의 활용에 많은 영향을 미친다는 것을 인식하게 되면서 많은 연구자들에 의해 압전재료의 파괴기구에 대한 연구가 진행되고 있다.

Pak⁽¹⁾이 면외변형에서의 절연균열 문제에 대해, Sosa^(2,3)가 절연결합을 가진 횡등방성 압전재료의 평면변형률 상태에 대한 해석을 수행하였다. Xu와 Rajapakse⁽⁴⁾는 도전균열 문제에 대하여 연구하였다.

† Corresponding Author, ohninos@yahoo.co.kr
© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

이방성 이중 압전재료에 대해서는 Suo 등,⁽⁵⁾ Beom 과 Atluri,⁽⁶⁾ Ma 와 Chen,⁽⁷⁾ Govorukha 등⁽⁸⁾에 의해 연구되었다.

압전재료에 대한 파괴역학적 연구는 주로 Storh 해석법을 바탕으로 하여 수행되어지는데 본 연구에서는 직선균열을 가지는 분극방향을 z 축으로 하고 분극방향에 수직인 xy 평면이 등방평면이 되는 횡등방성 압전재료에 대해 Sosa^(2,3)가 수행한 해석을 바탕으로 하여 Lekhnitskii 해석법을 이용하여 평면변형률 상태에서의 해석을 수행하고 가중함수이론을 적용하여 응력확대계수와 전기변위 확대계수를 구하고자 한다.

2. 균열을 가진 압전재료

2.1 지배방정식

압전재료에 대한 구성식은 다음과 같다.^(2,3)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= s_{ijkl}\sigma_{kl} + g_{kij}D_k \\ E_i &= -g_{ikl}\sigma_{kl} + \beta_{ik}D_k\end{aligned}\quad (1)$$

ε_{ij} 는 변형률, σ_{ij} 는 응력, D_i 는 전기변위 그리고 E_i 는 전기장을 나타낸다. s_{ijkl} 는 컴플라이언스 텐서, g_{kij} 는 압전텐서, β_{ik} 는 유전불투과성 텐서(dielectric impermeability tensor)를 나타내며 식 (2)를 만족한다.⁽²⁾

$$s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{klij}, \quad g_{kij} = g_{kji}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (2)$$

변형률과 전기장은 식 (3)을 만족하며 u 는 변위, ϕ 는 전기포텐셜을 나타낸다.^(1,2)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_i &= -\phi_{,i}\end{aligned}\quad (3)$$

체적력과 자유전하가 없을 때의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.^(1,2)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0 \\ D_{i,i} &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

2.2 평면변형률 상태의 압전재료

횡등방성 압전재료에 대해서 식 (1)을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.⁽²⁾

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{31} \\ 0 & 0 & g_{31} \\ 0 & 0 & g_{33} \\ 0 & g_{15} & 0 \\ g_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}$$

$$s_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{15} & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{31} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (5)$$

평면변형률 상태에서의 전기-기계적 특성을 알아보기 위해 다음과 같은 평면변형률 조건을 고려해 보면

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xy} = E_y = 0 \quad (6)$$

σ_{yy} 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\sigma_{yy} = -\frac{1}{s_{11}}[s_{12}\sigma_{xx} + s_{13}\sigma_{zz} + g_{31}D_z] \quad (7)$$

환산재료상수(reduced material constant)를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned}a_{11} &= s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}}, & a_{12} &= s_{13} - \frac{s_{12}s_{13}}{s_{11}}, \\ a_{22} &= s_{33} - \frac{s_{13}^2}{s_{11}}, & a_{33} &= s_{44} \\ b_{21} &= \left(1 - \frac{s_{12}}{s_{11}}\right)g_{31}, & b_{22} &= g_{33} - \frac{s_{13}}{s_{11}}g_{31} \\ b_{13} &= g_{15}, & \delta_{11} &= \beta_{11}, \quad \delta_{22} = \beta_{33} + \frac{g_{31}^2}{s_{11}}\end{aligned}\quad (8)$$

좌표계를 $x \rightarrow x_1$, $z \rightarrow x_2$ 로 바꾸면 식 (5)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_{21} \\ 0 & b_{22} \\ b_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

변형률과 전기장은 다음과 같은 적합조건을 만족하여야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

응력과 전기변위를 응력함수 $U(x_1, x_2)$ 와 유도함수(induction function) $\Psi(x_1, x_2)$ 를 이용해 다음과 같이 정의하면 평형방정식 (4)를 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ D_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad D_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (11)$$

