http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2012.61.3.466

이산시간 불확실 특이시스템의 저차 강인 피동성 필터링

논 문
61-3-18

Robust Passive Low-order Filtering for Discrete-time Uncertain Descriptor Systems

김 종 해* · 오 도 창†
(Jong-Hae Kim · Do-Cang Oh)

Abstract - In this paper, we consider the problem of a robust passive filtering with low-order for discrete-time singular systems with polytopic uncertainties. A BRL(bounded real lemma) for robust passivity with a dissipativity of discrete-time uncertain singular systems is derived. A low-order robust passive filter design method is proposed by new reduced-order method and LMI(linear matrix inequality) technique on the basis of the obtained BRL. Finally, illustrative examples are presented to show the applicability of the proposed method.

Key Words : Robust passivity, Low-order filter, Polytopic uncertainty, Discrete descriptor systems

1. 서 론

피동성 시스템(passive system)의 개념은 회로 시스템, 네트워크 시스템 및 제어이론 등에 중요한 역할을 하고 있다. 또한 산일성(dissipativity)은 전기 회로나 동적 시스템의 피동성의 일반적 성질을 나타낸다. 피동성은 강인 안정성에서 중요한 역할을 하는 회로 해석과 밀접한 관련이 있다[1-3]. 또한, 피동성은 전력 시스템, 신경회로망, 신호처리, 동기화 등에 적절한 설계방법임을 최근 결과들[3-5]에서 보여주고 있다. 최근 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 물리적 변수들 사이에 존재하는 대수 제약조건을 표현하는 이론적인 면이나 실용적인 면의 관점에서 동적 시스템의 중요한 종류가 특이현상이다. 기존의 상태공간 모델을 가지고 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 다양한 시스템에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템에 대한 피동성을 위한 제어 문제[6-9]를 다루는 결과들이 많이 나오고 있다.

제어시스템이나 신호처리에서의 기본적인 문제중의 하나가 측정되어지지 않는 상태를 시스템의 입력과 출력으로부터 추정(estimation)하는 것이다. 이러한 추정문제에서 가장 각광받은 것은 칼만 필터[10]이지만 시스템의 불확실성이 존재하는 경우에는 적용하기 힘들다는 문제가 있다. 따라서 필터링 오차 시스템이 미리 설정한 성능지수보다 작도록 설계하는 H_∞ 필터 설계방법과 산일성(dissipation)을 가지는 피동성(passivity) 필터에 대한 연구결과들[11-18]이 나오고 있다. Lo와 Wu[16]는 T-S 퍼지 모델을 이용한 비선형 시스템의 산일성 필터를 설계하는 방법을 제시하였다. 그리고 Li 등[17]은 선형행렬부등식(linear matrix inequality)을 이용하여 이산시간 시스템에 대한 산일성 필터 설계방법을 제시하였다. 또한, Wu 등[18]은 연속시간에서 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 산일성 해석방법을 제시하였다. 하지만 다루는 시스템들[13,15-17]이 비특이시스템이기 때문에 특이시스템에 직접 적용하는 것이 불가능하였다. 지금까지 다루는 대부분의 피동성 필터 설계문제[16-18]는 비특이시스템에 대한 결과이거나 특이시스템에 대한 결과도 연속시간에 한정되었다. 따라서 본 논문의 첫 번째 목적은 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 산일성을 가지는 강인 피동성 필터를 설계하는 것이다. Xu와 Lam[19]이 연속시간과 이산시간 특이시스템에 대하여 필터링 오차 특이시스템이 정규적(regular)이고 코잘(causal) 및 안정성을 만족하는 차수축소 H_∞ 필터 설계 알고리듬을 제시하였다. 하지만 비선형행렬부등식으로 주어지는 필터의 존재조건 때문에 해를 구하기 위한 제약조건이 존재하였다. 또한 저차의 필터를 설계하는 기존의 방법[19-21]들이 만족하는 조건이 늘어나서 계산량이 늘어나고 비선형 요소로 인한 해의 존재성이 줄어들고 등호의 조건이 들어가서 최적화 알고리듬을 적용하기가 힘들다는 단점이 있다. 따라서, 본 논문의 두 번째 목적은 피동성 필터의 존재조건의 수를 유지하면서 새로운 변수의 설정만으로 저차의 강인 피동성 필터를 설계하는 것이다. 또한 제안하는 강인 피동성 필터 설계 알고리듬은 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템도 포함하는 일반적인 방법이다. 제안하는 필터 설계 알고리듬은 기존의 차수축소 기법과는 달리 간단한 변수의 설정만으로 저차의 필터를 직접 설계할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서는 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대하여 저차의 차수를 가지는 강인 피동성 필터 설계방법을 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식을 이용하여 제시한다. 먼저, 차수축소 강인 피동성 필터가 존재할 유계 실수정리(bounded real lemma)를 제시한다. 그리고, 제안한 유계 실수

