대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 22 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 22, No. 4, 619 ~ 636. Nov 2012

# 초등학교 4,5,6학년 영재학급 학생의 패턴 일반화를 위한 해결 전략 비교

최 병 훈* · 방 정 숙**

본 연구의 목적은 학년에 따라 수학영재학급 학생들이 패턴 일반화 과정에서 사용하는 전략의 차이와 일반화 표현 방법을 알아보는 것이다. 연구를 위해 단위학교 영재학급 4~6학년 30명을 대상으로 도형과 관련한 4개의 과제에 대한 해결 전략을 살펴보았다. 연구결과, 일반화를 시작하는 단계의 문항에서 학생들은 패턴의 앞 뒤 수를 이용하여 문제를 해결하는 순환적인 관계인식 전략으로 문제를 해결하는 경우가 많았고 일반화를 형성하는 단계의 문항에서는 학년이 높아질수록 주어진 정보로 규칙이나 식을 만들어 해결하려는 상황적 인식 전략을 사용한다는 것을 알 수 있었다. 그러나 난이수준이 높은 문항일수록 학생들은 그리거나 뛰어 세기 등의 구체화를 통한 인식 전략이나 순환적인 관계 인식 전략을 선호하는 경향이 있었다. 일반화를 명확하게 하는 단계의 문항에서 학생들은 패턴을 언어로 기술하는 경향이 많았으며 높은 학년일수록 패턴을 대수적 표현(기호 또는 수식)으로 기술하려고 하였다. 정당화 단계의 문항에서 학년이 높을수록 일반화된 식으로 표현하는 비율이 높았다. 연구 결과를 통해 패턴을 찾는 과제에서 영재학급 학생들이 일반화를 하기 위한 전략의 차이를 알고 지도하는데 도움을 줄 수 있는 시사점을 제공하고자 한다.

## Ⅰ. 서론

수학교육의 목표가 수학적 힘의 신장이라는 점에서 수학영재의 경우도 수학적 사고력과 수학적 문제 해결능력의 발전 방향에 대해 다양한 노력을 실시하고 있다. 현재까지 수학영재에 대한 다양한 연구가 이루어지고 있는데, 수학영재의 판별 및 선발, 수학영재의 교육과정 및 프로그램 개발, 수학영재의 지적·정의적 특징을 알기 위한 연구 등이 있다.

한편 수학에서 패턴을 학습하는 것은 2가지 관점에서 살펴볼 수 있다. 인지적인 측면에서, 패턴에 대한 학습은 학생들의 문제해결, 수학적 개념과 관계에 대한 이해의 발달, 함수에 대한 이해를 구성하는 데 도움을 준다. 이를 통해 학생들은 수학의 구조적인 지식을 찾아가게 된다 (Mason, 1996; Warren 2000). 정의적 측면에서 패턴을 탐구하는 것은 계산과 공식암기라는 부정적인 인식을 벗어버릴 수 있는 학습 기회를 제공하고, 탐구활동을 통한 학생들의 능동적인 참여를 이끌어 내며, 수학의 유용성을 경험할 수 있고, 수학의 구조적인 아름다움을 느낄 수 있는 기회를 제공한다. 이러한 연유로 교육과정에서는 기초적인 패턴활동의 시작으로부터 다양한 변화 규칙을 수로 나타내고 설명하기, 규칙을 추측하

* 경북대학교사범대학부설초등학교 (aquinas99@edunavi.kr)
** 한국교원대학교 (jeongsuk@knue.ac.kr)
※ 본 논문은 제41회 대한수학교육학회 논문발표대회에서 발표한 논문을 수정·보완한 것입니다.

고 말이나 글로 표현하기, 규칙과 대응 등 패턴에 대한 구체적인 활동을 강조한다(교육과학기술부, 2009). 또한 NCTM(2000)은 학생들이 수와 기하 패턴을 나타내고 다음에 무엇이 나올지 예상하기 위해서 패턴을 일반화할 수 있고, 예상을 위해 추론하고, 그림, 표, 기호, 그래프를 가지고 패턴을 나타낼 수 있다는 기대를 한다. 이와 같이 우리나라의 교육과정과 NCTM은 패턴활동을 통해 학년별 수학적 지식의 폭을 확장할 수 있도록 안내하고 있다. 이는 학생들이 학년에 알맞게 수학학습을 할 수 있도록 하기 위함이다. 하지만 과연 학생 자신이 학습한 내용을 적절하게 구성하여 표현할 수 있는지는 의문이다.

지금까지의 패턴과 관련한 연구는 패턴의 일반화 과정을 통해 대수학습의 기초가 되는 연구(강현영, 2007; 김남균ㆍ김은숙, 2009; 김성준, 2002; Mulligan, Mitchelmore, Kemp, Marston, & Highfield, 2008; Mulligan & Mitchelmore, 2009), 초등학교 저학년 학생의 패턴의 사고과정을 알아보는 연구(최병훈ㆍ방정숙, 2011), 패턴을 통해 함수를 이해하는 연구(Moss, Beatty, Barkin, & Shillolo, 2009), 예비교원들의 패턴 일반화 탐구를 위한 연구(Marie & Billings, 2009) 등 다양하게 사용되기도 하고, 영재학생들의 사고를 알아보기 위해 사용되기도 하였다(송상헌ㆍ허지연ㆍ임재훈, 2006; 송상헌ㆍ임재훈ㆍ정영옥ㆍ권석일ㆍ김지원, 2007). 따라서 수학적 패턴을 활용한 연구는 학생들의 패턴 구조 파악을 통해 그들이 사용하는 수학적 관계를 알아볼 수 있는 좋은 자료가 될 수 있다. 그러나 영재학생을 대상으로 한 연구에서 패턴의 일반화 과정에서 나타나는 해결 전략이 학년에 따라 차이가 있는지에 대해 초점을 두고 한 연구는 미흡한 실정이다.

이에 본 연구는 영재학급 학생의 패턴 일반화 과정에서 어떤 전략을 사용하는지, 그리고 학년에 따른 영재학급 학생들은 패턴 일반화 과정에서 사용하는 전략의 차이가 무엇인지를 살펴보고, 일반화 단계에 따라 어떤 어려움을 가지는지를 살펴본다. 이는 수학적인 선행지식이 패턴의 일반화에 어떤 영향을 주는지를 알아보기 위함이다. 이를 통해 영재학급 학생들의 수학적 사고 발달 과정을 추론하고 패턴과 관련한 수업에서 영재학생들의 교수학습방법에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 수학 영재의 특성

수학적 재능을 보이는 학생들에 대해 오랜 연구를 한 러시아의 Kruteskii(1976)는 수학영재아들은 수학적 내용을 분석적이고 종합적으로 파악하고, 문제의 내용과 해법을 재빨리 일반화한다고 하였다. 또한 해법방법이 간단하고 명쾌하며, 문제의 일반화되고 단축된 구조와 그 해법을 잘 기억하는 경향이 있다고 하였다.

Sheffield(1994)는 수학영재학생은 빠르고 날카로운 인식, 호기심, 양에 관한 정보의 이해력, 패턴과 관계에 대한 지각력, 시각화, 일반화 능력을 갖는다. 그리고 분석적, 연역적, 귀납적인 모든 추론 능력을 갖고 추론 과정을 거꾸로, 쉽게 그러나 차분하게 생각을 전환시키는 능력을 갖고 있다고 하였다. 또한 수학영재는 유창하고, 유연하고 창조적 방식으로 수학적 개념을 적용하는 능력과 어려운 문제를 푸는데 필요한 인내심을 갖고 있다. 그리고 수학적 문제를 체계화하는 능력이 뛰어나며 다양한 방식으로 자료를 처리하고 조직하지만 자신에게 관계없는 자료는 무시하는 경향이 있다고 하였다.

