

시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템의 비약성 보장 비용 제어

논문

61-3-17

Non-fragile Guaranteed Cost Control of Uncertain Nonlinear Systems with Time-varying Delays in State and Control Input

김재만* · 최윤호** · 박진배†
(Jae Man Kim · Yoon Ho Choi · Jin Bae Park)

Abstract - In this paper, we present a non-fragile guaranteed cost control design method for uncertain nonlinear systems with time varying delays in state and control input, even though the controller gain is perturbed. The uncertain nonlinear term in the systems is norm bounded and the linear matrix inequality(LMI) optimization method is employed as a stability analysis of the systems. We design a robust controller and show the asymptotical stability of uncertain time-varying systems based on Lyapunov method. Also, we guarantee a specific level of performance of the systems. The simulations are carried out to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Non-fragile, Guaranteed cost control, Delay, Uncertain nonlinear systems, LMI

1. 서론

동적 시스템에서 시간 지연으로 인한 문제는 TCP 통신, 로봇 매니퓰레이터, 비행기 모델, 군집 제어 등과 같은 여러 분야에서 중요하게 고려하고 있는 사항이다. 시스템에서의 시간 지연은 원거리 통신으로 인한 물리적 거리, 데이터의 아날로그/디지털 변환, 또는 시스템이 갖는 고유의 특성 등 다양한 요인으로 인해 발생한다 [1]. 하지만 시간 지연은 시스템을 불안정하게 하며 시스템의 성능 및 상태를 예측하기 어렵게 만드는 단점이 있다. 따라서 시간 지연을 갖는 시스템을 안정하고 강인하게 하는 제어기 설계에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다 [2]-[15].

시간 지연을 갖는 시스템에 대한 안정성 보장 및 불확실성에 강인한 제어를 설계하기 위해서는 시스템의 현재 상태변수와 이전 상태변수를 모두 고려해야 한다. 선형행렬 부등식(Linear Matrix Inequality: LMI) 기법은 시간 지연을 갖는 선형 시스템에 대한 안정성 보장 및 불확실성에 강인한 제어기 설계 기법 중 하나이다. 선형행렬 부등식 기법을 이용하여 제어입력 [2],[3] 및 상태변수 [4],[5]에 시간 지연을 갖는 선형 동적시스템의 안정성 보장 증명이 각각 연구되었으며 제어입력 변수 및 상태변수에 모두 시변 시간 지연을 갖는 시스템에 대한 안정성 보장 증명도 연구되었다 [6]-[8].

시변 시간 지연을 갖는 시스템에서 고려해야 할 사항은 강인한 제어를 설계하는 것뿐만 아니라 시스템의 성능을

보장하는 것도 중요하다. 이를 위해 시간 지연을 갖는 시스템에 대한 보장 비용(guaranteed cost) 제어에 대한 연구가 이루어졌다 [9]-[13]. 보장 비용 제어는 시간 지연을 갖는 시스템을 안정화시키며 시변 시간 지연으로 인해 불확실한 성능을 보이는 시스템에 대해 비용함수의 상한값을 보장한다. 시간 지연을 갖는 시스템에 대한 보장 비용 제어를 설계하는 방법은 연속시간 [9]-[11] 및 이산시간 [12],[13]에서 연구가 이루어졌다.

시변 시간 지연을 갖는 시스템에 대한 보장비용 제어와 더불어 비약성 제어(non-fragile control) 문제 또한 최근에 주요한 문제로 떠오르고 있다. 보장 비용 제어를 통해 시변 시간 지연을 갖는 시스템을 안정화시키는 강인한 제어기 설계는 가능하지만 제어기 시스템의 불안정성으로 인한 제어기 이득의 오차로 인해 정확한 제어가 어려울 수 있다. Keel은 [16]에서 방법 등을 이용한 최적 제어 및 강인 제어도 제어기 상수의 변동으로 인해 시스템이 불안정해짐을 보였다. Lien은 [17]에서 상태변수와 제어입력에 시변 시간 지연을 갖는 중립(neutral) 시스템에 대한 비약성 보장 비용 제어에 대한 문제를 다루었으며, Xie는 상태변수에 시변 시간 지연을 갖는 비선형 시스템에 대한 비약성 보장 비용 제어 방법을 제시하였다 [18]. 하지만 현재까지 상태변수와 제어입력에 시변 시간 지연을 갖는 비선형 시스템에 대한 비약성 보장 비용 제어에 대한 연구는 미비한 상태이다.

본 논문에서는 상태변수와 제어입력에 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대한 비약성 보장 비용 제어방법을 제시한다. 동적 시스템의 불확실한 비선형 함수는 norm 경계를 갖으며 선형행렬 부등식을 통해 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대한 안정성을 보인다. 강인한 제어기뿐만 아니라 선형행렬 부등식 최적화 방법을 통해 비용함수의 상한값을 보장한다.