* 정 회 원 : 선문대 전자공학과 부교수
† 교신저자, 정회원 : 건양대 전자정보공학과 교수
E-mail : docoh@konyang.ac.kr
접수일자 : 2012년 1월 16일
최종완료 : 2012년 1월 27일

정리를 기초로 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 피동성 필터의 존재조건과 필터의 설계방법을 제안한다. 구하고자 하는 필터의 차수를 미리 결정하면 제안한 조건으로부터 원하는 차수의 강인 피동성 필터를 설계할 수 있다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0과 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $X_{(n\times n)}$는 X가 $n\times n$ 차원을 가지는 행렬이고, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이고, $diag(\bullet)$는 블록 대각(block diagonal) 행렬을 의미한다. $P>0(<0)$은 행렬 P가 양(음)의 정부호 행렬(positive(negative)-definite matrix)을 의미한다.

2. 문제설정

이산시간 불확실성 특이시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+Bw(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Dw(k) \\ z(k) &= Lx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(k)\in R^n$는 상태변수, $y(k)\in \boldsymbol{R}^m$는 측정출력, $z(k)\in \boldsymbol{R}^p$는 추정되어지는 변수, $w(k)\in \boldsymbol{R}^q$는 $l_2[0,\infty)$에 속하는 외란입력신호, E는 $rank(E)=r\le n$ 을 만족하는 특이행렬이고, 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시스템 행렬은 잘 모르지만 폴리토프형의 알고 있는 볼록 컴팩트 집합인

$$X:=(A,B,C,D,L)\in\Omega \tag{2}$$

에 속한다고 가정한다. 여기서 Ω는

$$\Omega:=\left\{X(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\chi_i,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1,\ \lambda_i\ge 1\right\} \tag{3}$$

이고 $\chi_i:=(A_i,B_i,C_i,D_i,L_i)\in\Omega$, $(i=1,\ldots,N)$이며, χ_i는 다면 정의역(polyhedral domain) Ω의 i번째 꼭지점(vertex)을 표시한다. 본 논문의 목적은 불확실 이산시간 특이시스템 (1)을 위하여 $z(k)$를 추정하는 저차의 선형 시불변이고 점근적으로 안정한 강인 피동성 필터인

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_r\hat{x}(k)+B_ry(k) \\ \hat{z}(k) &= C_r\hat{x}(k)+D_ry(k) \end{aligned} \tag{4}$$

를 설계하는 것이다. 여기서, $\hat{x}(k)\in\boldsymbol{R}^{\hat{n}}(0\le\hat{n}\le n)$ 는 필터 상태변수이고 $\hat{z}(k)\in\boldsymbol{R}^p$는 $z(k)$의 추정치이다. 또한, $A_{r(\hat{n}\times\hat{n})}$, $B_{r(\hat{n}\times q)}$, $C_{r(p\times\hat{n})}$와 $D_{r(p\times q)}$는 결정해야 할 필터변수이다. 주어진 시스템보다 저차의 차수($\hat{n}\le n$)를 가지는 강인 피동성 필터 (4)에서, $\hat{n}<n$이면 미리 정한 $\hat{n}$ 차수를 가지는 저차의 필터를 설계할 수 있으며, $n=\hat{n}$이면 완전 차수(full-order) 강인 피동성 필터가 된다. 또한, $A_r=0$, $B_r=0$, $C_r=0$가 되면, 필터 (4)는 $\hat{z}(k)=D_ry(k)$ 와 같이 영의 차수(zero-order)를 가지는 정적 필터(static filter)가 된다. 따라서, 미리 설정한 차수를 가지는 저차의 강인 피동성 필터를 쉽게 설계하도록 하는 것이 본 논문의 목적중의 하나이다. 보조 상태벡터를 $\tilde{x}(k)=\left[x(k)^T\ \ \hat{x}(k)^T\right]^T$ 로 두고, 추정오차를 $\tilde{z}(k)=z(k)-\hat{z}(k)$ 로 정의하면, 필터링 오차 특이시스템은

$$\begin{aligned} \tilde{E}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k)+\tilde{B}w(k) \\ \tilde{z}(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k)+\tilde{D}w(k) \end{aligned} \tag{5}$$

와 같고, 여기서 변수들은

$$\tilde{E}=\begin{bmatrix}E&0\\0&I\end{bmatrix},\ \tilde{A}=\begin{bmatrix}A&0\\B_rC&A_r\end{bmatrix},\tilde{B}=\begin{bmatrix}B\\B_rD\end{bmatrix},\ \tilde{C}=[L-D_rC-C_r],\ \tilde{D}=-D_rD$$

으로 정의한다.