$U(x_1, x_2)$ 와 $\Psi(x_1, x_2)$ 는 식 (9), (10), (11)을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 U_k(z_k) \\ \Psi(x_1, x_2) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k U'_k(z_k) \\ z_k &= x_1 + \mu_k x_2 = (x_1 + m_k x_2) + i n_k x_2 \end{aligned} \quad (12)$$

λ_k 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_k(\mu_k) &= -\frac{b(\mu_k)}{\delta(\mu_k)} \\ b(\mu_k) &= (b_{21} + b_{13})\mu_k^2 + b_{22} \\ \delta(\mu_k) &= \delta_{11}\mu_k^2 + \delta_{22} \end{aligned} \quad (13)$$

복소 포텐셜 함수 $\varphi_k(z_k)$ 를 다음과 같이 정의하고

$$\varphi_k(z_k) = U'_k = \frac{dU_k}{dz_k} \quad (14)$$

식 (11), (12), (14)를 이용하면 응력과 전기변위는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \varphi'_k(z_k) \\ \sigma_{22} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi'_k(z_k) \\ \sigma_{12} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi'_k(z_k) \\ D_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \varphi'_k(z_k) \\ D_2 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \varphi'_k(z_k) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (9)와 (15)에 의해 변형률과 전기장은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - b_{21}\lambda_k\} \varphi'_k(z_k) \\ \varepsilon_{22} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{a_{12}\mu_k^2 + a_{22} - b_{22}\lambda_k\} \varphi'_k(z_k) \\ 2\varepsilon_{12} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{-a_{33}\mu_k + b_{13}\lambda_k\} \varphi'_k(z_k) \\ E_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{b_{13} + \delta_{11}\lambda_k\} \mu_k \varphi'_k(z_k) \\ E_2 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{b_{21}\mu_k^2 + b_{22} + \delta_{22}\lambda_k\} \varphi'_k(z_k) \end{aligned} \quad (16)$$

변위와 전기 포텐셜은 식 (3)과 (16)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \varphi_k(z_k) \\ u_2 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \varphi_k(z_k) \\ \phi &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{b_{13} + \delta_{11}\lambda_k\} \mu_k \varphi_k(z_k) \end{aligned} \quad (17)$$

p_k 와 q_k 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} p_k &= a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - b_{21}\lambda_k \\ q_k &= \frac{a_{12}\mu_k^2 + a_{22} - b_{22}\lambda_k}{\mu_k} \end{aligned} \quad (18)$$

위의 과정들을 통해 평면변형률 상태의 압전문제
는 복소 포텐셜 함수 $\varphi_k(z_k)$ 를 구하는 문제로
 축소되었다. $\varphi_k(z_k)$ 를 구하기 위해서는 다음과
 같은 경계조건을 만족하여야 한다.⁽²⁾

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z_k) &= -\int_0^s t_2 ds \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi_k(z_k) &= \int_0^s t_1 ds \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \varphi_k(z_k) &= -\int_0^s D_n ds \end{aligned} \quad (19)$$

t_1, t_2 는 표면력 성분을 나타내고, D_n 은 표면
 전하의 수직방향성분을 나타낸다.

2.3 균열을 가진 무한체의 압전재료

Fig. 1 과 같은 균열선단을 가진 무한체의 압전
 재료에 경계를 따라 표면력과 표면전하가 분포하
 고 균열면에서는 표면력과 표면전하가 없다고 가
 정하면 균열면에서의 경계조건은 다음과 같다.⁽²⁾

$$\mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (20)$$

균열선단에서의 복소 포텐셜 함수는 일반적으로
 다음과 같이 주어지며⁽⁹⁾

$$\varphi_k(z_k) = \alpha_k \sqrt{z_k} \quad (21)$$

α_k 는 복소수 계수이다.

식 (19), (20), (21)에 의해 다음과 같은 조건을 얻
 을 수 있다.