본 논문에서 사용하는 표기법을 정리하면 다음과 같다. 은 차 유클리드 공간(Euclidean space)이고 은 행렬이다.

* 정 회 원 : 연세대 공대 전기전자공학과 박사과정

** 정 회 원 : 경기대 공대 전자공학과 교수

† 교신저자, 종신회원 : 연세대 공대 전기전자공학과 교수,

E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr

접수일자 : 2011년 12월 27일

최종완료 : 2012년 2월 6일

는 적절한 차원을 갖는 단위행렬이며 \bar{P} 는 대칭 정부호 행렬 (symmetric positive definite matrix)이다. \bar{P} 는 블록 대각행렬이며 \bar{P} 는 구간 \bar{P} 에서 연속시간 함수의 바나흐 공간(Banach space)을 나타낸다.

2. 문제 설정

본 논문에서는 식 (1)과 같은 상태변수와 제어 입력변수에 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-h_1(t)) + Bu(t) + B_d u(t-h_2(t)) \\ &\quad + f(x(t), x(t-h_1(t)), u(t), u(t-h_2(t))), \quad t > 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력변수이며 $A \in R^{n \times n}, A_d \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, B_d \in R^{n \times m}$ 는 기지의 시스템 행렬 값들이다. 또한 $\phi(t) \in C_{n,h}$ 는 상태변수의 초기조건이다. 상태변수와 제어 입력변수의 시변 시간 지연을 나타내는 $h_1(t)$ 와 $h_2(t)$ 는 각각 다음 조건을 만족한다.

$$0 \leq h_i(t) \leq \bar{h}_i < \infty, \quad \dot{h}_i(t) \leq d_i < 1, \quad i=1,2. \quad (2)$$

가정 1: 불확실성을 갖는 비선형 함수 $f(\cdot)$ 의 제약조건은 식 (3)과 같이 정의된다.

$$f^T f \leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1(t)) & x^T(t-h_2(t)) \end{bmatrix} H \times \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1(t)) & x^T(t-h_2(t)) \end{bmatrix}^T, \quad (3)$$

여기서 $H = \text{diag}\{H_0^T H_0, H_1^T H_1, H_2^T H_2\} > 0$ 이다.

일반적으로 상태 피드백 제어기는 $u(t) = Kx(t)$ 로 표현하지만 시스템의 불안정성으로 인한 제어기 이득의 오차를 불확실성으로 나타내면 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u(t) = (K + \Delta K)x(t), \quad (4)$$

여기서 K 는 제어기의 공칭 이득(nominal gain)이고, ΔK 는 이득 변화량(gain variation)이다.

식 (1)을 이용하여 식 (5)와 같은 비용함수를 고려하자.

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t)Q_1 x(t) + [u^T(t)K]Q_2 [K^T u(t)]\} dt, \quad (5)$$

여기서 $Q_1 \in R^{n \times n}$ 과 $Q_2 \in R^{m \times m}$ 는 양의 정부호 대칭행렬이다.

제어기 이득값의 불확실성은 식 (6)과 같다.

$$\Delta K = DF(t)E, \quad F^T(t)F(t) \leq I, \quad (6)$$

여기서 D 와 E 는 기지의 행렬이며, $F(t)$ 는 불확실한 행렬이다.

본 논문에서는 상태 피드백 제어기 설계를 통해 시스템이 점근적으로 안정함을 보이며 비용함수의 상한값을 최소화할 수 있는 방법을 제시한다.

정의 1: 상태 피드백 제어기 (4)는 불확실한 비선형 시스템 (1)이 점근적으로 안정하며 ΔK 가 (6)의 조건을 만족하고 또한 $J \leq \mathcal{J}$ 를 만족하는 \mathcal{J} 의 상한값이 존재하면, 비약성 보장 비용 제어기라 하며 \mathcal{J} 는 보장 비용 (guaranteed cost)이라 한다.

보조정리 1: 행렬 D_1, E_1, F_1 이 존재하고 행렬 F_1 은 $F_1^T F_1 \leq I$ 을 만족한다고 가정하자. $\delta D_1 D_1^T + \delta^{-1} E_1^T E_1 < 0$ 을 만족하는 $\delta > 0$ 이 존재한다면 식 (7)의 부등식이 성립한다.

$$D_1 F_1 E_1 + D_1^T F_1^T E_1^T < 0. \quad (7)$$

보조정리 2: 벡터 $a \in R^{n_a}, b \in R^{n_b}$ 와 행렬 $N \in R^{n_a \times n_b}$ 이 존재하고 $\begin{bmatrix} Z & Y \\ \star & R \end{bmatrix} \geq 0$ 을 만족하는 임의의 행렬 $Z \in R^{n_a \times n_a}, Y \in R^{n_a \times n_b}, R \in R^{n_b \times n_b}$ 이 존재하면 식 (8)의 부등식이 성립한다.

$$-2a^T N b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z & Y & -M \\ \star & R & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (8)$$