정의 1[23]: 특이시스템 $Ex(k+1)=Ax(k)$ 에 대하여, $\det(zE-A)$ 이 항등적으로 영이 아니면 정규적이라 정의하고 $rank(E)=\deg(\det(zE-A))$ 이면 코잘이라 한다. 정규적이고 $\det(zE-A)=0$ 의 모든 근이 단위원내에 존재하면 안정하다고 정의한다.

정의 2[22,24]: 모든 불확실성 (2)에 대하여, 행렬부등식

$$J_p=\sum_{k=0}^{T}w(k)^T\tilde{z}(k)\ge 0,\quad \forall\, T>0 \tag{6}$$

을 만족하면, 불확실 특이시스템 (5)는 강인 피동적이라고 정의한다.

정의 3[22,24]: 모든 불확실성 (2)에 대하여, 행렬부등식

$$J_d=\sum_{k=0}^{T}\left[w(k)^T\tilde{z}(k)-\eta w(k)^Tw(k)\right]\ge 0,\quad \forall\, T>0 \tag{7}$$

을 만족하면, 불확실 특이시스템 (5)는 산일성 η를 가지는 강인 피동적이라고 정의한다. 따라서, 식 (4)의 형태를 가지는 저차의 강인 피동성 필터 설계의 목적은 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규적이고 코잘이며 안정하고, $\tilde{x}(k)$의 초기조건이 영인 경우에 대하여 성능지수 (7)을 만족하는 것이다.

정의 2와 정의 3에서 피동성은 산일성이 양의 실수가 되는 것을 의미한다. 시스템의 가장 큰 산일성, 즉 식 (7)을 만족하는 가장 큰 η를 산일적(dissipativity)이라고 표현하고 η^*로 표시한다[22].

3. 저차 강인 피동성 필터링

본 절에서는 필터링 오차 특이시스템이 안정하고 강인 피동성 성질 (7)을 만족하는 유계 실수정리를 구한다. 그리고 저차의 강인 피동성 필터가 존재할 조건과 차수축소 필터 설계방법을 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적

화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 기법으로 나타내고자 한다. 정리 1에서는 필터링 오차 특이시스템이 강인 피동성을 만족하기 위한 유계 실수정리를 제안하고, 정리 2에서는 저차의 차수를 가지는 강인 피동성 필터 설계방법을 제안한다.

정리 1: 주어진 실수 $\eta > 0$ 에 대하여, 이산시간 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규적이고 코잘이며 안정하고 식 (7)의 강인 피동성을 만족하기 위해서는 아래의 행렬부등식

$$\Pi = \begin{bmatrix} \langle \tilde{A}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \rangle - \tilde{E}^T P \tilde{E} & \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{B} - \tilde{C}^T & \tilde{A}^T P \\ * & 2\eta - \langle \tilde{D} \rangle & \tilde{B}^T P \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P와 임의의 행렬 $\tilde{Z}$가 존재하는 것이다. 여기서, $\tilde{R}$는 $\tilde{E}^T \tilde{R} = 0$ 을 만족하는 행렬이다.

증명: 적절한 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(\tilde{x}(k)) = \tilde{x}(k) \tilde{E}^T P \tilde{E} \tilde{x}(k) \tag{9}$$

와 같이 설정하고, $V(\tilde{x}(k))$ 의 전방향 차분(forward difference)을 구하면

$$\Delta V(\tilde{x}(k)) = V(\tilde{x}(k+1)) - V(\tilde{x}(k)) \tag{10}$$

으로 구한다. 또한 $\tilde{E}^T \tilde{R} = 0$ 이므로

$$2\tilde{x}(k+1)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(k) = 0 \tag{11}$$

이 된다. 따라서, 식 (10)과 (11) 및 정의 3의 강인 피동성 지수인 식 (7)에 의하여

$$\begin{aligned} &\Delta V(\tilde{x}(k)) - w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) + 2\eta w(k)^T w(k) \\ &\quad + 2\tilde{x}(k+1)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(k) = \zeta(k)^T \Xi \zeta(k) \end{aligned} \tag{12}$$

와 같은 조건을 구할 수 있다. 여기서, 변수들은 다음과 같다.