남승인(2000)은 Weaver & Brawley, Heid, NCTM의 연구를 종합하여 초등학교 수준의 수

학 영재의 특성을 정리하였는데, 수학활동과 관련한 특성을 살펴보면, 수학영재는 주변의 환경에서 양과 양적 측면에 민감하며 관심과 호기심이 많고, 수학적 규칙성, 수학적 구조에 대한 지각력, 해석력이 민첩하다. 그리고 문제의 규칙을 찾아 일반화하는 능력이 우수하며, 학습한 내용을 새로운 상황과 타교과에 전이·적용시키는 능력이 있고, 세상의 일들을 수학적으로 지각하고 해석하려는 경향이 강하다고 하였다. 또한 일반적 수준의 문제 해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화하고, 문제 해결 과정의 중간 단계를 생략하는 경향이 있고, 문제해결을 위한 도구로써 구체적인 조작보다 추상적으로 다루려는 경향이 있다고 하였다.

이와 같은 특성을 통해 본 연구의 관점에서 수학영재는 패턴의 몇 가지 예를 통해 일반화를 빠르게 찾아낼 수 있고, 분석적인 능력을 통해 패턴의 단계별 과정에 대한 알고리즘을 찾아 일반화 과정을 수식이나 문자로 기술할 수 있을 것이라고 판단된다.

## 2. 수학 패턴의 일반화

일반화는 학생들이 문자나 기호로 표시하고 자신이 가진 선행지식과 연결할 수 있는 중요한 부분이다. 특히, 이러한 연결성을 이용하여 수학활동에서 일반화를 탐구하는데 적절한 소재는 패턴을 활용하는 것이다. 일반화를 위한 전형적인 패턴 활동은 학생들로 하여금 다양한 규칙을 찾아낼 수 있게 만든다(Lannin, 2005). 학생들은 패턴을 탐구하는 과정에서 일반적인 규칙을 찾게 되고, 이 과정에서 먼저 일상 언어로 규칙을 설명한 후 기호나 수식을 이용하여 일반화를 시도한다. 그러나 패턴 형태가 복잡해지거나 일반화가 필요하게 되면서 학생들은 구어적 형태의 반복 접근 대신 규칙을 형식적으로 표현하는 방법을 필요로 한다(강현영, 2007). 이것은 학생들의 사고과정을 표현하는 것이며 이를 통해 패턴을 좀 더 간단히 나타내고자 하는 전략이 되는 것이다. 특히 시각적인 패턴은 수의 열이나 표보다 더 생생하고 단순하기 때문에 학생들에게 가장 쉽게 받아들여져 상징기호보다 더 기초적이라고 할 수 있다(Orton, Orton, & Roper, 1999). 본 연구에서는 Friedlander & Tabach(2001)에 의해 4단계로 나누어진 패턴의 일반화 단계를 토대로 수학영재학생들의 패턴 일반화 과정을 살펴보았다.

4단계는 일반화를 시작하는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 일반화를 명확하게 하는 단계, 그리고 정당화 단계로 구분된다(<표 Ⅱ-1> 참조).

<표 Ⅱ-1> 패턴의 일반화 단계(최병훈·방정숙, 2011)

| 단계 | | 내용 | 다음 단계이행에서의 어려움 |
|---|---|---|---|
| 1 | 시작하는 단계 | 학생들에게 특별한 예를 제시하거나 학생들 스스로 이러한 예들을 만든다. | 주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용을 파악하는 것(인지 수준의 어려움) |
| 2 | 일반화를 형성하는 단계 | 주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결하며 이를 통해 일반화를 생각하게 된다. | 언어 형태로 명확히 인식하고 표현하는 것(언어화 수준의 어려움) |
| 3 | 일반화를 명확하게 하는 단계 | 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다. | 언어화된 패턴을 기호 등을 이용하여 대수적으로 표현하는 것(기호화 수준의 어려움) |
| 4 | 정당화의 단계 | 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다. | |

Lee(1996)는 패턴의 일반화 단계 과정 사이에서 발생할 수 있는 여러 가지 어려움을 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분하였다. 구체적으로 살펴보면, 인지 수준에서의 어려움은 패턴이 의도하고 있는 내용을 파악하느냐 못하느냐 하는 것이며, 언어화 수준에서의 어려움은 패턴을 언어 형태로 명확히 인식하고 표현하지

못하는 어려움을 말한다. 마지막으로 기호화 수준에서의 어려움은 언어화된 패턴을 기호나 수식과 같이 대수적인 표현으로 일반화하는 과정에서 나타나는 어려움이다.

본 연구에서는 초등학교 4,5,6학년 영재학급 학생들이 패턴의 일반화 단계까지 도달할 때 그들은 단계별로 어떤 전략을 사용하는가를 살펴본다.

수학의 패턴 전략을 알아보는 과정에서 Bishop(2000)은 중학생들의 선형도형수 패턴의 전략을 알아봄으로써 구체화(concrete)를 통한 전략, 비례적(proportional) 관계, 순환적인(recursive) 관계, 함수적인(Functional) 관계 등으로 범주화하였다. 또한 Lannin(2005)은 학생들이 패턴의 상황에서 일반화를 이끌어 내기 위해 사용하는 다양한 전략들을 연구하기 위한 틀로서 두개의 범주로 나누어진 일반화 전략을 제시하고 있다. 비명시적인 전략으로 그리거나 세기와 순환적인 관계 인식, 명시적인 전략으로 전체와 부분, 추측과 확인, 상황적 인식으로 구분하였다. 따라서 본 연구에서는 앞의 선행연구를 바탕으로 일반화 전략을 <표 Ⅱ-2>와 같이 정리하여 사용하고자 한다.

<표 Ⅱ-2>일반화 전략의 범주

| 전략 | 설명 |
|---|---|
| 구체화를 통한 인식 | 문제 상황을 그리거나 세기(뛰어 세기)를 통해 나타냄 |
| 추측과 확인 | 규칙의 정당화 없이 추측하는 것 |
| 순환적인 관계인식 | 패턴의 앞 뒤 수를 이용하여 문제를 해결하고자 함 |
| 전체-부분 | 더 큰 단위를 만들기 위해 곱셈을 이용하여 부분을 단위로 사용하는 것 |
| 상황적 인식 | 상황에서 주어진 정보들을 기초로 하여 규칙을 만드는 것<br>앞의 항과 뒤의 항을 이용하여 함수적 식을 이용하여 문제를 해결함 |

# Ⅲ. 연구방법

## 1. 연구대상

본 검사의 대상은 대구광역시 중구에 소재한 ㄱ초등학교 영재학급 4학년 10명, 5학년 11명, 6학년 9명이다. 영재학급의 학생들은 3단계[1)]*를 거쳐 뽑혔기 때문에 수학능력 수준은 상위 10%에 들어간다고 할 수 있다. 대상자들은 ㄱ초등학교에 입학하여 전학 없이 단위학교의 영재학급에서 학습하였기에 비슷한 학교교육환경에서 학습한 학생들이라고 할 수 있다. 연구 대상의 학생 수가 적어 수학영재의 학년별 패턴 비교 결과를 일반화하는 데 제한점이 있으나 본 연구를 통해 수학영재학급 학생의 학년별 패턴 과제 해결에서 나타나는 일반화 전략과 어려움의 경향을 비교하는 데 초점을 두고 그 결과에 따른 시사점을 제공하고자 한다.