보조정리 3(Schur 여수정리): $\Phi_1 = \Phi_1^T, \Phi_2 = \Phi_2^T > 0$ 을 만족하는 대칭 상수 행렬 Φ_1, Φ_2, Φ_3 이 주어지고, $\Phi_1 + \Phi_3^T \Phi_2^{-1} \Phi_3 < 0$ 이면 식 (9)의 부등식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_3^T \\ \Phi_3 & -\Phi_2 \end{bmatrix} < 0, \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} -\Phi_2 & \Phi_3^T \\ \Phi_3 & \Phi_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \delta > 0. \quad (9)$$

3. 비약성 보장 제어기 설계

본 절에서는 비약성 보장 비용 제어 방법을 통해 상태변수와 제어입력에 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대한 안정도 및 제어기 설계 방법을 제시한다. 상태 피드백 제어기 (4)를 시스템 (1)에 적용하면 식 (10)이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + B(K + \Delta K) + A_d + B_d(K + \Delta K)]x(t) - A_d \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &\quad - B_d(K + \Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t \dot{x}(s) ds + f, \quad t > 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (10)$$

적분 구간의 상태변수 미분값 $\dot{x}(t)$ 을 식 (1)을 통해 대입하면 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A+B(K+\Delta K)+A_d+B_d(K+\Delta K)]x(t) \\ &\quad -A_d \int_{t-h_1(t)}^t [(A+B(K+\Delta K))x(s)+A_d x(s-h_1(s)) \\ &\quad +B_d(K+\Delta K)x(s-h_2(s))+f]ds \\ &\quad -B_d(K+\Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t [(A+B(K+\Delta K))x(s) \\ &\quad +A_d x(s-h_1(s))+B_d(K+\Delta K)x(s-h_2(s))+f]ds+f, \quad t>0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned} \tag{11}$$

정리 1: 식(12)의 선형행렬 부등식을 만족하는 양의 정부호 행렬 $P, S_1, S_2, R_1, R_2, Z_1, Z_2$ 와 임의의 행렬 Y_1, Y_2 , 양수 δ_1 이 존재하면, 시변 시간 지연 특성을 갖는 시스템 (10)은 점근적으로 안정하다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \star & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \star & \star & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \star & \star & \star & \Psi_{44} \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

여기서 각각의 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= (A+B(K+\Delta K))^T P + P(A+B(K+\Delta K)) \\ &\quad + (A+B(K+\Delta K))^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) (A+B(K+\Delta K)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \{Y_i + Y_i^T + \bar{h}_i Z_i\} + \delta_1^{-1} H_0^T H_0 + (S_1 + S_2) + Q_1 \\ &\quad + (K+\Delta K)^T K Q_2 K^T (K+\Delta K), \\ \Psi_{12} &= (A+B(K+\Delta K))^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) A_d + P A_d - Y_1, \\ \Psi_{13} &= (A+B(K+\Delta K))^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) B_d (K+\Delta K) + P B_d (K+\Delta K) - Y_2, \\ \Psi_{14} &= (A+B(K+\Delta K))^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) + P, \\ \Psi_{22} &= A_d^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) A_d + \delta_1^{-1} H \\ \Psi_{23} &= A_d^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) B_d (K+\Delta K), \\ \Psi_{24} &= A_d^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2), \\ \Psi_{33} &= (K+\Delta K)^T B_d^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) B_d (K+\Delta K) \\ &\quad + \delta_1^{-1} H_2^T H_2 - (1-d_2) S_2, \\ \Psi_{34} &= (K+\Delta K)^T B_d^T (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2), \\ \Psi_{44} &= (\bar{h}_1 R_1 + \bar{h}_2 R_2) - \delta_1^{-1} I. \end{aligned} \tag{13}$$

또한 식 (5)의 비용함수는 식 (14)를 만족한다.

$$\begin{aligned} J &\leq V(0) \\ &= x^T(0)Px(0) + \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 x^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{h_i(t)}^0 x^T(p)S_i x(p)dp. \\ &= J^*. \end{aligned} \tag{14}$$

증명: 시스템의 안정도 판별을 위해 적절한 리아푸노프 (Lyapunov) 함수를 식 (15)와 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \\ V_1(t) &= x^T(t)Px(t), \\ V_2(t) &= \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 d_i \int_0^t \int_{t-h_i(t)}^t x^T(s)R_i \dot{x}(s)dsdt \\ V_3(t) &= \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i(t)}^t x^T(p)S_i x(p)dp. \end{aligned} \tag{15}$$