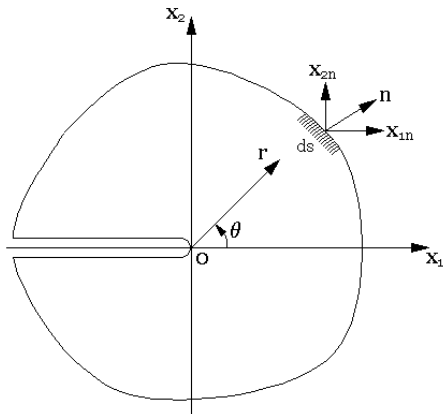


Fig. 1 Infinite piezoelectric medium with an open crack

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - (\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_3}) &= 0 \\ \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 - (\overline{\mu_1 \alpha_1} + \overline{\mu_2 \alpha_2} + \overline{\mu_3 \alpha_3}) &= 0 \\ \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 - (\overline{\lambda_1 \alpha_1} + \overline{\lambda_2 \alpha_2} + \overline{\lambda_3 \alpha_3}) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)는 아래와 같은 실수 매개변수 $k_1, k_2,$
 k_d 가 존재하면 만족하게 된다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \\ \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 &= \frac{k_2}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 &= \frac{k_d}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)을 연립해서 풀면 다음과 같이 $\alpha_1, \alpha_2,$
 α_3 가 구해진다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Lambda_{11}k_1 + \Lambda_{12}k_2 + \Lambda_{13}k_d}{\sqrt{2}} \\ \alpha_2 &= \frac{\Lambda_{21}k_1 + \Lambda_{22}k_2 + \Lambda_{23}k_d}{\sqrt{2}} \\ \alpha_3 &= \frac{\Lambda_{31}k_1 + \Lambda_{32}k_2 + \Lambda_{33}k_d}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Λ_{ij} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\Lambda_{ij}] &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \mu_2 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 & \mu_3 - \mu_2 \\ \mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3 & \lambda_3 - \lambda_1 & \mu_1 - \mu_3 \\ \mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} \\ \Delta &= (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)\mu_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\mu_3 \end{aligned} \quad (25)$$

응력확대계수와 전기변위확대계수를 다음과 같
 이 정의하고

$$K_I = \sqrt{\pi}k_1, \quad K_{II} = -\sqrt{\pi}k_2, \quad K_D = \sqrt{\pi}k_d \quad (26)$$

식 (26)을 식 (24)에 대입하면 α_k 는 다음과 같
 이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{C_k}{\sqrt{2\pi}} \\ C_k &= \Lambda_{k1}K_I - \Lambda_{k2}K_{II} - \Lambda_{k3}K_D \end{aligned} \quad (27)$$

식 (15), (17), (21), (27)과 극좌표계를 사용하여 균열선

단 부근에서의 응력과 변위는 다음과 같이 구해지고

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k C_k \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \\ u_2 &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k C_k \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

전기변위와 전기포텐셜은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k \mu_k C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ D_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_k C_k}{\sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} \\ \phi &= -\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{b_{13} + \delta_{11} \lambda_k\} \mu_k C_k \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} \end{aligned} \quad (30)$$

2.4 가중함수이론

식 (21)과 같이 주어진 장(field)을 정상장(regular field)이라고 하고 식 (32)와 같이 주어진 $\varphi_k^f(z_k)$ 를 이용해 표면력과 표면전하를 계산한 후 방향이 반대인 표면력과 표면전하를 합해주게 되면 경계에서의 표면력과 표면전하가 없어지게 되는데 이러한 장을 기초장(fundamental field)이라고 하고 기초장에서의 변위와 전기포텐셜을 가중함수라고 한다.^(9,10)

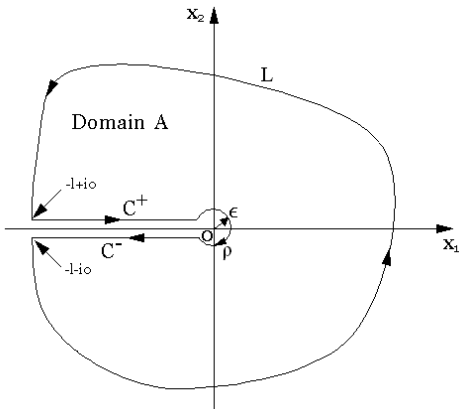


Fig. 2 Simply connected region which deleted the crack tip

$$\begin{aligned} \varphi_k^f(z_k) &= \frac{\alpha_k^f}{\sqrt{z_k}} \\ \alpha_k^f &= \Lambda_{k1} \rho_1 + \Lambda_{k2} \rho_2 + \Lambda_{k3} \rho_3 \end{aligned} \quad (32)$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 는 실수 상수이다.