## 2. 검사도구

본 연구에 사용한 검사도구는 초등학교 4학년 수학 교과서에 제시된 과제를 재구성하여 만든 4개의 과제이다. 과제의 난이수준은 과제1→과제2→과제3→과제4의 순이 되도록 구성하였다. 그리고 과제별 4단계의 하위 문항으로 제시하여, 각 하위 문항은 일반화를 시작하는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 일반화를 명확하게 하는 단계, 정당화의 단계에 맞게 문항을 개발하여 학생들의 능력과 문제해결전략을 살펴보았다. 4학년 교과서에서 패턴과제를 구성한 이유는 모든 학생이 학습한 과제를 바탕으로 4,5,6학년 영재학급 학생들은 일반화를 어떻게 이루어 가는가를 살펴보기 위함이다. <표 Ⅲ-1>은 과제별 주제와

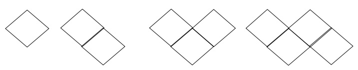
1) 1단계는 담임교사 혹은 학교장 추천을 받은 학생들이 2단계 과정으로 한국교육개발원에서 개발한 영재성 검사를 본다. 이를 통과한 학생은 3단계로 학교자체의 면접·수학사고력 검사를 통해 선발된다.

내용이고, 문항의 예는 [그림 Ⅲ-1]과 같다.

<표 Ⅲ-1> 과제별 주제(세부 문항은 <부록 참조>)

| 과제 | 주제 | 내용 |
|---|---|---|
| 과제1 | 마름모의 둘레의 길이 | 한 변의 길이가 1인 마름모를 한 변에 붙여가면서 늘어나는 도형의 둘레 길이를 구하는 문항 |
| 과제2 | 대각선의 수 | 다각형의 변의 개수가 하나씩 늘어날 때 대각선의 개수를 구하는 문항 |
| 과제3 | 원 위의 점을 연결하는 선분의 개수 | 원위의 점이 하나씩 늘어날 때 점을 서로 이어 만들 수 있는 선분의 개수를 구하는 문항 |
| 과제4 | 직선을 이용한 평면 분할 | 평면위의 직선이 한 개씩 늘어날 때 평면을 최대 몇 개로 나눌 수 있는지를 묻는 문항 |

1. 다음은 한 변의 길이가 1인 마름모를 한 변에 붙여가면서 늘어나는 도형입니다. 풀이과정을 자세히 적고 답을 적으시오.

 …

(1) 6번째 오는 모양의 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.
(2) 21번째 오는 모양의 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.
(3) 둘레의 길이가 늘어나는 규칙을 설명해보시오.
(4) 마름모가 △개 있다면, 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구해보시오.

[그림 Ⅲ-1] 과제의 예(과제1)

## 3. 연구절차

개발된 검사도구의 타당성 검토를 위해 문항 적절성에 대해 초등수학교육을 전공한 교사 3인과 전문가 1인에게 검토를 받아 제작하였으며 본 검사를 실시하기 전 학년별 학생 4명을 대상으로 예비검사를 실시하여 문항의 이해수준이 적절한지 파악하여 수정하였다. 본 검사의 시기는 2011년 12월경으로 4학년 학생은 문제 해결 방법 찾기 단원을 학습한 후이다. 검사는 연구자의 의도를 전달하고 검사지의 충실한 작성 및 학생들의 문제 해결 상황을 파악하기 위해 연구자가 직접 실시하였다. 검사시간은 50분으로 하였다.

## 4. 자료처리 및 분석

본 연구의 자료 처리 및 분석을 위해 일반화를 시작하는 단계와 일반화를 형성하는 단계는 선행연구를 토대로 분석하였으며, 일반화를 명확하게 하는 단계와 정당화 단계는 학생들의 응답 유형의 기술을 토대로 분석하였다.

먼저, 일반화를 시작하는 단계, 일반화를 형성하는 단계를 파악하기 위해 개발된 각 과제별 문항 (1), (2)의 분석은 선행연구(Bishop, 2000; Lannin, 2005)의 일반화 전략을 정리한 5개의 유형에 무의미하거나 무응답인 경우를 추가하여 전체 6개의 유형으로 학생들의 검사결과를 분석하였다. 그리고 전략의 빈도 분석시 학생들의 반응 유형이 2가지로 나타나는 경우 각각 0.5회씩 체크하여 파악하였다.

<표 Ⅲ-2> 일반화 전략 및 분석대상 문항

| 유형 | 전략 | 설명 | 분석대상 |
|---|---|---|---|
| 유형1 | 구체화를 통한 인식 | 그리거나 세기(뛰어세기) | 과제 1~4 문항의 (1),(2) |
| 유형2 | 추측과 확인 | 규칙의 정당화 없이 추측하는 것 | |
| 유형3 | 순환적인 관계인식 | 패턴의 앞 뒤 수를 이용하여 문제해결 | |
| 유형4 | 전체-부분 | 부분을 단위로 사용하여 더 큰 단위의 곱셈을 하는 것 | |
| 유형5 | 상황적 인식 | - 주어진 정보로 규칙을 만듦<br>- 전항과 후항을 이용하여 함수적인 식을 만들어 문제해결 | |
| 유형6 | 무응답 | 무의미한 답이나 응답이 없음 | |

일반화를 명확하게 하는 단계의 분석은 과제별 문항(3)을 통해 알아보았다. 수학영재학급 학생들이 과제를 해결하기 위해 찾은 패턴을 어떤 방법으로 정당화하는가를 알아보기 위함이다 (<표 Ⅲ-3> 참조).

<표 Ⅲ-3> 일반화를 명확하게 하는 단계 분석의 유형

| 유형 | 분석대상 문항 |
|---|---|
| 패턴을 언어로 기술 | 과제 1～4의 문항(3) |
| 패턴을 기호 또는 수식으로 기술 | |
| 패턴을 언어와 함께 수식이나 기호로 표현 | |
| 틀린 표현 또는 무응답 | |

정당화 단계를 분석하기 위해 <표 Ⅲ-4>와 같이 유형을 나누었다. 이는 주어진 과제에서 발견된 규칙을 □,△를 이용하여 형식화하여 자신이 찾아낸 규칙에 대해 정당화할 수 있는지를 알아보기 위함이다. 본 연구에서는 바른 식으로 나타낼 수 있는지에 대해 초점을 맞추어 분석하였다.

<표 Ⅲ-4> 정당화 단계 분석의 유형

| 유형 | | 분석대상 문항 |
|---|---|---|
| 성공 | 식으로 표현 | 과제 1～4의 문항(4) |
| | 식을 나타내기 전 과정 표현 | |
| 실패 | | |
| 무응답 | | |

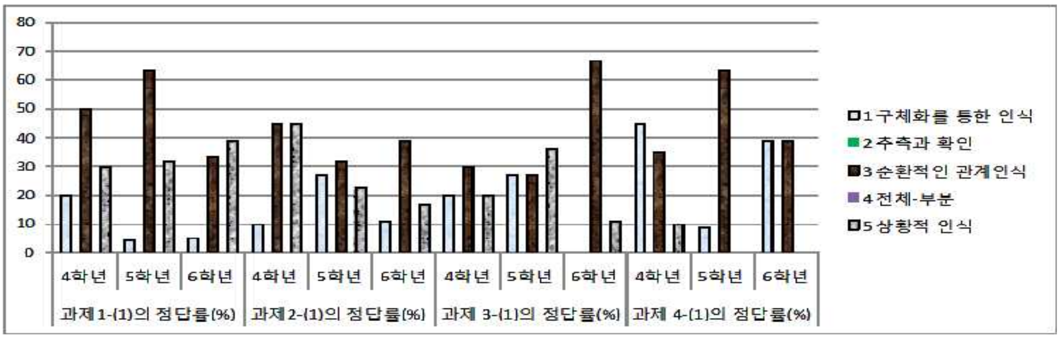
# Ⅳ. 결과분석

## 1. 일반화를 시작하는 단계에서의 전략 분석

각 과제의 문항(1)의 응답빈도를 살펴보면 <표 Ⅳ-1>과 같다. 1, 2번의 문항에서 학생들의 정답자수가 4, 5학년이 비교적 높고, 6학년이 비교적 낮았다. 그 이유는 처음부터 2명의 학생이 문제를 잘못 이해하여 해결하였기 때문이다. 검사 후 이들 학생에게 다시 문제를 확인하게 했을 때에는 무엇을 잘못했는지 알고 바른 정답을 구할 수 있었다. 그러나 3, 4번의 문항에서는 4,5,6학년의 정답률이 비교적 비슷하게 나타났다. 문항(1)을