시스템의 점근적 안정도를 증명하기 위해, 식 (1)을 이용하여 함수 $V_1(t)$ 을 시간에 대해 미분하면 식 (16)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= ((A+B(K+\Delta K)+A_d+B_d(K+\Delta K))x(t) - A_d \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \\ &\quad - B_d(K+\Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t \dot{x}(s)ds + f)^T Px(t) \\ &\quad + x^T(t)P((A+B(K+\Delta K)+A_d+B_d(K+\Delta K))x(t) \\ &\quad - A_d \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds - B_d(K+\Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t \dot{x}(s)ds + f) \\ &= x^T((A+B(K+\Delta K)+A_d+B_d(K+\Delta K))^T P \\ &\quad + P(A+B(K+\Delta K)+A_d+B_d(K+\Delta K)))x(t) \\ &\quad - 2x^T(t)P(A_d \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds + B_d(K+\Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t \dot{x}(s)ds) \\ &\quad + f^T Px(t) + x^T(t)Pf. \end{aligned} \tag{16}$$

보조정리 2를 이용하여 식 (16)의 적분구간에 있는 상태 방정식은 식 (17), (18)과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} &-2x^T(t)PA_d \int_{t-h_1(t)}^t \dot{x}(s)ds \\ &= -2 \int_{t-h_1(t)}^t x^T(t)PA_d \dot{x}(s)ds \\ &\leq \int_{t-h_1(t)}^t [x^T(t)x^T(s)] \begin{bmatrix} Z_1 & Y_1 - PA_d \\ Y^T - A^T P & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \\ &\leq x^T(t)(Y^T - A^T P + Y_1 - PA_d)x(t) + \int_{t-h_1(t)}^t x^T(s)R_1 \dot{x}(s)ds \\ &\quad - x^T(t-h_1(t))(Y_1^T - A_d^T P)x(t) - x^T(t)(Y_1 - PA_d)x(t-h_1(t)) \\ &\quad + \bar{h}_1 x^T(t)Z_1 x(t), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &-2x^T(t)PB_d(K+\Delta K) \int_{t-h_2(t)}^t \dot{x}(s)ds \\ &= -2 \int_{t-h_2(t)}^t x^T(t)PB_d(K+\Delta K)\dot{x}(s)ds \\ &\leq \int_{t-h_2(t)}^t [x^T(t)x^T(s)] \begin{bmatrix} Z_2 & Y \\ Y^T R_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \\ &\leq x^T(t)(Y^T - (B_d(K+\Delta K))^T P + Y_2 - PB_d(K+\Delta K))x(t) \\ &\quad + \int_{t-h_2(t)}^t x^T(s)R_2 \dot{x}(s)ds - x^T(t-h_2(t))(Y_2^T - (B_d(K+\Delta K))^T P)x(t) \\ &\quad - x^T(t)(Y_2 - PB_d(K+\Delta K))x(t-h_2(t)) + \bar{h}_2 x^T(t)Z_2 x(t), \end{aligned} \tag{18}$$

여기서

$$Y = Y_2 - PB_d(K+\Delta K). \tag{19}$$

가정 1을 이용하여 식 (17)과 (18)를 식 (16)에 대입하면 $\dot{V}_1(t)$ 의 미분은 식 (20)과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq x^T(t)[(A+B(K+\Delta K))^T P + P(A+B(K+\Delta K)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i Z_i + Y_i + Y_i^T]x(t) - x^T(t)(Y_1 - PA_d)x(t-h_1(t)) \\ &\quad - x^T(t)(Y_2 - PB_d(K+\Delta K))x(t-h_2(t)) \\ &\quad - x^T(t-h_1(t))(Y_1^T - A_d^T P)x(t) \\ &\quad - x^T(t-h_2(t))(Y_2^T - (B_d(K+\Delta K))^T P)x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i(t)}^t x^T(s)R_i \dot{x}(s)ds - \delta^{-1} f^T f + x^T(t)Pf + f^T Px(t) \\ &\quad + \delta_1^{-1} [x^T(t)x^T(t-h_1(t))x^T(t-h_2(t))] \\ &\quad \times H[x^T(t)x^T(t-h_1(t))x^T(t-h_2(t))]. \end{aligned} \tag{20}$$

위와 동일하게 $V_2(t)$ 와 $V_3(t)$ 의 미분을 계산하면 식 (21)과 (22)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t+\theta)R_i\dot{x}(t+\theta)d\theta \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 d_i \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \\ &= \sum_{i=1}^2 h_i(t)\dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) - \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \\ &\quad - (d_i - \dot{h}_i(t)) \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i \dot{x}^T(t)R_i\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \bar{h}_i [(A+B(K+\Delta K))x(t) + A_d x(t-h_1(t)) \\ &\quad + B_d(K+\Delta K)x(t-h_2(t)) + f]^T R_i [(A+B(K+\Delta K))x(t) \\ &\quad + A_d x(t-h_1(t)) + B_d(K+\Delta K)x(t-h_2(t)) + f] \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \int_{t-h_i(t)}^t \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)ds, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= \sum_{i=1}^2 x^T(t)S_i x(t) - \sum_{i=1}^2 (1-\dot{h}_i(t))x^T(t-h_i(t))S_i x(t-h_i(t)) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 x^T(t)S_i x(t) - \sum_{i=1}^2 (1-d_i)x^T(t-h_i(t))S_i x(t-h_i(t)). \end{aligned} \tag{22}$$