Betti의 상반정리를 체적력과 자유전하가 존재하지 않는 정상장과 기초장에 적용하기 위해 Fig. 2와 같은 균열선단을 제거한 영역 A에 대해서 Betti의 상반정리를 적용하면 다음과 같다.⁽¹¹⁾

$$\int_{L+\rho} t_i^f u_i^r ds + \int_{L+\rho} D_n^f \phi^r ds = \int_{L+\rho} t_i^r u_i^f ds + \int_{L+\rho} D_n^r \phi^f ds \quad (33)$$

K를 다음과 같이 정의하고

$$K = \int_L t_i^r u_i^f ds + \int_L D_n^r \phi^f ds \quad (34)$$

식 (33)에 기초장의 특성을 적용하게 되면 다음과 같이 정리된다.

$$K = \int_{-\rho} t_i^r u_i^f ds + \int_{-\rho} D_n^r \phi^f ds - \int_{-\rho} t_i^f u_i^r ds - \int_{-\rho} D_n^f \phi^r ds \quad (35)$$

$t_3 = D_n$ 라 하고 $u_3 = \phi$ 라 하면 식 (35)는 다음과 같이 간결하게 나타낼 수 있다.

$$K = \int_{-\rho} (t_i^r u_i^f - t_i^f u_i^r) ds \quad i=1, 2, 3 \quad (36)$$

T_1, T_2, T_3 를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \varphi_k(z_k) \\ T_2 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z_k) \\ T_3 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \varphi_k(z_k) \end{aligned} \quad (37)$$

식 (19)를 이용하면 식 (36)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \int_{-\rho} (u_i^f dT_i^r + T_i^f du_i^r) \quad (38)$$

식 (38)의 적분을 계산하고 일반적인 경우에 대해 고려하기 위하여 $\epsilon \rightarrow 0$ 일 때의 K는 다음과 같이 구해진다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K = K_0 = -2\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\beta_{ij}}{h_{ij}} \cdot \alpha_i^r \alpha_j^f \right) \right]$$

$$\beta_{ij} = p_i \mu_j - q_i + (b_{13} + \delta_{11} \lambda_i) \mu_i \lambda_j$$

$$+ p_j \mu_i - q_j + (b_{13} + \delta_{11} \lambda_j) \mu_j \lambda_i$$

$$h_{ij} = \sqrt{\frac{\mu_j - \mu_1}{\mu_i - \mu_1}} \quad (39)$$

M_1, M_2, M_d 를 다음과 같이 정의하고

$$M_1 = -\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\Lambda_{i1} \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_{ij}}{h_{ij}} (\Lambda_{j1} \rho_1 + \Lambda_{j2} \rho_2 + \Lambda_{j3} \rho_3) \right) \right]$$

$$M_2 = -\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\Lambda_{i2} \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_{ij}}{h_{ij}} (\Lambda_{j1} \rho_1 + \Lambda_{j2} \rho_2 + \Lambda_{j3} \rho_3) \right) \right]$$

$$M_d = -\sqrt{2\pi} \operatorname{Im} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\Lambda_{i3} \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_{ij}}{h_{ij}} (\Lambda_{j1} \rho_1 + \Lambda_{j2} \rho_2 + \Lambda_{j3} \rho_3) \right) \right] \quad (40)$$

식 (24)와 (32)를 식 (39)에 대입하여 정리한 후 식 (34)와의 관계를 이용하면 다음과 같이 나타내어진다.

$$M_1 k_1 + M_2 k_2 + M_d k_d = \int_L t_i^r u_i^f ds + \int_L D_n^r \phi^f ds \quad (41)$$

식 (26)과 (41)을 이용하면 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구할 수 있다. 다음과 같은 특별한 세가지 경우를 생각하고 k_1, k_2, k_d 를 구하면 다음과 같다.

Case 1. $M_2 = M_d = 0$

$$k_1 = \frac{1}{M_1} \int_L t_i^r u_i^f ds + \int_L D_n^r \phi^f ds \quad (42)$$

Case 2. $M_1 = M_d = 0$

$$k_2 = \frac{1}{M_2} \int_L t_i^r u_i^f ds + \int_L D_n^r \phi^f ds \quad (43)$$

Case 3. $M_1 = M_2 = 0$

$$k_d = \frac{1}{M_d} \int_L t_i^r u_i^f ds + \int_L D_n^r \phi^f ds \quad (44)$$