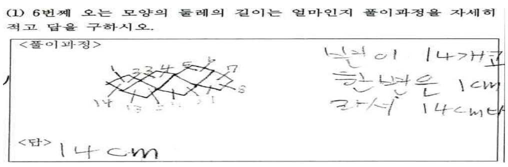
<표 Ⅳ-1> 과제별 문항(1)의 응답빈도수(4학년: 10명, 5학년: 11명, 6학년: 9명)

| 유형 | 전략 | | 과제1-(1)의 응답빈도수 | | | 과제2-(1)의 응답빈도수 | | | 과제3-(1)의 응답빈도수 | | | 과제4-(1)의 응답빈도수 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 |
| 유형1 | 구체화를 통한 인식 | 정답자수 | 2 | 0.5 | 0.5 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 | 4.5 | 1 | 3.5 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 유형2 | 추측과 확인 | 정답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 유형3 | 순환적인 관계인식 | 정답자수 | 5 | 7 | 3 | 4.5 | 3.5 | 3.5 | 3 | 3 | 6 | 3.5 | 7 | 3.5 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 유형4 | 전체 -부분 | 정답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 유형5 | 상황적 인식 | 정답자수 | 3 | 3.5 | 3.5 | 4.5 | 2.5 | 1.5 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 1.5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |




[그림 Ⅳ-1] 과제별 문항(1)의 정답률 비교

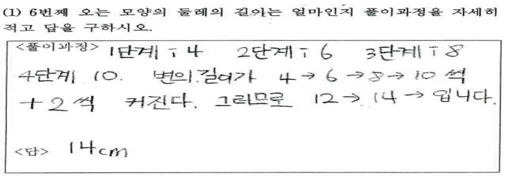
해결하기 위한 전략별 유형을 살펴보면, 과제 1-(1)의 경우는 4학년의 영재학급 학생이 5, 6학년 영재학급 학생에 비해 구체화를 통한 인식 전략을 더 사용한 것을 알 수 있는데, 이 전략은 문제를 처음 접할 때 패턴을 찾는 초보적이고 기초적인 방법으로 뛰어 세기나 직접 그리기를 통하여 문제를 해결하고자 할 때 사용한다. 그러나 4, 5, 6학년 대부분의 영재학급 학생들은 이러한 초보적인 방법을 선호하기보다 규칙의 순환적인 관계를 파악하여 문제를 해결하고자 하였고, 일부는 패턴의 앞, 뒤의 순환관계를 이용해 간단한 수식을 적용한 상황적 인식전략으로 문제를 해결하고자 하였다. 또한 <표 Ⅳ-1>과 [그림 Ⅳ-1]에서 보는바와 같이 수학영재학급 학생들은 추측과 확인 전략, 전체-부분의 전략을 거의 사용하지 않았다는 것을 알 수 있는데, 이는 영재학급 학생들이 논리적 사고를 중심으로 문제를 해결하였다는 것을 보여준다. [그림 Ⅳ-2]~[그림 Ⅳ-4]는 과제1에 대한 전략별 학생들의 풀이를 예로 든 것이다.



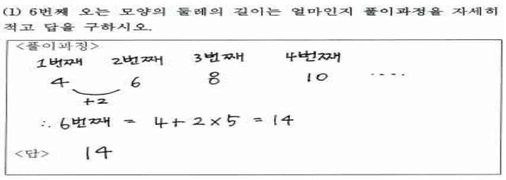

[그림 Ⅳ-2] 구체화를 통한 인식 전략(과제1)

<표 Ⅳ-2> 과제별 문항(2)의 응답빈도수(4학년:10명, 5학년:11명, 6학년: 9명)

| 유형 | 전략 | | 과제1-(2)의 응답빈도수 | | | 과제2-(2)의 응답빈도수 | | | 과제3-(2)의 응답빈도수 | | | 과제4-(2)의 응답빈도수 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 |
| 유형1 | 구체화를 통한 인식 | 정답자수 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 유형2 | 추측과 확인 | 정답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 유형3 | 순환적인 관계인식 | 정답자수 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1.5 | 2.5 | 0 | 2 | 0 | 3.5 | 5 | 2 |
| | | 오답자수 | 1 | 1 | 0.5 | 1 | 1 | 4 | 3.5 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 유형4 | 전체-부분 | 정답자수 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | 오답자수 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 유형5 | 상황적 인식 | 정답자수 | 4 | 8 | 6 | 3 | 4.5 | 1.5 | 2 | 4 | 6 | 1.5 | 0 | 2 |
| | | 오답자수 | 1 | 1 | 1.5 | 3 | 1 | 1 | 2.5 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 유형6 | 무응답 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |




[그림 Ⅳ-3] 순환 관계 인식 전략(과제1)

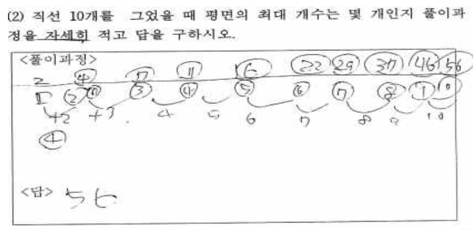



[그림 Ⅳ-4] 상황적 인식 전략(과제1)

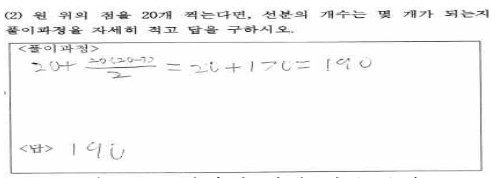
## 2. 일반화를 형성하는 단계에서의 전략 분석

일반화를 형성하는 단계를 살펴본 과제별 문항(2)의 응답빈도를 살펴보면 <표 Ⅳ-2>와 같다. 문항(2)는 문항(1)에서 찾은 해결방법을 좀 더 확장하여 해결할 수 있는 문제이다. 그러한 까닭에 일반화를 시작하는 단계의 문항에 비해 영재학급 학생들은 상황적 인식전략을 이용하여 문제를 해결하려는 시도가 많았다는 것을 알 수 있다([그림 Ⅳ-5] 참조). 과제가 진행될수록 정답률이 비교적 낮게 나타났는데 이는 과제의 난이수준이 과제1에서 과제4쪽으로 갈수록 높아진 것 때문이라 판단된다. 그러한 까닭에 과제1-(2), 2-(2), 3-(2)에서 보였던 상황적 인식전략은 과제 4-(2)에서 비교적 낮게 나타났다.

그리고 순환적인 관계 인식전략으로 문제를 해결하려는 경향은 좀 더 높게 나타났다는 것을 알 수 있다. 즉, 영재학급 학생들은 주어진 정보에서 규칙을 만들기 미흡하거나 함수적인 식을 만들지 못할 경우에는 패턴의 앞 뒤 수를 이용하여 관계성을 찾으려는 노력을 시도하는 것으로 보인다.