$$\zeta(k)^T = \begin{bmatrix} x(k)^T & w(k)^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \tilde{A}^T P \tilde{A} + \langle \tilde{A}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \rangle - \tilde{E}^T P \tilde{E} & \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{B} - \tilde{C}^T + \tilde{A}^T P \tilde{B} \\ * & 2\eta - \langle \tilde{D} \rangle + \tilde{B}^T P \tilde{B} \end{bmatrix}.$$

식 (12)에서 $\Xi < 0$ 일때, 다음의 부등식

$$\begin{aligned} &\Delta V(\tilde{x}(k)) - w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) \\ &+ 2\eta w(k)^T w(k) + 2\tilde{x}(k+1)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(k) < 0 \end{aligned} \tag{13}$$

을 만족한다. 식 (13)의 양변을 0에서부터 T까지 더하면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{T} \big[\Delta V(\tilde{x}(k)) - w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) \\ &\quad + 2\eta w(k)^T w(k) + 2\tilde{x}(k+1)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(k) \big] < 0 \end{aligned} \tag{14}$$

를 얻을 수 있다. $T > 0$ 에 대해서

$$S(T) = \sum_{k=0}^{T} \left[-w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) + 2\eta w(k)^T w(k) \right] \tag{15}$$

라고 정의한다. 식 (11)과 초기조건이 영이라고 가정하였으므로

$$\begin{aligned} S(T) \le &\sum_{k=0}^{T} \big[\Delta V(\tilde{x}(k)) - w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) \\ &\quad + 2\eta w(k)^T w(k) + 2\tilde{x}(k+1)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(k) \big] \end{aligned} \tag{16}$$

을 만족한다. 식 (11)과 (13)으로부터 $S(T) < 0$ 이므로 어떤 $T > 0$ 에 대하여

$$\sum_{k=0}^{T} \left[-w(k)^T \tilde{z}(k) - \tilde{z}(k)^T w(k) + 2\eta w(k)^T w(k) \right] < 0 \tag{17}$$

을 만족하므로 정의 3에 의하여 불확실 필터링 오차 특이시스템 (5)는 산일성 η를 가지는 강인 피동적이다. 슈어 여수정리(Schur complements)[22]에 의하여 $\Xi < 0$ 은 식 (8)로 변형된다.

다음은 주어진 필터링 오차 특이시스템의 정규성, 코잘 및 안정성에 대한 증명이다. 선형행렬부등식 (8)은

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{A}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \rangle - \tilde{E}^T P \tilde{E} & \tilde{A}^T P \\ * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

을 의미한다. 슈어 여수정리에 의하여

$$\langle \tilde{A}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \rangle - \tilde{E}^T P \tilde{E} + \tilde{A}^T P \tilde{A} < 0 \tag{19}$$

와 같고, 식 (19)는 Xu와 Lam[19]의 정리 1과 정의 1에 의하여 정규적이고 코잘 및 안정성을 보일 수 있다. ■

변수 종속 리아푸노프 함수를 폴리토픽 불확실성을 가지는 필터링 오차 특이시스템 (5)에 적용하고 보수성을 줄이기 위하여 Oliverira 등[25]이 사용한 슬랙 변수(slack variable)를 사용하여 정리 1의 조건을 정리 2와 같이 변형한다.

정리 2: 폴리토픽 불확실성 (2)를 가지는 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규적이고 코잘이며 안정하고 식 (7)의 강인 피동성을 만족하기 위해서는 아래의 행렬부등식

$$\tilde{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \langle \tilde{A}_i^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \rangle - \tilde{E}_i^T P \tilde{E}_i & \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{B}_i - \tilde{C}_i^T & \tilde{A}_i^T P \\ * & 2\eta - \langle \tilde{D}_i \rangle & \tilde{B}_i^T P \\ * & * & -P_i \end{bmatrix} < 0 \tag{20}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P_i와 행렬 $\tilde{Z}$가 존재하는 것이다. 여기서, $\tilde{R}$는 $\tilde{E}^T \tilde{R} = 0$ 을 만족하는 행렬이다.