식 (16)-(22)을 정리하면 리아푸노프 함수의 미분은 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \\ &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_2(t)) \\ f \end{bmatrix}^T \Gamma \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h_1(t)) \\ x(t-h_2(t)) \\ f \end{bmatrix} \\ &\quad - x^T(t)[Q_1 + (K+\Delta K)^T K Q_2 K^T (K+\Delta K)]x(t). \end{aligned} \tag{23}$$

따라서 부등식 행렬 (12)를 통해 식 (24)의 부등식이 성립됨을 알 수 된다.

$$\dot{V}(t) < -x^T(t)[Q_1 + (K+\Delta K)^T K Q_2 K^T (K+\Delta K)]x(t) < 0. \tag{24}$$

주어진 행렬 Q_1, Q_2 가 대칭 정부호 행렬이므로 시스템 (10)은 점근적으로 안정하며 식 (24)로부터 부등식 (25)를 구할 수 있다.

$$x^T(t)[Q_1 + (K+\Delta K)^T K Q_2 K^T (K+\Delta K)]x(t) < -\dot{V}(t). \tag{25}$$

식 (25)의 양변을 0부터 ∞ 까지 적분하면, 식 (26)과 같이 된다.

$$\int_0^\infty x^T(t)[Q_1 + (K+\Delta K)^T K Q_2 K^T (K+\Delta K)]x(t) < V(0) - V(\infty). \tag{26}$$

여기서 $V(0)$ 와 $V(\infty)$ 는 각각 식 (27)과 (28)로 계산된다.

$$\begin{aligned} V(0) &= x^T(0)Px(0) + \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)dsd\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{h_i(t)}^0 x^T(p)S_i x(p)dp, \\ V(\infty) &= x^T(\infty)Px(\infty) + \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\infty+\theta}^\infty \dot{x}^T(s)R_i\dot{x}(s)dsd\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{\infty+h_i(t)}^\infty x^T(p)S_i x(p)dp. \end{aligned} \tag{27}$$

식 (27)과 (28)을 식 (26)에 대입하면 식 (29)과 같은 시스템의 비용함수를 얻을 수 있다.

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t)Q_1 x(t) + [u^T(t)K]Q_2 [K^T u(t)]\} dt \leq V(0) = J^*. \tag{29}$$

정리 1에서 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템의 점근적 안정성 증명을 보였으며, 다음에서는 비약성 보장 비용 제어기의 충분조건을 보인다.

정리 2: 시변 시간 지연 (2)와 비용함수 (5)를 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대하여, 식 (30)의 선형행렬 부등식을 만족하는 양의 정부호 행렬 $L, U_1, U_2, Z_1, Z_2, R_1, R_2$, 양의 실수 δ_1, δ_2 와 행렬 W, M, V, J, Y_1, Y_2 이 존재한다고 하자.

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & C_1 & G^T & G^T & \delta_2 BD & C_4 & C_5 \\ \star & D_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\overline{h}^{-1} R^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\overline{h}_2^{-1} R_2^{-1} & C_3 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\delta_2 I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\delta_1 I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & D_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{30}$$

여기서 각각의 변수는 식 (31)과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= G + G^T, \quad G = AL + BW, L = P^{-1}, \\ V &= KP^{-1}, \quad W = K^T KP^{-1}, \quad U_i = S_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \\ C_1 &= [A_d U_1 \quad B_d K U_2 \quad \delta_1]^T \\ C_2 &= [A_d U_1 \quad B_d K U_2 \quad \delta_1]^T \\ C_3 &= [\delta_2 BD \quad \delta_2 BD \quad \delta_2 J]^T \\ C_4 &= [H_0 L \quad H_1 U_1 \quad H_2 U_2]^T \\ C_5 &= [W^T \quad (EL)^T \quad L^T \quad \dots \quad L^T] \\ D_1 &= \text{diag} \{ (d_1 - 1)U_1, (d_2 - 1)U_2, -\delta_1 \}, \\ D_2 &= \text{diag} \{ -R^{-1}, -\delta_2 I, -\overline{h}_1^{-1} Z_1^{-1}, -\overline{h}_2^{-1} Z_2^{-1}, -U_1, \\ &\quad -U_2, -Q_1^{-1}, -Y_1^{-1} - (Y_1^{-1})^T, -Y_2^{-1} - (Y_2^{-1})^T \}. \end{aligned} \tag{31}$$

그러면 비약성 보장 제어기는 식 (32)와 같게 된다.

$$u(t) = VL^{-1}x(t), \tag{32}$$

이때 시스템의 비용함수는 $J \leq J^*$ 를 만족하며, J^* 는 식 (29)과 같다.