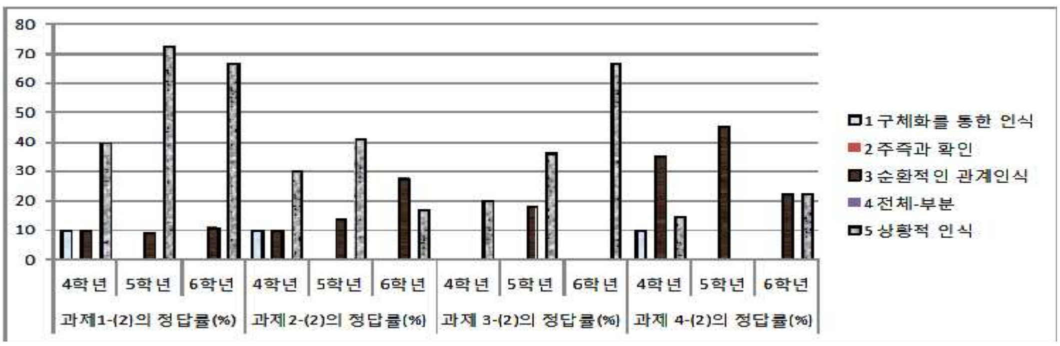

[그림 Ⅳ-6] 순환적 인식 전략(과제4)




[그림 Ⅳ-7] 상황적 인식 전략(과제3)

## 3. 일반화를 시작하는 단계에서 일반화를 형성하는 단계로의 어려움

과제별 (1)번 문항에서 정확한 답을 기술한 학



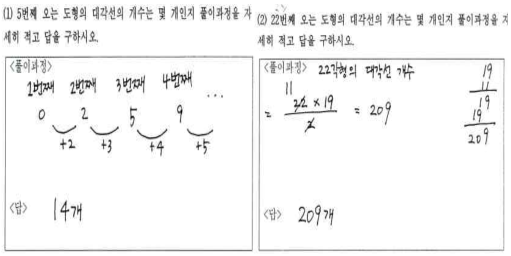

[그림 Ⅳ-5] 과제별 문항(2)의 정답률 비교

<표 Ⅳ-3> 과제별 문항(1)에서 (2)로 문제해결을 위한 전략을 변화한 학생수 (정답→오답)

| 문항(2) 전략 | | 구체화를 통한 인식 | | | | 추측과 확인 | | | | 순환적인 관계인식 | | | | 전체 - 부분 | | | | 상황적 인식 | | | | 무응답 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 문항(1)전략 | 과제 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 | 과제 1 | 과제 2 | 과제 3 | 과제 4 |
| 구체화를 통한 인식 | 4학년 | | 1 | | | | | 1 | 2 | | 0.5 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | 5학년 | | | 2 | | | 1 | | | | | | | | | | | 0.5 | | | | | 0.5 | 1 | |
| | 6학년 | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 |
| 순환적인 관계인식 | 4학년 | | 0.5 | | | | | | | 1 | 0.5 | 1.5 | | 1 | | | | | 1.5 | 1.5 | | | | | |
| | 5학년 | | | | | | | | | 1 | | | 1 | | | | | 0.5 | | 2 | | | 0.5 | | 2 |
| | 6학년 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 상황적 인식 | 4학년 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 2 | | | | | | |
| | 5학년 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | |
| | 6학년 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

생들이 일반화를 형성하는 단계로 (2)번 문항을 해결할 때 올바른 풀이과정 및 정답을 찾지 못하는 경우가 있었다. 이것은 패턴을 확장하여 일반화를 형성하기에 그들의 전략을 정확하게 파악하지 못해서 나타나는 경우가 될 것이다(Lee, 1996). 즉, 패턴과정의 일반적인 관계를 이해하기보다 패턴의 특정한 예에 맞는 규칙을 적용하려했기 때문이다. <표 Ⅳ-3>은 문항(1)에서 정답을 찾은 학생들 중 문항(2)에서 오답을 기록한 학생들이 어떤 전략의 변화를 가져왔는지 분석한 것이다. 예를 들면 문항(1)의 정답을 해결한 학생들은 추측과 확인, 전체-부분의 전략을 사용하지 않았다. 그리고 일반화를 형성하는 단계에서 추측과 확인 전략을 4학년 영재학급 학생 중 1명이 과제3-(2)의 해결을 위해 사용하였고, 2명이 과제4-(2)의 해결을 위해 사용하였고, 5학년에서는 과제2-(2)의 해결을 위해 1명이 사용하였다는 것을 알 수 있다. 특히 문항(2)에서 오답을 보인 수학영재학급 학생들은 주로 문항(1)에서 순환적인 관계인식 전략을 사용하였으나 문항(2)를 해결하기 위해서 순환적인 관계 인식 전략과 상황적 인식전략을 주로 사용하였다. 이는 순환적인 관계인식을 통해 문제해결 전략을 구상하였으나 패턴을 확장하면서 패턴의 틀린 점을 인식하지 못하고 그 전략을 그대로 사용하거나 수식을 이용한 상황적 인식 전략을 사용하려 했다는 것을 알 수 있다.

또 다른 오류로는 [그림 Ⅳ-8]과 같이 문제를 해결하는 과정에서 문항(1)에서 순환전략을 통해 함수식을 생각했지만 문항(2)를 해결하기 위해 세웠던 함수식(상황적 인식 전략)이 계산과정에서 오류가 생겨 해결하지 못한 경우이다.

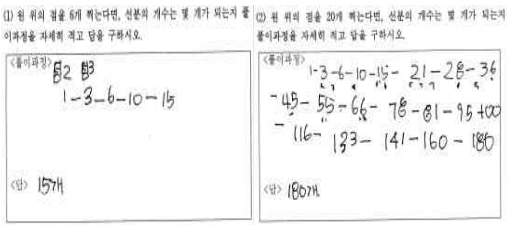



[그림 Ⅳ-8] 순환적인 관계전략에서 상황적 인식전략의 사용(6학년, 과제2)

반면, [그림 Ⅳ-9]와 같이 구체화를 통한 인식 전략(뛰어세기)으로 문항(1)을 해결한 후 이를 확장하여 문항(2)에서 해결하려고 하였으나 뛰어세기의 규칙을 바르게 적용하지 못해 올바른 답을 찾지 못한 경우이다.

<표 Ⅳ-4> 일반화를 명확하게 하는 단계의 문항별 유형 빈도수

| 유형 | 과제1-(3) | | | 과제2-(3) | | | 과제3-(3) | | | 과제4-(3) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 |
| 패턴을 언어로 기술(명) | 7 | 7 | 4 | 3 | 4 | 1 | 1 | 7 | 3 | 7 | 5 | 5 |
| 패턴을 기호 또는 수식으로 기술(명) | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 패턴을 언어로 설명한 후 수식이나 기호로 표현(명) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 틀린 표현 또는 무응답(명) | 1 | 1 | 1 | 6 | 6 | 6 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 4 |

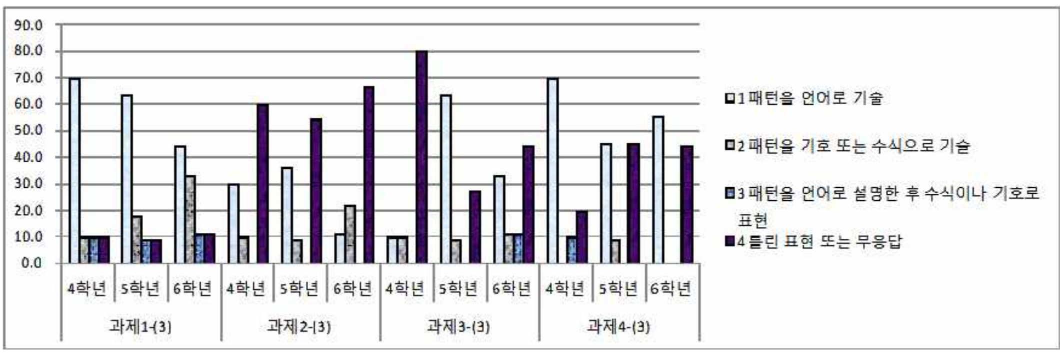


[그림 Ⅳ-9] 구체화를 통한 인식전략의 사용(5학년, 과제3)