증명: 폴리토픽 불확실성을 가지는 식 (2)를 정리 1의 식

(8)의 조건에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\begin{bmatrix}\langle \widetilde{A}_i^{\,T}\widetilde{R}\widetilde{Z}^T\rangle-\widetilde{E}_i^TP\widetilde{E}_i & \widetilde{Z}\widetilde{R}^T\widetilde{B}_i-\widetilde{C}_i^T & \widetilde{A}_i^{\,T}P \\ * & 2\eta-\langle \widetilde{D}_i\rangle & \widetilde{B}_i^{\,T}P \\ * & * & -P_i\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\widetilde{\Pi}_i \tag{21}$$

과 같이 되고, $\widetilde{\Pi}_i<0$ 이면 정리 1의 $\Pi<0$ 이 되므로 식 (20)을 만족하면 필터링 오차 특이시스템 (5)가 식 (7)의 강인 피동성을 만족한다. ■

구하여진 정리 2를 이용하여 필터링 오차 특이시스템 (5)의 강인 피동성을 만족하는 저차의 필터 설계방법을 정리 3에서 제안한다. 정리 3에서는 설계하고자 하는 필터의 차수($\hat{n}$)를 미리 설정하면 저차의 강인 피동성 필터를 직접 설계할 수 있다. $n=\hat{n}$ 이면 완전 차수 필터이고 $\hat{n}=0$ 이면 영의 차수를 가지는 정적 필터를 설계한다.

정리 3: 폴리토픽 불확실성 (2)를 가지는 이산시간 특이시스템 (1)에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\Theta_i=\begin{bmatrix}\Theta_{1i} & -E^TP_{2i} & \Theta_{2i} & A_i^TX_1^T+C_i^TB_f^T\Phi^T & A_i^TF_1^T+C_i^TB_f^T \\ * & -P_{3i} & C_f^T & A_f^T\Phi^T & A_f^T \\ * & * & \Theta_{3I} & B_i^TX_1^T+D_i^TB_f^T\Phi^T & B_i^TF_1^T+D_i^TB_f^T \\ * & * & * & P_{1i}-\langle X_1\rangle & P_{2i}-F_1^T-\Phi F_2 \\ * & * & * & * & P_{3i}-\langle F_2\rangle\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$\Theta_{1i}=\langle A_i^TRZ^T\rangle-E^TP_{1i}^TE,\ \Theta_{2i}=ZR^TB_i-L_i^T+C_i^TD_f^T$

$\Theta_{3I}=2\eta I+\langle D_fD_i\rangle$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 $\begin{bmatrix}P_{1i(n\times n)} & P_{2i(n\times\hat{n})} \\ * & P_{3i(\hat{n}\times\hat{n})}\end{bmatrix}$, 양의 상수 η, 행렬 $F_{1(\hat{n}\times n)}$, $F_{2(\hat{n}\times n)}$, $X_{1(n\times n)}$, $Z_{(n\times\hat{n})}$, $A_{f(\hat{n}\times\hat{n})}$, $B_{f(\hat{n}\times q)}$, $C_{f(p\times\hat{n})}$, $D_{f(p\times q)}$가 존재하면, 불확실 특이시스템이 산일성 η를 가지는 강인 피동성을 만족하는 저차의 차수를 가지는 강인 피동성 필터

$$A_r=A_fF_2^{-1}\ \ ,\ B_r=B_f\ \ ,\ C_r=C_fF_2^{-1}\ \ ,\ D_r=D_f \tag{23}$$

로부터 구할 수 있다. 여기서, $R\in\boldsymbol{R}^{r\times\hat{n}}$ 는 $rank(R)=n-r$ 과 $E^TR=0$ 을 만족한다.

증명: 차수축소를 위한 중요한 변수 설정과 보수성을 줄이기 위하여 새로운 슬랙변수 H[25]를 이용하면 식 (20)은

$$\Lambda_i=\begin{bmatrix}\langle \widetilde{A}_i^{\,T}\widetilde{R}\widetilde{Z}^T\rangle-\widetilde{E}^TP\widetilde{E} & \widetilde{Z}\widetilde{R}^T\widetilde{B}_i-\widetilde{C}_i^T & \widetilde{A}_i^{\,T}H^T \\ * & 2\eta-\langle \widetilde{D}_i\rangle & \widetilde{B}_i^{\,T}H^T \\ * & * & P_i-\langle H\rangle\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

와 같다. 식 (24)에서 저차의 강인 피동성 필터를 위하여 슬랙변수 H를

$$H=\begin{bmatrix}X_1 & \Phi X_2 \\ X_3 & X_4\end{bmatrix}\ \ ,\ \Phi=\begin{bmatrix}I_{\hat{n}\times\hat{n}} \\ 0_{((n-\hat{n})\times\hat{n})}\end{bmatrix} \tag{25}$$

로 정의한다. 여기서, 변수들의 차원은 $X_{1(n\times n)}$, $X_{2(\hat{n}\times\hat{n})}$, $X_{3(\hat{n}\times n)}$, $X_{4(\hat{n}\times\hat{n})}$, $\Phi_{(n\times\hat{n})}$과 같다. 행렬부등식 (24)로부터 $H+H^T>0$ 이므로 $X_4+X_4^T>0$ 이다. 따라서 X_4는 역행렬이 존재한다. 식 (24)는 구하고자 하는 변수의 측면에서 비선형이므로 모든 변수의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식을 얻기 위하여 몇 가지 변수들을

$$\widetilde{R}=diag(R,0)\quad,\ \widetilde{Z}=\begin{bmatrix}Z\,I \\ 0\ I\end{bmatrix},\ \Psi=diag(I,X_2X_4^{-1})$$

$$F_1=X_2X_4^{-1}X_3\ \ ,\ F_2=X_2X_4^{-T}X_2^T\ \ ,\ \Psi P_i\Psi^T=\begin{bmatrix}P_{1i} & P_{2i} \\ * & P_{3i}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$A_f=X_2A_rX_4^{-T}X_2^T\ \ ,\ B_f=X_2B_r\ \ ,\ C_f=C_rX_4^{-T}X_2^T\ \ ,\ D_f=D_r$$

과 같이 정의한다. 그리고 $V=diag(\Psi,I,I,\Psi)$ 와 식 (26)의 변수를 이용하여 식 (24)에서 합동변환(congruence transformation)을

$$V\Lambda_iV^T=\Theta_i \tag{27}$$

과 같이 정리하면 식 (22)를 구할 수 있다. $\Theta_i<0$ 이면 $\Lambda_i<0$ 이므로 정의 3을 만족한다. $y(k)$ 에서 $\hat{z}(k)$ 의 전달함수

$$\begin{aligned}&C_f(zI-A_f)^{-1}B_f+D_f\\&=C_fX_2^{-T}X_4^T(zI-X_2^{-1}A_fX_2^{-T}X_4^T)^{-1}X_2^{-1}B_f+D_f\\&=C_f(zF_2-A_f)^{-1}B_f+D_f\\&=C_fF_2^{-1}(zI-A_fF_2^{-1})^{-1}B_f+D_f\\&=C_r(zI-A_r)^{-1}B_r+D_r\end{aligned} \tag{28}$$

을 식 (26)을 이용하여 변형하면 저차의 강인 피동성 필터는 식 (23)과 같이 얻어진다. ■

정리 3에서 저차의 강인 피동성 필터를 설계하기 위해서는 Φ의 설정이 중요한 역할을 한다. $n=\hat{n}$ 이면 $\Phi=I_{(n\times n)}$ 이므로 완전차수(full-order) 강인 피동성 필터를 설계할 수 있다. 또한, $\hat{n}=0$ 이면 정적필터 $\hat{z}(k)=D_ry(k)$ 를 설계할 수 있다. 가장 큰 η^*의 값을 구하기 위해서는 정리 3을

$$\text{Maximize } \eta \text{ subject to LMI (21)} \tag{29}$$

의 최적화 문제로 변경 가능하다.

제안한 이산시간 불확실 특이시스템에 대한 강인 피동성 필터를 설계하기 위하여

$$E=\begin{bmatrix}1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0.51 & 0.32 & 0.5+\delta_1 \\ -0.31 & -0.21 & 0.15 \\ -0.1 & 0.1 & -0.4\end{bmatrix}\ \ ,\ B=\begin{bmatrix}0.01 \\ 0.2 \\ -0.1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0.4+\delta_2 \\ 0.3 \\ 0.2\end{bmatrix}^T\ \ ,\ L=\begin{bmatrix}0.5 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}^T\ ,\ D=1\ ,\ |\delta_1|\le 0.4\ ,\ |\delta_2|\le 0.2 \tag{30}$$

과 같은 특이시스템을 다룬다. $E^TR=0$ 을 만족하는 행렬 R

은 완전 차수인 3차($n=\hat{n}=3$) 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=diag(0,1,0)$ 으로, 2차($\hat{n}=2$) 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=\begin{bmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\end{bmatrix}^T$ 으로, 1차($\hat{n}=1$) 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=[0\ 1\ 0]^T$ 와 같이 잡을 수 있다. $\eta=1$로 설정하면 정리 3으로부터 3차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-0.0024 & -0.0011 & 0.1003\\ -1.0493 & 0.0000 & -0.0959\\ -1.0041 & 0.0002 & 0.1586\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\begin{bmatrix}-0.8470\\ -0.6983\\ -0.1431\end{bmatrix}y(k)$$
$$\hat{z}(k)=[0.5818\quad 0.0001\quad 0.2331]\hat{x}(k)-3.1834y(k) \tag{31}$$

이고, 2차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.2523 & 0.0030\\ -0.9785 & -0.0232\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\begin{bmatrix}-0.5496\\ -0.6187\end{bmatrix}y(k) \tag{32}$$
$$\hat{z}(k)=[0.1825\ 0.0159]\hat{x}(k)-2.9300y(k)$$

이고, 1차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=0.2229\hat{x}(k)-0.7798y(k) \tag{33}$$
$$y(k)=0.2526\hat{x}(k)-3.0379y(k)$$

이며, 영의 차수를 가지는 정적필터는 R의 선택에 따라서

$$\hat{z}(k)=-2.7760y(k),\quad \text{(3차필터의 } R\text{인 경우)} \tag{34}$$
$$\hat{z}(k)=-2.7651y(k),\quad \text{(2차필터의 } R\text{인 경우)}$$
$$\hat{z}(k)=-2.7579y(k),\quad \text{(1차필터의 } R\text{인 경우)}$$

와 같이 각각 구할 수 있다. 따라서, 제안한 강인 피동성 필터는 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템을 정규성, 코잘, 안정성 및 산일성 η를 가지는 피동성을 보장한다. 또한, 제안한 강인 피동성 필터 설계 알고리듬은 비특이시스템($E=I$)에 대해서도 직접 적용가능하다. 비특이시스템의 적용 예제를 위해서, 식 (30)의 예제에서 $E=diag(1,1,1)$ 인 비특이시스템으로 설정하면, $E^TR=0$을 만족하는 행렬 R은 완전 차수인 3차 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=diag(0,0,0)$ 으로, 2차 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=\begin{bmatrix}0\,0\,0\\0\,0\,0\end{bmatrix}^T$ 으로, 1차 강인 피동성 필터를 위해서는 $R=[0\ 0\ 0]^T$ 와 같이 잡을 수 있다. 동일하게 $\eta=1$로 설정하면 3차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.0059 & -0.0058 & 0.0036\\ -0.0111 & -0.0009 & 0.0058\\ -0.0001 & 0.0070 & -0.0053\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\begin{bmatrix}-31.1293\\ 0.2590\\ 13.5928\end{bmatrix}y(k)$$
$$\hat{z}(k)=[0.0533\quad -0.0093\quad -0.0046]\hat{x}(k)-208.9697y(k) \tag{35}$$

이고, 2차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.0057 & -0.0053\\ -0.0106 & -0.0003\end{bmatrix}\hat{x}(k)+\begin{bmatrix}-49.1308\\ 2.1087\end{bmatrix}y(k) \tag{36}$$
$$\hat{z}(k)=[0.0546-0.0080]\hat{x}(k)-330.3254y(k)$$

이고, 1차 강인 피동성 필터는

$$\hat{x}(k+1)=0.0053\hat{x}(k)-108.5891y(k) \tag{37}$$
$$y(k)=0.0677\hat{x}(k)-728.6617y(k)$$

이며, 영의 차수를 가지는 정적필터는 R의 선택에 따라서

$$\hat{z}(k)=-3.3918y(k),\quad \text{(3차필터의 } R\text{인 경우)} \tag{38}$$
$$\hat{z}(k)=-3.3305y(k),\quad \text{(2차필터의 } R\text{인 경우)}$$
$$\hat{z}(k)=-3.3080y(k),\quad \text{(1차필터의 } R\text{인 경우)}$$

으로 구해진다. 따라서 제안한 강인 피동성 필터 설계 알고리듬은 특이시스템과 비특이시스템에 동시에 적용가능한 일반적인 알고리듬이다.

4. 결 론

본 논문에서는 폴리토픽 불확실성을 가지는 이산시간 불확실 특이시스템에 대한 저차의 강인 피동성 필터가 존재할 조건과 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 기법을 이용하여 제안하였다. 먼저 강인 피동성 필터가 존재할 조건을 리아푸노프 함수를 선정하여 구하였다. 그리고 구하고자 하는 변수들을 폴리토프에 속하는 변수로 선정하여 선형행렬부등식 형태의 저차의 강인 피동성 필터가 존재할 조건과 설계방법을 구하였다. 또한, 본 논문에서 제안하는 알고리듬을 이용하면 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이 된다. 마지막으로 수치예제를 통하여 저차의 강인 피동성 필터의 설계 방법을 확인하였다. 또한, 제안한 강인 피동성 설계 알고리듬은 이산시간에서의 시간지연 특이시스템이나 마코프 점프 특이시스템 등으로도 쉽게 확장 가능하다.

감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임. (No. 2010-0025670)

참 고 문 헌

[1] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.

[2] N. Kottenstette and P. J. Antsaklis, "Relationship between positive real, passive dissipative, and positive systems," *Proc. of American Control Conference, Baltimore, MD, USA*, pp. 409-416, 2010.

[3] C. Li and X. Liao, "Passivity analysis of neural networks with time delay," *IEEE Trans. Circuits and Systems-II, Exp. Briefs,* vol. 52, no. 8, pp. 471-475, 2005.

[4] L. Xie, M. Fu, and H. Li, "Passivity analysis and passification for uncertain signal processing systems," *IEEE Trans. Signal Process.,* vol. 46, no.

9, pp. 2394-2403, 1998.
[5] D. Q. Wei and X. S. Luo, "Passivity-based adaptive control of chaotic oscillations in power systems," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 31, no. 3, pp. 665-671, 2007.
[6] Q. Li, Q. Zhang, N. Yi, and Y. Yuan, "Robust passive control for uncertain time-delay singular systems," *IEEE Trans. Circuits and Systems-I, Reg. Papers,* vol. 56, no. 3, pp. 653-663, 2009.
[7] A. Ling, Y. Hui, and D. X. Zhuang, "Passive control for uncertain discrete time-delay singular systems," *Proc. 3rd International Conf. on Intelligent Networks and Intelligent Systems*, pp. 156-159, 2010.
[8] H. Li and S. Shi, "Robust passive control for singular systems with time-delay and uncertainties," *Proc. International Conf. on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology,* pp. 4853-4855, 2011.
[9] Z. Feng, J. Lam, and H. Gao, "α-dissipativity analysis of singular time-delay systems," A*utomatica*, vol. 47, pp. 2548-2552, 2011.
[10] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. Circuits and Systems-II*, vol. 53, pp. 1466-1470, 2006.
[11] Y. Chen, Z. Zhou, C. Zeng, and Q. Zhang, "H_∞ filtering for descriptor systems," *International Journal of Control, Automation, and Systems,* vol. 4, pp. 697-704, 2006.
[12] C. M. Lee and I. K. Fong, "H_∞ optimal singular and normal filter design for uncertain singular systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 1, pp 119-126, 2007.
[13] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. Circuits and Systems-II, Exp. Briefs,* vol. 53, no. 12, pp. 1466-1470, 2006.
[14] J. H. Kim, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time singular systems with interval time-varying delay," *Automatica*, vol. 46, pp. 591-597, 2010.
[15] K. Lu, J. Qiu, and M. S. Mahmoud, "Robust passive filter design for uncertain singular stochastic Markov jump systems with mode-dependent time delays," *The 2nd International Conf. on Intelligent Control and Information Processing*, pp. 385-390, 2009.
[16] J. C. Lo and D. L. Wu, "Dissipative filtering for discrete fuzzy systems," *IEEE International Conf. on Fuzzy Systems*, pp. 361-365, 2009.
[17] C. J. Li, H. Y. Ai, and Y. F. Feng, "Dissipative filtering for linear discrete-time systems via LMI," *Chinese Control and Decision Conf.*, pp. 3866-3870, 2009.
[18] Z. Wu, J. Park, H. Su, and J. Chu, "Dissipativity analysis for singular systems with time-varying delays," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, pp. 4605-4613, 2011.
[19] S. Xu and J. Lam, "Reduced-order H_∞ filtering for singular systems," *Systems and Control Letters*, vol. 56, pp. 48-58, 2007.
[20] J. L. Rawson, C. S. Hsu, and H. Rho, "Reduced order H_∞ filters for discrete linear systems," *Proc. of Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, pp. 3311-3316, 1997.
[21] S. Xu and T. Chen, "Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems," *IEEE Trans. Signal Process.,* vol. 50, pp. 2998-3007, 2002.
[22] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA; SIAM, 1994.
[23] L. Dai, *Singular control Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
[24] E. M. N. Lopez, "Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete-time setting," Mathematical Problems in Engineering, vol. 6, pp. 599-616, 2005.
[25] M. C. de Oliverira, J. Bernussou, and C. Geromel, "A new discrete-time robust stability condition," *Systems and Control Letters*, vol. 37, pp. 261-265, 1999.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2010년~2011년 미국 조지아텍 방문연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학과 부교수.
Tel : 041-530-2352
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr

오 도 창 (吳 道 昌)
1991년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1997년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1997년 2월~1997년 8월 창원대학교 공과대학 국책교수. 2007년~2008년 미국 Univ. of Florida 방문교수. 1997년 8월~현재 건양대학교 전자정보공학과 교수.
Tel : 041-730-5180
E-mail : docoh@konyang.ac.kr