증명: 보조정리 1을 이용하여 $\Delta K = DF(t)E$ 를 식 (12)에 대입하고 Γ 의 양변에 $diag\{P^{-1}, S_1^{-1}, S_2^{-1}, \delta_1 I\}$ 와 $diag\{(P^{-1})^T, (S_1^{-1})^T, (S_2^{-1})^T, (\delta_1 I)^T\}$ 를 곱하면 보조정리 3에 의해 식 (30)과 같은 부등식을 얻을 수 있다. ■

위의 결과를 통해 비용함수의 상한값을 구할 수 있지만 상한값의 최소값은 알 수 없다. 시스템의 최적 비약성 보장 비용함수는 정리 3을 통해 계산될 수 있다.

정리 3: 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대하여 식 (33)의 선형행렬 부등식을 만족하면

$$\begin{aligned} \text{(a) (30),} & \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} -\xi & x^T(0) \\ x(0) & -L \end{bmatrix} < 0, \\ \text{(c) } \begin{bmatrix} -\Theta_i & W_2^T \\ W_2 & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, & \quad \text{(d) } \begin{bmatrix} -\Pi_i & W_1^T \\ W_1 & -S_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i=1,2, \end{aligned} \tag{33}$$

비용함수의 상한값은 식 (34)와 같다.

$$J^* \leq \xi + \text{trace}(\Theta_1 + \Theta_2 + \Pi_1 + \Pi_2), \tag{34}$$

여기서

$$\begin{aligned} W_1^T W_1 &= \int_{-h_i(t)}^0 x(p)x^T(p)dp, \\ W_2^T W_2 &= \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}(s)x^T(s)dsd\theta. \end{aligned} \tag{35}$$

증명: 정리 2에 의해 식 (33)의 (a)는 정해지며 Schur 여수정리를 통해 식 (33)의 (b)-(d)는 식 (36)과 동일한 부등식이다.

$$\begin{aligned} x^T(0)L^{-1}x(0) &< \xi, \\ W_2^T R_i W_2 &< \Theta_i, \\ W_1^T S_i W_1 &< \Pi_i, \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{36}$$

또한 식 (35)를 이용하여 식 (37)과 (38)을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta \\ &= \text{trace} \left(\int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 x^T(s)R_i x(s)dsd\theta \right) \\ &= \text{trace}(W_2^T R_i W_2) < \text{trace}(\Theta_i), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 x^T(p)R_i x(p)dp \\ &= \text{trace} \left(\int_{-h_i(t)}^0 x^T(p)S_i x(p)dp \right) \\ &= \text{trace}(W_1^T R_i W_1) < \text{trace}(\Pi_i). \end{aligned} \tag{38}$$

식 (36)-(38)을 이용하여 식 (29)의 비용함수 상한값을 계산하면 식 (39)와 같이 정해진다.

$$\begin{aligned} J^* &= x^T(0)Px(0) + \sum_{i=1}^2 \int_{-h_i(t)}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{h_i(t)}^0 x^T(p)S_i x(p)dp \\ &\leq \xi + \text{trace}(\Theta_1 + \Theta_2 + \Pi_1 + \Pi_2). \end{aligned} \tag{39}$$

즉, 식 (39)의 최소화는 시스템의 비용함수의 최소화를 의미한다. ■

4. 모의실험

본 논문에서 제안한 제어기의 타당성을 검증하기 위하여 식 (1)과 같은 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템을 고려하여 모의실험을 한다. 비선형 시스템의 변수 값들은 식 (40)과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ H_0 = H_1 = H_2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D = 0.2, E = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\ h_1 = 0.3, h_2 = 0.2, d_1 = d_2 = 0.2, \\ x(t) &= [e^{-0.5t} \ e^{-0.5t}]^T, \quad -h \leq t \leq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

비용함수의 가중 행렬은 각각 $Q_1 = I, Q_2 = 0.5I$ 이다. 다양한 조건에서 제안한 방법의 성능을 확인하기 위해 제어기의 불확실성 행렬 ΔK , 시간 지연의 미분값 d_1, d_2 의 변화에 따른 상태 변수값을 살펴본다.

먼저, 상태변수 및 제어 입력변수의 시간 지연 미분값에 따른 시스템의 안정도를 분석하기 위해 서로 다른 크기의 시간 지연 미분값 $d_1(t)$ 와 $d_2(t)$ 에 대해 제어기 설계 및 비용함수를 비교한다. 두가지 조건에 대해 선형행렬 부등식 시뮬레이터를 이용하여 보장 비용 제어기를 설계하고 비용함수의 상한값을 계산하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{조건 1:} \\ d=0 &\Rightarrow u(t) = [-21.8354 \ -12.6023]x(t), \quad J^* = 19.8435 \\ \text{조건 2:} \\ d=0.2 &\Rightarrow u(t) = [-25.9536 \ -13.4454]x(t), \quad J^* = 21.1557 \end{aligned}$$

제안한 방법의 우수성을 보이기 위해 [18]의 실험결과와 비교하였다. 시간지연 미분값이 $d=0.2$ 일 때 [18]에서는 비용함수의 상한값 $J^* = 26.5491$ 이 나왔으나 본 연구에서는 동일한 조건에서 비용함수의 상한값이 $J^* = 21.1557$ 으로 보다 완화된 결과를 얻을 수 있었다. 시간에 따른 상태변수의 궤적은 그림 1과 같으며, 상태변수 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 는 모두 0으로 수렴함을 볼 수 있다.