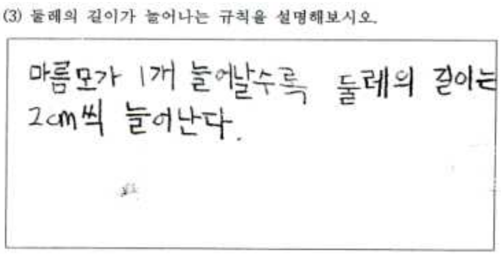
## 4. 일반화를 명확하게 하는 단계에서의 유형 분석

일반화를 명확하게 하는 단계를 살펴본 각 과제별 문항 (3)을 살펴보면 <표 Ⅳ-4>와 같다. 패턴을 언어로 기술하는 경우가 패턴을 기호 또는 수식으로 기술하는 경우보다 많았다. 그리고 [그림 Ⅳ-10]의 과제1-(3), 2-(3)의 해결전략 비교 그래프를 살펴보면, 영재학급 학생들은 패턴을 언어로 기술하는 경우가 비교적 많았으며 기호나 수식으로 하는 경우는 상대적으로 적었다. 그러나 패턴을 언어와 수식이나 기호 모두 사용하여 자세히 기술하는 경우는 극히 드물었다. 이것은 수학적인 표현단계에서 그림이나 언어보다 기호나 수식으로 기술하는 것이 더 상위 수준을 갖고 있다는 것을 의미하기도 하지만 문제를 해결할 때 동일한 영재학급의 집단에 속한 학생들이라도 일반화를 명확하게 하는 능력이 다르기 때문이라는 것을 알 수 있다. 따라서 학생들에게 자신이 찾은 일반화된 규칙에 대한 정당화를 발표할 기회를 제공하고 바르게 표현할 수 있는 방법을 지도할 필요가 있다는 것을 시사한다.

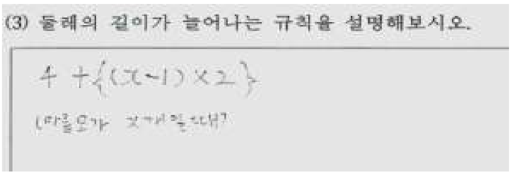
유형별 학생들의 반응의 예는 [그림 Ⅳ-11]~[그림 Ⅳ-13]과 같다.



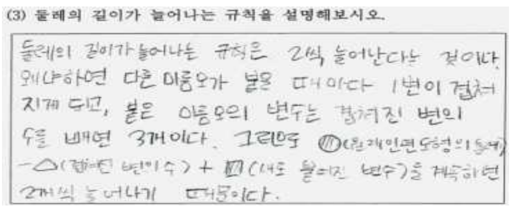
[그림 Ⅳ-10] 일반화를 명확하게 하는 단계의 문항별 유형 비교




[그림 Ⅳ-11] 패턴을 언어로 기술(과제4)



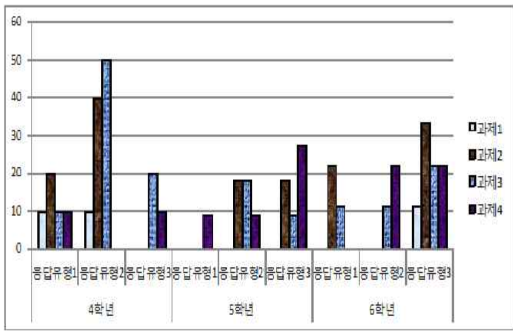

[그림 Ⅳ-12] 패턴을 기호 또는 수식으로 기술(과제1)




[그림 Ⅳ-13] 패턴을 언어로 설명한 후 수식이나 기호로 표현(과제1)

과제2, 3의 경우는 일반화를 위한 규칙을 틀리게 표현한 경우가 많아 학생들의 결과를 분석하기가 어려웠다. 그래서 이들이 문제를 해결할 때 어떤 규칙이 적용된다고 생각하는지를 알아보거나 과제별 (1),(2) 문항에서는 바르게 규칙을 인지하였는데 규칙을 표현하는 데 어떤 어려움을 갖고 있는지를 알아보는 것도 의미가 있을 것이라 판단하여 일반화를 명확하게 하는 단계에서 틀린 표현을 기록한 학생들만 대상으로 하여 <표 Ⅳ-5>와 같이 과제별 응답유형의 빈도를 정리하였다.

일반화를 명확하게 하는 단계에서 틀린 표현이 많았던 과제2와 과제3의 응답유형을 예로 살펴보면, 4학년 영재학급 학생은 응답유형1과 응답유형2에 비교적 많은 분포를 갖고 있으나 5학년 영재학급 학생은 응답유형2와 응답유형3에 비교적 많은 분포를 갖고 있다. 반면, 6학년 영재학급 학생은 응답유형3에 비교적 많은 분포를 갖고 있다([그림 Ⅳ-14] 참조).




[그림 Ⅳ-14] 과제별 응답유형에 따른 틀린 표현 비율(%)

<표 Ⅳ-5> 과제별 응답유형에 따른 틀린 표현을 한 학생 수

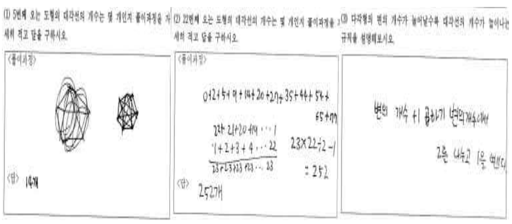
| | 4학년 | | | 5학년 | | | 6학년 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 응답유형1* | 응답유형2** | 응답유형3*** | 응답유형1 | 응답유형2 | 응답유형3 | 응답유형1 | 응답유형2 | 응답유형3 |
| 과제1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 과제2 | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 3 |
| 과제3 | 1 | 5 | 2 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 과제4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 |

*응답유형1 – 문항(1):정답, 문항(2):정답, 문항(3):틀린 표현(무응답 제외)

**응답유형2 – 문항(1):정답, 문항(2):오답, 문항(3):틀린 표현(무응답 제외)

***응답유형3 – 문항(1):오답, 문항(2):오답, 문항(3):틀린 표현(무응답 제외)

이러한 특징을 통해 4학년 영재학급 학생은 패턴의 일반화를 시작하는 단계와 형성하는 단계에서 정답을 찾아내지만 규칙을 표현하는 방법이 서툴러 틀린 표현으로 나타내거나 상황적 인식 전략의 설명을 자세히 적지 못해서 일반화를 명확하게 하지 못하는 경우가 있고([그림 Ⅳ-15] 참조), 일반화를 시작하는 단계에서는 정답을 찾지만 일반화를 형성하는 단계에서 오답을 적고 규칙을 정확히 설명하지 못한다는 것을 알 수 있다([그림 Ⅳ-16] 참조).



[그림 Ⅳ-15] 과제3에서 일반화를 명확하게 하는 단계의 틀린 표현(응답유형1)

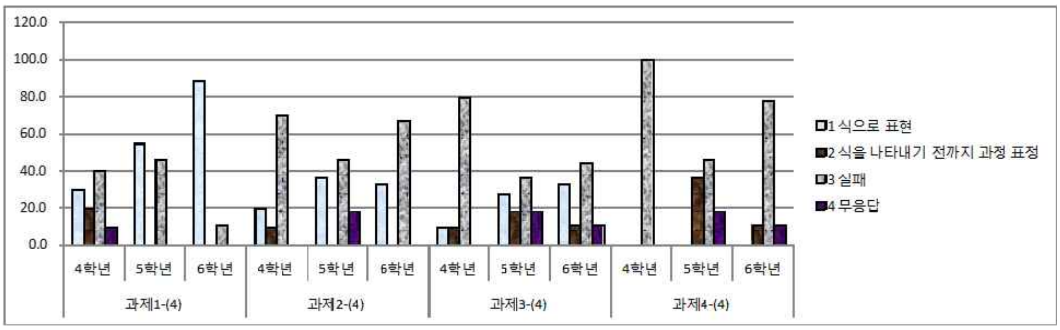
[그림 Ⅳ-16] 과제3에서 일반화를 명확하게 하는 단계의 틀린 표현(응답유형2)

반면, 5학년 영재학급 학생은 4학년 영재학급 학생의 응답유형2와 같은 오류가 많았으며 일반화를 시작하는 단계부터 오답을 적게 되어 규칙을 바르게 찾지 못하는 경우가 다른 유형에 비해 비교적 많았다.

6학년 영재학급 학생은 일반화를 시작하는 단계부터 오답을 갖게 되면 잘못된 규칙의 적용으로 일반화과정을 모두 틀리게 표현하였는데 이는 다른 학생에 비해 사고의 고착현상이 심한 경우라는 것을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-6> 정당화 단계의 유형별 비율

| 유형 | 과제1-(4) | | | 과제2-(4) | | | 과제3-(4) | | | 과제4-(4) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 | 4학년 | 5학년 | 6학년 |
| 식으로 표현 | 3 | 6 | 8 | 2 | 4 | 3 | 1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 식을 나타내기 전까지 과정 표현 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 |
| 실패 | 4 | 5 | 1 | 7 | 5 | 6 | 8 | 4 | 4 | 10 | 5 | 7 |
| 무응답 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |




[그림 Ⅳ-17] 정당화 단계의 문항별 유형 비교

### 5. 정당화 단계에서의 유형 분석

정당화 단계를 살펴본 과제별 문항 (4)의 유형 비율을 살펴보면 <표 Ⅳ-6>과 같다. 이 단계는 학생들이 갖고 있는 일반화의 전략을 수식이나 일반화의 과정을 바르게 표현할 수 있는지에 대해 알아보려는 의도를 갖고 있다. 문제해결이 비교적 쉬웠던 과제1, 2에서 수학영재학급 대부분의 학생들이 알고리즘을 일반화하여 식으로 나타낼 수 있을 것이라고 예상했었지만 처음 연구자의 생각과는 달리 학년에 따라 식의 표현 비율의 차이가 났다. 이는 아직까지 수학영재학급 학생들의 일반화 전략이 자연스럽게 나타나지 못한다는 것을 알 수 있으며 학생들의 패턴에 대한 일반화를 나타낼 수 있는 수학적 사고를 더 .길러줄 필요가 있다는 것을 시사한다.

또한 과제별 문항(4)은 식으로 바르게 표현할 수 있는지를 알아보기 위해 △나 □의 변수를 이용하였다. 그런데 학생들은 패턴을 언어로 기술하는 것보다 변수를 이용하여 수식으로 나타내는 것을 더 어렵게 생각하였다. 그러한 까닭에 과제4-(4)의 경우 모든 학생이 식으로 표현하지 못했다. 과제4는 평면을 직선으로 분할할 때 최대 몇 개로 나눌 수 있는가하는 문제였다.

## Ⅴ. 결론

본 연구는 초등 수학영재의 패턴 일반화 과정에서 어떤 전략을 사용하는지, 그리고 학년에 따라 영재학급 학생들은 패턴 일반화 과정에서 사용하는 전략의 차이가 무엇인지를 살펴보고자 하였다. 주된 연구 결과를 토대로 다음과 같은 교육적 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 패턴의 일반화를 시작하는 단계에서 영재학급 학생들은 문제에 제시된 모양이나 그림이 어떤 패턴을 이루고 있는지를 파악한 후 앞, 뒤 수의 관계를 이용한 순환적 관계 인식전략으로 문제를 해결하고자 하였다. 그러나 학년이 올라갈수록 순환적 관계를 함수적인 식으로 나타내어 문제를 해결하는 경향을 보였다. 또한 패턴의 일반화를 형성하는 과정에서 학생들은 상황적 인식전략을 선호하였다. 즉 학생들은 각 과제별 문항(1)을 통해 함수식을 만들어내고자 하였다. 그러나 과제별 문항(1)에서 보인 높인 정답률에 비해 과제별 문항(2)에서는 낮은 것을 알 수 있는데, 이는 영재학급 학생들이 몇 개의 단계를 통해 성급하게 일반화하려는 경향을 가지고 있음을 나타내는 것이다. 또한 그러한 오류를 보이는 경우가 학년이 올라갈수록 더 많았음을 정답률을 통해서 알 수 있었다. 따라서 저학년의 영재학급 학생들에게는 순환적 관계전략에서만 문제를 해결하도록 하지 않고 함수적인 관계식을 찾을 수 있도록 하는 활동이 필요할 것이며, 고학년의 영재학급 학생들에게는 관계식 발견 후에는 반드시 그 식의 타당성을 논리적으로 설명하는 활동을 영재교육에서 중요시할 필요가 있다(송상헌 · 허지연 · 임재훈, 2006).

둘째, 일반화를 명확하게 하는 단계에서 낮은 학년일수록 일반화과정을 언어로 표현하는 경우가 많았고 높은 학년일수록 식으로 표현하고자 하는 경우가 많았다. 이는 4학년 수학 교과서에서 두 수사이의 관계를 식으로 나타내기 위해 ◎와▽, ◆와★등을 이용한 관계식을 나타내도록 안내하고 있지만(교육과학기술부, 2011, pp.116,117) 패턴에 대한 수학적 지식이 상대적으로 적은 4학년은 언어로 표현하는 경우가 더 많을 수밖에 없고, 좀 더 학습한 6학년은 식이나 기호로 표현할 수 있는 능력이 좀 더 높을 수밖에 없었다. 즉, 수학적인 표현방법에서는 비록 영재학급 학생이라 하더라도 언어적 기술보다 기호나 수식을 더 선호하는 경향이 있으며 이것은 학년에

따라 차이가 난다는 것을 알 수 있었다. 또한 정당화 단계에서도 똑같이 나타났다. 그러나 어려운 문항에서 학생들은 일반화를 식으로 표현하는데 많은 실패를 하였는데, 두 변수사이의 관계를 바르게 찾아내지 못한데서 기인한 것이다. 따라서 패턴의 일반화를 형성할 때 구체적인 예를 이용한 패턴 찾기 부터 사용하여 일반화의 시작단계와 일반화를 형성하는 단계 사이에 좀 더 세부적인 발문이나 질문을 통해 학생들이 관계식을 유추해낼 수 있도록 안내할 필요가 있을 것이다.

셋째, 패턴의 일반화 과정을 영재학급 학생들에게 지도할 때 같은 학년의 집단이라 하더라도 일반화를 찾기 위한 전략별 차이가 나타날 수 있고, 대부분의 영재수업에서 결과에 대한 개인별 발표로만 끝나는 경우가 적지 않으므로 패턴과 관련한 수업에서는 자신이 찾은 패턴이 옳은지를 서로 의사소통할 수 있는 기회를 많이 제공하여 자신이 찾은 일반화에 대한 정당성을 확인할 수 있도록 할 필요가 있을 것이다.

끝으로, 본 연구는 단위학교 영재학급의 소수 학생을 대상으로 하였기 때문에 교육지원청 영재교육원, 대학부설 영재교육원에 소속한 영재학생들을 대상으로 하여 학년별 패턴 일반화 전략에서 본 연구와 같은 결과가 나오는지 알아볼 수 있는 후속 연구를 할 필요가 있을 것이다.

## 참고문헌


강현영(2007). 패턴 탐구를 통한 일반화와 기호 표현: 시각적 패턴을 중심으로. **학교수학, 9**(2). 313-326.

교육과학기술부(2009). **초등학교 교육과정 해설 (Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 서울: 교육과학기술부.

교육과학기술부(2011). **초등학교 수학 4-2**. 서울: 두산동아(주).

김남균, 김은숙(2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. **수학교육 논문집, 23**(2), 399-428.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰: 패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로. **수학교육학연구, 12**(3), 353-369.

김성준(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학, 5**(3), pp.343-360.

남승인(2000). 초등학교 저학년 영재지도방안. **수학교육학, 5**, pp. 21-37.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원(2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구, 17**(2), 163-177.

송상헌, 허지연, 임재훈(2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 79-94.

최병훈, 방정숙 (2011). 초등학교 1학년 학생들의 수학적 패턴 인식과 사고 과정 분석. **수학교육학연구, 21**(1), 67-86.

Bishop. J. (2000). Linera Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 107-126.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference : The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). The University of Melbourne, Australia.

Krutetskii, V. A. (1976) *The psychology of mathematical abilities in school children*. (J. Teller, trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Shicaago :

University of Chicago Press.

Lannin, J. K.(2005). Generalization and justification : The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking And Learning, 7*(3), 231-258, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lee. L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bendnarz, C. Kieran,& L. Lee(Eds.), *Approaches to algebra*, 87-106. Kluwer Academic Publishers.

Marie, E. & Billings, H. (2009). Exploring Generalization through Growth Patterns. In C. E. Greenes, (Ed.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th year book). (pp.279-294). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Mason. J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In Bednarz. N., Kieran. C., & Lee. L.(Eds.), *Approaches to algebra*, 65-86. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moss, J., Beatty, R., Barkin, S., Shillolo, G. (2009). "What Is Your Theory? What Is Your Rule?" Fourth Graders Build an Understanding of Functions through Patterns and Generalizing Problems. In C. E. Greenes, (Ed.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th year book). (pp.155-168). Hillsdale, NJ: Erlbaum & The National Council of Teachers of Mathematics.

Mulligan. J. & Mitchelmore. M.(2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Mulligan. J., Mitchelmore. M., Kemp C., Marston, J. & Highfield K.(2008). Encouraging mathematical thinking through pattern & structure an Intervention in the first year of schooling. *APMC, 13*(3), 10-15.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Orton, J, Orton, A, & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In Orton, A., (Ed), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.121-136). New York, NY: Continuum Books.

Sheffield, L. J.(Ed.) (1994). *The Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards*. Research-Based Decision Making Series. Mathematics. The National Research Center on the Gifted and Talented.

Warren. E. (2000). Visualization and the Development of Early Understanding in Algebra. In Maria. V. d. Heuvel-Panhuizen(Ed), *Proceedings of 24th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education(PME)*, Vol.4, 273-280. Hiroshima, Japan : PME, 2000.

# A Comparison of Mathematically Gifted Students' Solution Strategies of Generalizing Geometric Patterns

Choi, Byoung Hoon(Attached Elementary School of KNU)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

The main purpose of this study was to explore the process of generalization generated by mathematically gifted students. Specifically, this study probed how fourth, fifth, and sixth graders might generalize geometric patterns and represent such generalization. The subjects of this study were a total of 30 students from gifted classes of one elementary school in Korea. The results of this study showed that on the question of the launch stage, students used a lot of recursive strategies that built mainly on a few specific numbers in the given pattern in order to decide the number of successive differences. On the question of the towards a working generalization stage, however, upper graders tend to use a contextual strategy of looking for a pattern or making an equation based on the given information.

The more difficult task, more students used recursive strategies or concrete strategies such as drawing or skip-counting.

On the question of the towards an explicit generalization stage, students tended to describe patterns linguistically. However, upper graders used more frequently algebraic representations (symbols or formulas) than lower graders did. This tendency was consistent with regard to the question of the towards a justification stage. This result implies that mathematically gifted students use similar strategies in the process of generalizing a geometric pattern but upper graders prefer to use algebraic representations to demonstrate their thinking process more concisely. As this study examines the strategies students use to generalize a geometric pattern, it can provoke discussion on what kinds of prompts may be useful to promote a generalization ability of gifted students and what sorts of teaching strategies are possible to move from linguistic representations to algebraic representations

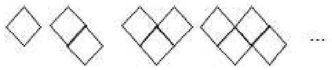
Key Words : Mathematically Gifted Students(수학영재학생), Pattern(패턴), Generalization(일반화), Geometric Patterns(기하적 패턴), Strategy(전략)

논문접수 : 2012. 9. 28
논문수정 : 2012. 10. 19
심사완료 : 2012. 11. 13

<부록> 검사지

본 검사지는 여러분의 성적을 알아보기 위한 검사지가 아니라 패턴의 사고 과정을 알아보고자 개발된 검사지입니다. 검사 결과는 연구 이외의 목적에는 사용하지 않을 것이며, 모든 문항에 대해 성실히 답해 주시면 감사하겠습니다.

1. 다음은 한 변의 길이가 1인 마름모를 한 변에 붙여 가면서 늘어나는 도형입니다. 풀이과정을 자세히 적고 답을 적으시오.



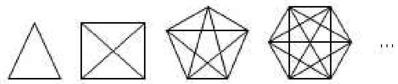
(1) 6번째 오는 모양의 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(2) 21번째 오는 모양의 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(3) 둘레의 길이가 늘어나는 규칙을 설명해보시오.

(4) 마름모가 △개 있다면, 둘레의 길이는 얼마인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구해보시오.

2. 다음은 다각형의 대각선의 수를 구하는 문제입니다. 풀이과정을 자세히 적고 답을 적으시오.



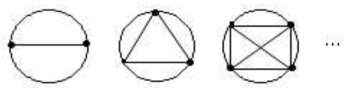
(1) 5번째 오는 도형의 대각선의 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(2) 22번째 오는 도형의 대각선의 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(3) 다각형의 변의 개수가 늘어날수록 대각선의 개수가 늘어나는 규칙을 설명해보시오.

(4) 다각형의 변의 개수가 □개라면, 대각선의 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

3. 그림과 같이 원 위에 점을 찍어 각 점을 서로 이어 선분을 만듭니다.



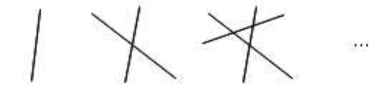
(1) 원 위의 점을 6개 찍는다면, 선분의 개수는 몇 개가 되는지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(2) 원 위의 점을 20개 찍는다면, 선분의 개수는 몇 개가 되는지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(3) 원 위의 점이 하나씩 늘어날 때 선분의 개수가 늘어나는 규칙을 설명해보시오.

(4) 원 위의 점의 개수를 □개라면, 선분의 개수는 몇 개인지 풀이 과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

4. 다음은 평면위에 직선을 하나씩 그어 평면을 최대 몇 개로 나눌 수 있는지 알아봅니다.




| 직선 | 1 | 2 | 3 | … |
|---|---|---|---|---|
| 평면 | 2 | 4 | 7 | … |

(1) 직선 4개를 그었을 때 평면의 최대 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(2) 직선 10개를 그었을 때 평면의 최대 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

(3) 직선의 개수가 늘어날수록 평면의 개수가 늘어나는 규칙을 설명해보시오.

(4) 직선의 개수가 □개라면, 평면의 개수는 몇 개인지 풀이과정을 자세히 적고 답을 구하시오.

※위의 문제들 중 이전에 풀어본 경험이 있는 문제는 어느 것입니까?(                    )
① 1번 ② 2번 ③ 3번 ④ 4번 ⑤ 없다.