2.5 수치예제

Fig. 3 과 같은 SEN(Single edge notch)시편에 기계적 하중과 전기적 하중이 작용하는 상태에서의 응력확대계수와 전기변위확대계수를 가중함수이론을 이용하여 구하고자 한다. 먼저 가중함수를 구하기 위하여 식 (32), (40), (42), (44)를 이용하여 $\phi_k^f(z_k)$ 를 구하고 이

를 이용하여 응력, 변위, 전기변위, 전기포텐셜을 해석적으로 구한 후 계산되어진 응력과 전기변위와 방향이 반대인 응력과 전기변위를 경계를 따라 작용시키게 되면 경계에는 표면력과 표면전하가 존재하지 않는 기초장을 얻을 수 있다. 또한 반대 방향의 응력과 전기변위를 작용 시킬 때 얻어진 변위와 전기포텐셜을 $\phi_k^f(z_k)$ 를 이용해 구한 변위와 전기포텐셜을 합해주게 되면 가중함수를 구할 수 있다. 반대 방향의 응력과 전기변위가 작용 할 경우의 변위와 전기포텐셜은 유한요소법을 이용하여 구하였다. 유한요소해석에는 ANSYS 11 을 사용하였다.

해석에 사용된 압전재료는 PZT-5H 이고 물성치는 Table 1 과 같다.

Table 1 Material properties of PZT-5H

| PZT-5H | | |
|---|--------------|--------|
| Compliance coefficients ($10^{-12} m^2 / N$) | s_{11} | 14.05 |
| | s_{12} | -7.27 |
| | s_{13} | -3.05 |
| | s_{33} | 8.9 |
| | s_{44} | 23.7 |
| Piezoelectric constant ($10^{-3} Vm / N$) | g_{31} | -9.11 |
| | g_{33} | 19.7 |
| | g_{15} | 26.8 |
| Dielectric impermeability ($10^7 V^2 / N$) | β_{11} | 3.6084 |
| | β_{33} | 3.3219 |

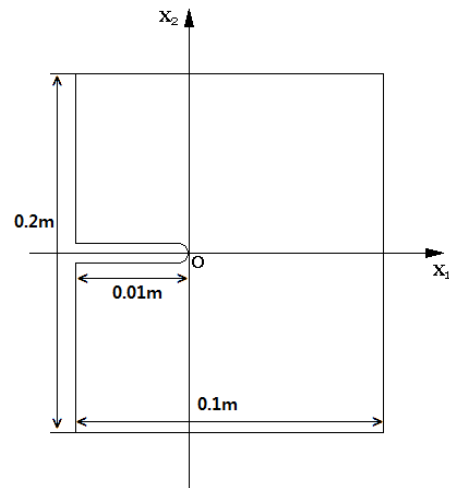


Fig. 3 SEN specimen

Table 2 The variation of K_D verse D^∞

| D^∞ ($10^{-3} C \cdot m^{-2}$) | K_D (WF) ($10^{-3} C \cdot m^{-3/2}$) | K_D (BEM) ($10^{-3} C \cdot m^{-3/2}$) | K_D (Exact) ($10^{-3} C \cdot m^{-3/2}$) |
|--|--|---|---|
| 1 | 0.1766 | 0.1757 | 0.1772 |
| 2 | 0.3531 | 0.3525 | 0.3545 |
| 3 | 0.5297 | 0.5312 | 0.5317 |

Table 3 The stress and electric intensity factors

| | K_I ($10^{-6} N \cdot m^{-3/2}$) | K_D ($10^{-3} C \cdot m^{-3/2}$) |
|-------|---|---|
| WF | 0.1755 | 0.1765 |
| Exact | 0.1772 | 0.1772 |

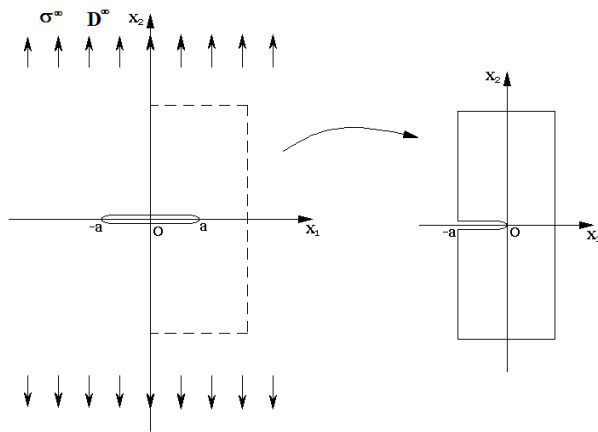


Fig. 4 Infinite Piezoelectric medium with a Griffith crack

Fig. 4 와 같이 Griffith 균열을 가지는 무한체인 압전재료의 무한대에서 기계적, 전기적 하중을 주었을 때 그림과 같이 점선을 따라 표면력과 표면 전하를 계산하여 주게 되면 무한체 안에 있을 때와 같게 되며 균열 끝에서의 응력확대계수와 전기 변위확대계수 또한 같게 된다.

Griffith 균열을 가진 무한체에서 기계적 하중 σ^∞ 와 전기적 하중 D^∞ 가 작용할 때 $\phi_k(z_k)$ 는 다음과 같다. (c_k 는 무한대에서의 하중 조건에 따른 상수)

$$\phi_k(z_k) = c_k z_k - \frac{\Lambda_{k1} \sigma^\infty - \Lambda_{k3} D^\infty}{2} (z_k - \sqrt{z_k^2 - a^2}) \quad (45)$$

먼저 무한대에서 $\sigma^\infty = 0$, D^∞ 주어지는 경우에서 전기변위확대계수를 가중함수이론을 이용해 구한 후 Haojiang 등⁽¹²⁾이 BEM 과 엄밀해로 구한 결과와 같이 나타내면 Table 2 와 같다.

$\sigma^\infty = 1.0 \times 10^6 N \cdot m^{-2}$ 와 $D^\infty = 1.0 \times 10^{-3} C \cdot m^{-2}$ 가 같이 주어질 때의 응력확대계수와 전기변위확대계수를 가중함수이론을 이용해 구한 후 엄밀해와 같이 나타내보면 Table 3 과 같다.

3. 결론

균열을 가진 횡등방성 압전재료에 대해 응력, 변형률, 전기변위와 전기장을 구하였고 가중함수이론을 이용하여 압전재료에서 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하는 방법을 제시하였다. 수치예제로 SEN 시편에 대해 가중함수이론을 사용하여 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하였다. 구한 결과는 엄밀해와 다른 연구자들의 결과와 거의 일치함을 보였다.

가중함수는 기계-전기적 하중이 작용하지 않는 경우에서의 변위와 전기포텐셜이므로 이를 구하면 주어진 기하학적 형상에서의 모든 하중에 대한 응력확대계수와 전기변위확대계수를 균열선단부근에 대한 특별한 해석 없이도 구할 수 있다.

후 기

이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었습니다.

참고문헌

- (1) Pak, Y., 1990, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (2) Sosa, H., 1991, "Plane Problem in Piezoelectric Media with Defects," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 28, No. 4, pp. 491~505.
- (3) Sosa, H., 1992, "On the Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 29, No. 21, pp. 2613~2622.
- (4) Xu, X. -L. and Rajapakse, R. K. N. D., 2001, "On a Plane Crack in Piezoelectric Solids," *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 7643~7658.
- (5) Suo, Z., Kuo, C. -M., Barnett, D. M. and Willis, J. R., 1992, "Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, No. 4, pp. 739~765.
- (6) Beom, H. G. and Atluri, S. N., 1996, "Near-tip Fields and Intensity Factors for Interfacial Cracks in Dissimilar Anisotropic Piezoelectric Media," *Int. J. of Fracture*, Vol. 75, pp. 163~183.
- (7) Ma, L. and Chen, Y., 2001, "Weight Functions for

- Interface Cracks in Dissimilar Anisotropic Piezoelectric Materials,” *Int. J. of Fracture*, Vol. 110, pp. 263~279.
- (8) Govorukha, V., Kamlah, M. and Munz, D., 2004, “The Interface Crack Problems for a Piezoelectric Semi-infinite Strip under Concentrated Electro-mechanical Loading,” *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. 71, pp. 1853~1871.
- (9) An, D., 1987, “Weight Function Theory for a Rectilinear Anisotropic Body,” *Int. J. of Fracture*, Vol. 34, pp. 85~109.
- (10) An, D. and Son, I., 2007, “Weight Functions for Notched Structures with Anti-plane Deformation,” *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 8, pp. 60~63.
- (11) Liu, Y. and Fan, H., 2001, “On the Conventional Boundary Integral Equation Formulation for Piezoelectric Solids with Defects or of Thin Shapes,” *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, pp. 77~91.
- (12) Haojiang, D., Guoqing, W. and Weiqiu, C., 1998, “A Boundary Integral Formulation and 2D Fundamental Solutions for Piezoelectric Media,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 158, pp. 65~80.