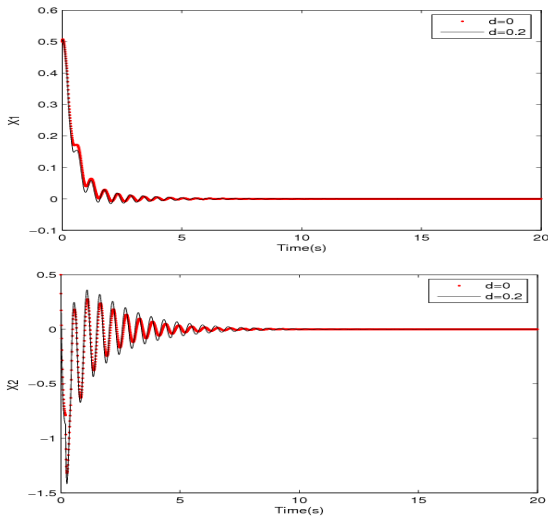


그림 1 시간 지연 미분값의 조건에 따른 상태변수 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 궤적

Fig. 1 Trajectory of the states $x_1(t)$ and $x_2(t)$ according to the derivative of the time delay

두 번째 모의실험에서는 제어기의 불확실성 행렬 ΔK 에 따른 시스템의 안정도를 분석하기 위해 서로 다른 크기의 행렬 D 에 대하여 제어기 설계 및 비용함수의 크기를 비교한다. 두가지 조건에 대하여 선형행렬 부등식 시뮬레이터를 이용하여 보장 비용 제어기를 설계하고 비용함수의 상한값을 계산하면 각각 다음과 같다.

조건 1:

$$D=0.2 \Rightarrow u(t) = [-21.3164 - 13.3591]x(t), \quad J^* = 21.1557$$

조건 2:

$$D=10 \Rightarrow u(t) = [-43.3517 - 17.6547]x(t), \quad J^* = 54.4627$$

제어기 이득의 불확실성은 제어 이득 및 비용함수의 크기에 직접적으로 연관되어 있음을 볼 수 있다. 행렬 $D=0.2$ 일 때 [18]에서는 비용함수의 상한값 $J^* = 26.5491$ 이 나왔으나 본 연구에서는 동일한 조건에서 비용함수의 상한값이 $J^* = 21.1557$ 으로 보다 완화된 결과를 얻을 수 있었다. 시간에 따른 상태변수의 궤적은 그림 2와 같으며, 상태변수 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 는 모두 0으로 수렴한다.

4. 결 론

본 논문에서는 상태변수와 제어입력에 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템에 대한 비약성 보장 비용 제어 방법을 제시하였다. 리아푸노프 방정식을 이용하여 시변 시간 지연을 갖는 불확실한 비선형 시스템의 안정도를 증명하였으며 선형 행렬 부등식을 통해 최적 제어기를 설계하였다. 또한 비용함수의 상한값을 구하여 불확실한 비선형 시스템에 대한 성능을 보장하였다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 방법의 효용성을 위해 모의실험 결과를 제시하였으며, 제안한 제어 시스템의 우수한 성능을 검증하였다.

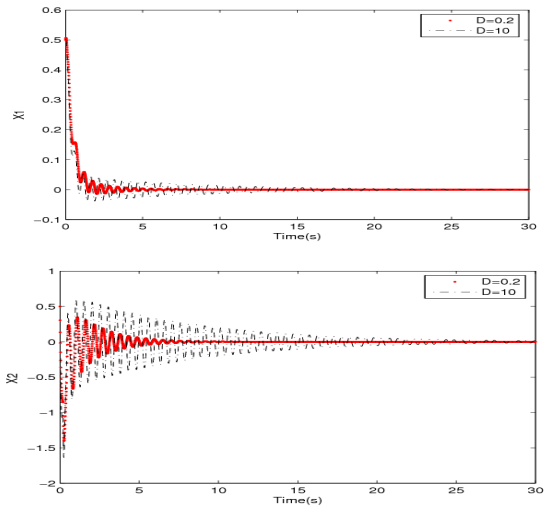


그림 2 제어기 이득의 불확실성에 따른 상태변수 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 궤적

Fig. 2 Trajectory of the states $x_1(t)$ and $x_2(t)$ according to the uncertain gain of the controller

감사의 글

본 연구는 2011년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지기술연구원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No.20103020070070)

참 고 문 헌

- [1] J. P. Richard, "Time-delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems", *Automatica*, vol. 39, no. 10, pp. 1667-1694, 2003.
- [2] L. Li and X. Liu, "New approach on Robust Stability for Uncertain T-S Fuzzy Systems with State and Input Delays", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 40, no. 5, pp. 2329-2339, 2009.
- [3] W. Chen and W. Zheng, "On Improved Robust Stabilization of Uncertain Systems with Unknown Input Delay", *Automatica*, vol. 42, no. 6, pp. 1067-1072, 2006.
- [4] O. M. Kwon and J. H. Park, "Exponential Stability of Uncertain Dynamic Systems Including State Delay", *Applied Mathematics Letters*, vol. 19, no. 9, pp. 901-907, 2006.
- [5] Z. Y. Feng, L. Xu, M. Wu and Y. He, "Delay-dependent Robust Stability and Stabilisation of Uncertain Two-dimensional Discrete Systems with Time-varying Delays", *IET Control Theory and Applications*, vol. 4, no. 10, pp. 1959-1917, 2010.
- [6] X. Zhang, M. Wu, J. She and Y. He, "Delay-dependent Stabilization of Linear Systems with Time-varying State and Input Delays", *Automatica*, vol. 41, no. 8, pp. 1405-1412, 2005.

- [7] B. Chen, H. Li, P. Shi, C. Lin and Q. Zhou, "Delay-dependent stability analysis and controller synthesis for Markovian jump systems with state and input delays", *Information Science*, vol. 179, no. 16, pp. 2851-2860, 2009
- [8] M. Zribi and M. S. Mahmoud, "H ∞ Control Design for Systems with Multiple Delays", *Computer and Electrical Engineering*, vol. 25, no. 6, pp. 451-475, 1999.
- [9] H. Mukaidani, "An LMI Approach to Guaranteed Cost Control for Uncertain Delay Systems", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 50, no. 6, pp. 795-800, 2003.
- [10] W. A. Zhang and L. Yu, "Delay-dependent Guaranteed Cost Control for Uncertain Neutral Systems with Nonlinear Parameter Perturbations", vol. 1, no. 3, pp. 675-681, 2007
- [11] O. I. Kosmidou and Y. S. Boutalis, "A Linear Matrix Inequality Approach for Guaranteed Cost Control of Systems with State and Input Delays", *IEEE Trans. System, Man, and Cyber.*, vol. 36, no. 5, pp. 936-942, 2006.
- [12] W. Chen, J. Xu and Z. Guan, "Guaranteed Cost Control for Uncertain Markovian Jump Systems with Mode-dependent Delays", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 48, no. 12, pp. 2270-2277, 2003.
- [13] W. Chen, Z. Guan and X. Lu, "Delay-dependent Guaranteed Cost Control for Uncertain Discrete-time Systems with Both State and Input Delays", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 341, no. 5, pp. 419-430, 2004.
- [14] H. Gassara, A. E. Hajjaji and M. Chaabane, "Observer-based Robust H ∞ Reliable Control for Uncertain T-S Fuzzy Systems with State Time Delay", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 6, pp. 1027-1040, 2010.
- [15] Y. Xia, M. Fu, P. Shi and M. Wang, "Robust Sliding Mode Control for Uncertain Discrete-time Systems with Time Delay", vol. 4, no. 4, pp. 613-624, 2010.
- [16] L. H. Keel and P. Bhattacharyya, "Robust, Fragile or Optimal?", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1098-1105, 1997.
- [17] C. H. Lien, "Non-fragile Guaranteed Cost Control for Uncertain Neutral Dynamic Systems with Time-varying Delays in State and Control Input", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 31, no. 4, pp. 889-899, 2007.
- [18] N. Xie and G. Y. Tang, "Delay-dependent Non-fragile Guaranteed Cost Control for Nonlinear Time-delay Systems", *Nonlinear Analysis*, vol. 64, no. 9, pp. 2084-2097, 2006.

저 자 소 개



김재만 (金宰滿)

2005년 연세대학교 전기전자공학과(공학사), 2007년 연세대학교 전기전자공학과(공학석사), 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 시간 지연, 비선형 제어, 상태일치 제어.

E-mail : utopiaro@yonsei.ac.kr



최윤호 (崔允浩)

1980년 연세대학교 전기공학과(공학사), 1982년 연세대학교 전기공학과(공학석사), 1991년 연세대학교 전기공학과(공학박사). 1993년~현재 경기대학교 전자공학과 교수. 관심분야는 비선형 적응 제어, 지능 제어, 군집 제어, 로보틱스.

E-mail : yhchoi@kyonggi.ac.kr



박진배 (朴珍培)

1977년 연세대학교 전기공학과 졸업. 1990년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사). 1990-1991년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수. 1992-현재 연세대학교 전기전자공학과

교수.

2012-현재 제어·로봇 시스템학회 차기 회장.

Tel : 02-2123-2773

E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr