

루프-스타(Loop-Star) 기저 함수와 전제 조건(Preconditioner)을 이용한 모멘트법의 계산 효율 향상에 대한 연구

A Study for Improving Computational Efficiency in Method of Moments with Loop-Star Basis Functions and Preconditioner

염재현 · 박현규 · 이현석 · 진희철 · 김효태 · 김경태

Jae-Hyun Yeom · Hyeon-Gyu Park · Hyun-Suck Lee · Huicheol Chin ·
Hyo-Tae Kim · Kyung-Tae Kim

요 약

본 논문에서는 전계 적분 방정식 (Electric Field Integral Equation: EFIE)을 사용하는 모멘트 법의 저주파 오차 (low frequency breakdown) 문제를 해결하기 위한 방법으로 루프-스타(loop-star) 기저 함수를 사용하였다. 또한, 모멘트 법의 해를 계산하기 위하여 conjugate gradient method(CGM)과 같은 반복법을 적용할 경우 반복 횟수를 줄이기 위한 기법으로 p-Type Multiplicative Schwarz preconditioner(pMUS)를 이용하였다. 헬름홀츠 정리(Helmholtz theorem)에 기반한 루프-스타(loop-star) 기저 함수와 주파수 정규화 기법을 이용하여 전계 적분 방정식에서 Rao-Wilton-Glisson(RWG) 기저 함수를 사용하였을 때 발생하는 저주파 오차(low frequency instability) 문제를 해결할 수 있다. 하지만, RWG 기저 함수를 비발산(solenoidal) 성분과 비회전성(irrotational) 성분으로 분해함으로써 발생하는 행렬 방정식의 높은 조건 수(condition number)로 인하여 CGM과 같은 반복법을 사용할 경우 해를 계산하기 위하여 많은 반복 횟수가 요구된다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위한 방안으로 pMUS 전제 조건 기법을 이용하여 CGM의 반복 횟수를 줄였다. 수치 해석 결과, pMUS와 같은 희소성(sparsity)을 가진 블록 대각 전제 조건(Block Diagonal Preconditioner: BDP)과 비교하였을 때 pMUS는 BDP보다 빠르게 해를 계산할 수 있다.

Abstract

This paper uses loop-star basis functions to overcome the low frequency breakdown problem in method of moments (MoM) based on electric field integral equation(EFIE). In addition, p-Type Multiplicative Schwarz preconditioner (p-MUS) technique is employed to reduce the number of iterations required for the conjugate gradient method(CGM). Low frequency instability with Rao Wilton Glisson(RWG) basis functions in EFIE can be resolved using loop-start basis functions and frequency normalized techniques. However, loop-star basis functions, consisting of irrotational and solenoidal components of RWG basis functions, require a large number of iterations to calculate a solution through iterative methods, such as conjugate gradient method(CGM), due to high condition number. To circumvent this problem, in this paper, the pMUS preconditioner technique is proposed to reduce the number of iterations in CGM. Simulation results show that pMUS preconditioner is much faster than block diagonal preconditioner(BDP) when the sparsity of pMUS is the same as that of BDP.

Key words : Electromagnetic Scattering, Loop-Star Basis Function, Preconditioner Matrix, Incomplete Helmholtz Theorem

「이 논문은 2011학년도 두뇌한국21 사업에 의하여 지원되었음.」

포항공과대학교 전자전기공학부(Department of Electronic and Electrical Engineering, Pohang University of Science and Technology)

· 논문 번호 : 20111004-113

· 교신저자 : 김경태(e-mail : kkt@postech.ac.kr)

· 심사일자 : 2011년 12월 1일 · 수정완료일자 : 2011년 12월 29일

I. 서 론

반세기 전부터 전자기 수치 해석 기법인 모멘트 법(Method of Moments)은 많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다^{[1]~[3]}. 모멘트 법은 전자기 산란, 방사 문제를 계산하는데 있어 다른 수치 해석 기법들보다 정확한 해를 보장하는 장점이 있다. 반면, 그린함수로 인하여 희소 행렬(sparse matrix)이 아니므로 컴퓨터 메모리를 많이 요구하는 단점이 존재한다.

모멘트 법은 표면 적분 방정식(Surface Integral Equation: SIE), 체적 적분 방정식(Volume Integral Equation: VIE)을 행렬 방정식으로 변환하여 구조물의 표면 또는 체적에서 유기된 등가 전류를 계산하여 산란 또는 방사 필드를 계산한다^[4]. 이 방법은 전계(electric field)를 이용하여 필드를 계산하는 전계 적분 방정식, 자계(magnetic field)를 이용하는 자계 적분 방정식(Magnetic Field Integral Equation: MFIE), 위의 전계와 자계를 동시에 이용하여 계산하는 혼합형 필드 적분 방정식(Combined Field Integral Equation: CFIE)이 있다^[2]. 이 세 가지 방법 모두 유기된 등가 전류를 계산한다는 측면에서는 동일하지만, 각 방법에서 사용되는 연산자의 특성상 각각 특성이 다르다^[5]. 전계 적분 방정식의 경우, 구조물이 개방 또는 폐 구조물 모두에 대해서 분석이 가능하다는 장점이 있다. 하지만, 해를 계산하기 위한 방법으로 반복법을 사용되었을 때 해의 수렴 속도가 늦고, 폐구조물에 해당하는 공진 주파수에서 해가 유일해(unique) 지지 않는 문제점^{[2],[3]}이 존재한다. 그 외에도 메쉬(mesh)가 조밀한 구조물에 대하여 Rao Wilton Glisson(RWG) 기저 함수를 이용하여 전계 적분 방정식을 계산할 경우 행렬 방정식의 조건 수(condition number)가 높아져 해가 보장되지 않는 문제점이 존재한다^{[6]~[8]}. 자계 적분 방정식의 경우, 전계 적분 방정식에 비하여 조건 수가 작아서 반복법을 적용하였을 때 해의 수렴 속도가 빠른 장점이 존재한다. 하지만, 이 방법은 폐 구조물에서만 적용이 가능하고, 전계 적분 방정식에 비하여 해의 정확도가 낮다. 또한, 전계 적분 방정식과 마찬가지로 폐구조물의 공진 주파수에서 해가 유일하지 않아 해의 정확도가 보장되지 않는 단점이 존재한다^{[9]~[12]}. 혼합 필드 적분 방정식은 위에서 언급한 폐구조물 공진 주파수에서 해가

유일해지지 않는 문제를 해결할 수 있다. 그 외에도, 두 가지 적분 방정식보다 행렬 방정식의 조건 수가 가장 작아 반복법을 사용하였을 경우 가장 빠르게 해를 계산할 수 있는 장점이 존재한다. 반면, 자계 적분 방정식과 마찬가지로 폐구조물에서만 적용이 가능하다는 단점이 존재한다^{[2],[4],[5]}.

본 논문에서는 전계 적분 방정식을 이용한 전자기 산란 문제를 해석하기 위하여 기존 RWG 기저 함수 대신 루프-스타(loop-star) 기저 함수를 사용하였다. 이 기저 함수는 헬름홀츠(Helmholtz) 정리를 적용하여 비발산 성분과 비회전 성분으로 분해하여 기존 RWG 기저 함수를 사용하였을 때 발생하는 저주파 오차를 해결할 수 있다^[4]. 하지만, 루프-스타 기저 함수가 모멘트 법에 적용되었을 때 형성된 행렬 방정식의 조건수(condition number)가 높아져 conjugate gradient method(CGM)와 같은 반복법을 이용하여 해를 계산할 경우 많은 반복 횟수를 요구하게 된다. 또한, 이 문제를 해결하기 위한 방안으로 전제 조건 행렬인 p-Type Multiplicative Schwarz preconditioner(pMUS)를 적용하였다. 이 기법은 행렬이 2×2 블록 행렬로 표현될 때 2×2 블록 행렬(block matrix) 곱의 형태로 전제 조건 행렬(precondition matrix)을 표현할 수 있다. 또한, pMUS 전제 조건은 블록 대각 전제 조건(Block Diagonal Precondition: BDP)과 같이 근사화된 역행렬을 얻기 위해 요구되는 계산량은 같지만, 본래 행렬 방정식의 역행렬에 근접하므로 블록 전제 조건보다 빠르게 해를 계산할 수 있다. 본 논문의 II 장에서는 전계 적분 방정식에서 저주파 오차가 발생하는 원인과 이를 해결하기 위한 방법으로 루프-스타 기저 함수를 이용한 전계 적분 방정식의 구현, 반복법의 반복 횟수를 줄이기 위한 기법으로 pMUS에 관한 내용을 기술하였고, III 장에서는 II 장에서 언급한 내용을 기반으로 한 수치 해석 결과를 제시한다.

II. 본 론

2-1 저주파 오차

전계 적분 방정식을 이용하여 구조물을 해석하고자 할 경우, 메쉬가 조밀해지거나 또는 주파수가 매우 낮아질 경우 저주파 오차 문제를 발생시킨다. 그

러한 이유는 $\omega \rightarrow 0$ 상황에 대하여 전계 적분 방정식을 통하여 그 원인을 찾을 수 있다^{[4],[6]~[8]}.

$$\begin{aligned} \overline{E^s} = & -j\omega\mu \int_s \overline{J}(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') ds' \\ & - \frac{j}{\omega\epsilon} \int_{s'} \nabla' \cdot \overline{J}(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') ds' \end{aligned} \quad (1)$$

위 식 (1)은 도체 또는 균일 유전체에 의하여 발생된 산란장을 나타내는 적분 방정식이다. 여기서, \overline{J} 는 표면 S 에 유기된 등가 표면 전류를 나타낸 것이다. 이 산란장 식 (1)의 첫 번째 항은 시변 자계에 의하여 생성된 전계와 일치하고, 두 번째 항은 전하에 의하여 생성된 전계를 나타낸다.

$\omega \rightarrow 0$ 일 경우, 식 (1)에서 전하에 의하여 생성된 필드는 시변 자계에 의하여 생성된 전계보다 주된 성분이 된다.

$$\overline{E^s} \approx - \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \int_s \nabla' \cdot \overline{J}(\overline{r}') G(\overline{r}, \overline{r}') dS' \quad (2)$$

이러한 현상은 벡터 포텐셜(vector potential)과 스칼라 포텐셜(scalar potential)간의 불균형을 초래하여 해의 부정확을 발생시키게 된다. 따라서 저주파 또는 구조물의 메쉬가 조밀한 상황에서 위의 식 (1)을 계산하기 위하여 기존의 RWG 기저 함수가 모멘트 법에 적용되었을 때 벡터 포텐셜과 스칼라 포텐셜들간의 불균형을 해결하지 못하는 문제가 존재한다. 그러므로 이를 해결하기 위한 방안으로 헬름홀츠 정리를 적용하여 RWG 기저 함수를 비발산 성분과 비회전 성분으로 분해한 루프-스타 기저 함수를 이용함으로써 이 문제를 해결할 수 있다^{[6],[8]}.

2-2 루프 스타 기저 함수를 이용한 전계 적분 방정식 구현

먼저, 모멘트 법에서 구하고자 하는 표면 전류 밀도는 기저 함수를 이용하여 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다^{[1]~[3]}.

$$\overline{J}(\overline{r}') = \sum_{n=1}^{N_L} a_{Ln} \overline{f_{Ln}}(\overline{r}') + \sum_{n=1}^{N_S} a_{Sn} \overline{f_{Sn}}(\overline{r}') \quad (3)$$

여기서, $\overline{f_{Ln}}$, $\overline{f_{Sn}}$, a_{Ln} , a_{Sn} 은 각각 루프(loop)와 스타(star) 기저 함수, 루프와 스타에 해당하는 아직 결정되지 않은 계수를 나타낸다. 루프-스타 기저 함수는

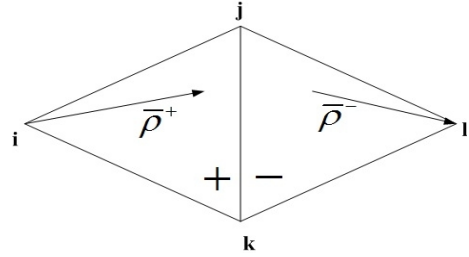


그림 1. 인접한 삼각형 쌍과 연관된 모서리(j, k)에서 정의된 RWG 기저 함수

Fig. 1. RWG basis function defined on an edge(j, k) associated with an adjacent triangle pairs.

구조물의 이산화로부터 생성된 삼각형 모서리와 연관이 있는 RWG 기저 함수를 정규화 되지 않은 중심 좌표(bary-centric coordinate) 형태로부터 유도될 수 있다^[13](그림 1).

$$\overline{f} = \frac{\hat{n}^+ \times (\zeta_j \nabla \zeta_k - \zeta_k \nabla \zeta_j)}{\hat{n}^- \times (\zeta_j \nabla \zeta_k - \zeta_k \nabla \zeta_j)} \quad (4)$$

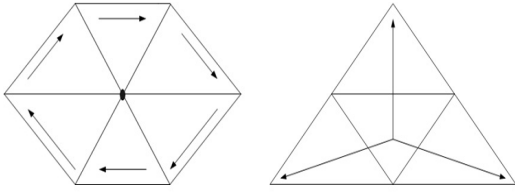
여기서 \hat{n} 은 각각 +, - 삼각형 쌍의 법선 벡터(normal vector)를 나타내고, ζ_j , ζ_k 는 각 꼭지점(j, k)과 연관된 중심 좌표이다. 이 기저 함수를 헬름홀츠 정리를 이용하여 비발산 성분과 비회전 성분으로 분해하면 루프 기저 함수와 스타 기저 함수를 얻을 수 있다(그림 2).

그림 2(a)와 식 (5)에서 볼 수 있는 듯이 루프 함수는 비발산(solenoidal) 성분을 가진다. 마찬가지로, 그림 2(b)와 식 (6)은 불완전 비회전(incomplete irrotational) 성분을 나타내고 있다. 구멍(hole)이 1개 이상 아닌 구조물의 경우, 내부 절점(internal node)에서 하나의 루프 기저 함수가 형성된다. 스타 기저 함수의 경우, 전체 삼각형 요소 중에서 임의의 하나의 삼각형을 제외한 나머지 삼각형 각각에 대해서 하나의 기저 함수가 형성된다^{[6]~[8]}.

$$\overline{f_{Ln}}(\overline{r}') = \sum_{i=1}^{inner\ node} \nabla \times (\hat{n} \times \zeta_n) \quad (5)$$

$$\overline{f_{Sn}} = \sum_{tri \in facet}^{facet-1} \hat{n} \times (\zeta_{tri_i} \nabla \zeta_{tri_j} - \zeta_{tri_j} \nabla \zeta_{tri_i}) \quad (6)$$

행렬 방정식을 생성하기 위하여 갤러킨 방법(Galerkin's method)을 이용하면 식 (7)과 같은 행렬 방정식이 형성된다^{[7],[8]}.



(a) 루프 기저 함수 (b) 스타 기저 함수
(a) Loop basis function (b) Star basis function

그림 2. 루프-스타 기저 함수
Fig. 2. Loop-star basis function.

$$\begin{bmatrix} Z_{LL} & Z_{LS} \\ Z_{SL} & Z_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \\ V_S \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서, $Z_{LL}, Z_{LS}, Z_{SL}, Z_{SS}$ 의 블록 요소(block entry)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[Z_{LL}]_{mn} = j\omega\mu \int_s \int_{s'} \overline{f_{Ln}(\vec{r})} \cdot \overline{f_{Ln}(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds \quad (8)$$

$$[Z_{LS}]_{mn} = j\omega\mu \int_s \int_{s'} \overline{f_{Ln}(\vec{r})} \cdot \overline{f_{Sn}(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds \quad (9)$$

$$[Z_{SL}]_{mn} = j\omega\mu \int_s \int_{s'} \overline{f_{Sn}(\vec{r})} \cdot \overline{f_{Ln}(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds \quad (10)$$

$$[Z_{SS}]_{mn} = j\omega\mu \int_s \int_{s'} \overline{f_{Sn}(\vec{r})} \cdot \overline{f_{Sn}(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds - \frac{j}{\omega\epsilon} \int_s \int_{s'} \nabla \cdot \overline{f_{Sn}(\vec{r})} \nabla' \cdot \overline{f_{Sn}(\vec{r}')} G(\vec{r}, \vec{r}') ds' ds \quad (11)$$

$$[V_L]_m = \int_S \overline{f_{Ln}(\vec{r})} \cdot \overline{E^i(\vec{r})} ds \quad (12)$$

$$[V_S]_m = \int_S \overline{f_{Sn}(\vec{r})} \cdot \overline{E^i(\vec{r})} ds \quad (13)$$

$\omega \rightarrow 0$ 일 경우, 행렬 방정식 식 (7)의 각각의 요소들을 주파수의 함수로 나타내면 식 (14)와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Z_{LL}(\omega) & Z_{LS}(\omega) \\ Z_{SL}(\omega) & Z_{SS}(1/\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Ln} \\ I_{Sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \\ V_S \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 $O(\omega^n)$ 은 $\omega \rightarrow 0$ 일 때, 주된 주파수에 대한 행렬요소의 특성을 나타낸 것이다. 위 식 (14)에서 알 수 있듯이 루프 스타 분해 후에도 여전히 행렬 방정식은 루프 블록 행렬과 스타 블록 행렬사이의 불균형이 발생한다. 그러므로, 루프 기저 함수에 의해

형성된 블록과 스타 기저 함수에 의해 형성된 블록 사이의 균형을 이루기 위한 방법으로 주파수 정규화 기법을 필요로 한다. 이 방법은 다음과 같다^{[4],[7]}.

$$\begin{bmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V \quad (15)$$

이러한 주파수 정규화 기법을 이용하여 각 대각 행렬의 요소들을 주파수와 무관한 함수로 만들어 줌으로써 식 (16)과 같이 루프 블록과 스타 블록의 요소들간의 균형이 이루어질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Z_{LL}(1) & Z_{LS}(\omega) \\ Z_{SL}(\omega) & Z_{SS}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Ln} \\ I_{Sn}/\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{Ln}/\omega \\ V_{Sn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

위에서 언급한 루프-스타 기저 함수와 주파수 정규화 기법을 통하여 전계 적분 방정식에서 발생하는 저주파 오차 문제는 해결될 수 있다. 하지만, 위의 행렬은 Z_{LL} 항 때문에 행렬 방정식의 조건 수가 매우 높다. 이 행렬 방정식을 계산하기 위하여 CGM과 같은 반복법을 적용하였을 경우 해를 찾기 위한 수렴 속도는 매우 느리다^[8]. 그러므로 해의 수렴 속도를 가속화시키기 위한 전제 조건 행렬이 필요하다.

2-3 전제 조건(Preconditioner)

일반적으로 선형 연립방정식의 조건 수는 미지수의 증가에 따라 증가한다^[14]. 따라서 선형 연립 방정식의 해를 계산하기 위하여 반복법을 적용할 경우 반복 횟수가 급속도로 증가하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방안으로 행렬 방정식을 변형하여 반복 횟수를 줄일 수 있는 전제 조건 기법이 사용된다^{[14]~[16]}. 이 방법은 다음과 같다.

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (17)$$

여기서, M 은 전제 조건 행렬이라 불린다. M^{-1} 를 추정하는 기법들은 여러 가지가 존재하는데^{[14],[16]}, 본 논문에서는 블록 대각 전제 조건 기법과 pMUS 기법을 적용하였다^[15]. 모멘트 법에 루프-스타 기저 함수를 적용하였으므로 얻어진 행렬 방정식은 다음과 같이 루프와 스타 기저 함수 타입으로 구성된 블록 행렬 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

이 블록 행렬에서 블록 대각 전제 조건 방법은 식 (18)에서 다음과 같이 대각 블록으로 구성된 행렬을 나타낸다.

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

이것의 역행렬은 식 (20)과 같이 표현할 수 있다.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

또한, pMUS 기법을 적용하기 위하여 식 (18)의 2×2 블록 행렬을 다음과 같이 행렬 곱의 형태로 분해할 수 있다^[15].

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1}I_1 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

위 행렬의 역행렬은 $A_{11}, A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 의 역행렬을 포함한다. 여기서 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \approx A_{22}$ 로 근사화하면 위의 행렬은 단순히 A_{11}, A_{22} 블록의 역행렬과 비대각 블록 요소로 근사화된 A의 역행렬을 만들 수 있다.

이를 이용하여 형성된 M^{-1} 는 다음과 같이 표현된다.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 - A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 & -A_{21}A_{11}^{-1}I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1}I_2 & I_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

이 전제 조건 행렬을 반복법에 적용할 때 각각의 순차적인 행렬 곱을 통하여 계산될 수 있다.

III. 수치 해석 결과

먼저 루프-스타 기저 함수를 모멘트 법에 적용하였다. 또한, 구조물은 삼각형 기반으로 금속 도체를 모델링하였다. 수치 해석 결과의 정확도를 확인하기 위하여 주파수는 0.3 GHz, 전계 입사 방향은 $-z$ 방향, 전계는 x 방향으로 편파된 평면파가 반경이 1m 인 금속 도체 구로 입사하였을 때, $\phi=0$ 인 $x-z$ 평면에서 θ 의 변화에 따라 계산한 바이스테틱(bistatic) 레이더 단면적(radar cross section)을 계산하였다. 그

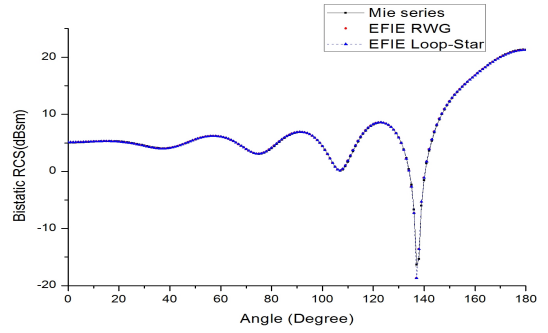


그림 3. 주파수 0.3 GHz에서 반경이 1 m인 구에 대한 바이스테틱 레이더 단면적 패턴
Fig. 3. Bistatic radar cross section(RCS) pattern in terms of a sphere of 1 m radius at 0.3 GHz.

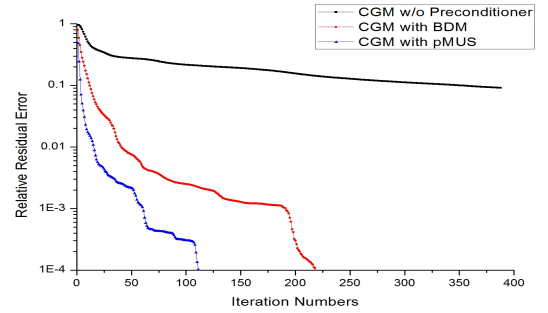


그림 4. 주파수 0.3 GHz에서 반경이 1 m인 구에 대한 해의 수렴 속도
Fig. 4. Convergence history in terms of a sphere of radius 1 m at 0.3 GHz.

림 3에서 알 수 있듯이 루프-스타 기저 함수를 사용하였을 때의 계산 결과는 해석해(Mie-series)^[16], RWG 기저 함수를 사용한 모멘트법과 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 루프-스타 기저 함수를 이용한 모멘트법이 제대로 구현되었음을 확인할 수 있다. 그림 4에서는 CGM의 반복 횟수에 따른 상대 오차의 변화를 나타낸 그래프이다. 사용된 구조물과 시뮬레이션(simulation) 환경 파라미터는 그림 3에서 설정한 것과 동일하게 유지한 상태에서 차례대로 전제 조건 행렬을 사용하지 않았을 때와 BDP, pMUS와 CGM을 결합하여 해의 수렴 속도를 비교하였다. 또한, pMUS와 BDP의 희소성 비율은 동일하게 유지하였고, 각 블록의 역행렬을 계산하기 위한 많은 방법이 존재하지만, 본 논문에서는 불완전 $LDL^T(0)$ 분해법을 이용하였다^[17]. 희소성 비율(sparsity)은 행렬 방정

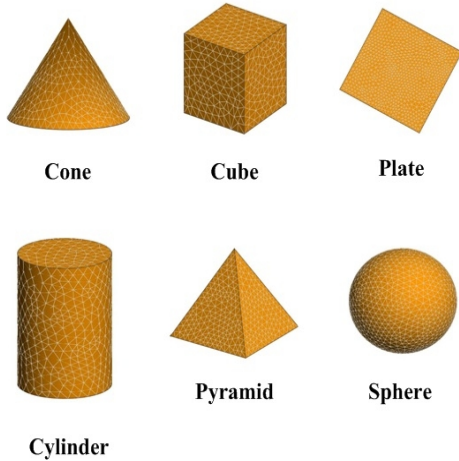


그림 5. 각 구조물의 형상
Fig. 5. Geometry of objects.

식을 풀기 위하여 전제 행렬을 형성하였을 때 0이 아닌 성분들의 개수를 전체 요소의 개수(N^2)로 나눈 것을 의미한다. 그림 4를 통하여, 전제 조건 행렬로 pMUS를 사용하였을 때가 가장 빠른 해의 수렴성을 보이고 있고, 전제 행렬을 사용하지 않을 경우 400번의 반복 이내에 10^{-4} 에 수렴하지 않음을 확인할 수 있다. 끝으로, 다양한 구조물(그림 5)에 대하여 시뮬레이션 환경은 앞서 언급한 것과 동일한 상태에서 행렬 방정식의 조건 수, BDP와 pMUS를 CGM에

적용하였을 때 해를 구하기 위한 반복 횟수를 표 1에 정리하였다. 표 1에서 반복 횟수는 최대 400번 이내에, 상대 오차(relative residual error)가 10^{-4} 에 도달할 때까지 요구되는 반복 횟수를 나타낸 것이다. 수치 해석 결과, pMUS는 다양한 구조물에 대하여, BDP보다 해를 계산하기 위하여 적은 반복 횟수를 사용하여 계산할 수 있음을 확인할 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는, 전제 적분 방정식에 존재하는 저주파 오차 문제를 해결하기 위한 방법으로 루프-스타 기저 함수를 모멘트 법에 적용하였다. 또한, 루프-스타 기저 함수와 스타 기저 함수에 의하여 형성된 각각의 행렬 요소 사이의 불균형은 주파수 정규화 기법을 통하여 저주파 문제는 해결될 수 있다. 하지만, 헬름홀츠 정리를 기반으로 RWG 기저 함수를 루프-스타 기저 함수로 분해하였을 때 발생하는 행렬 방정식의 조건 수는 매우 높아진다. 그 결과, CGM과 같은 반복법을 적용하여 해를 찾는데 많은 계산 시간이 요구된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 전제 조건 행렬 pMUS를 CGM의 전제 조건으로 적용하였다. 수치 해석 결과, 같은 희소성 행렬을 가진 BDP와 비교하였을 때 pMUS는 BDP

표 1. 각 구조물에 대한 조건 수와 해를 계산하기 위하여 요구되는 반복 횟수 및 계산 시간

Table 1. Number of iterations required for calculating solution, condition number, and computation time according to each object.

구조물 (Number of unknowns)	Condition number	Sparsity(%)	BDM+CGM (Residual error 1e-4)	pMUS+CGM (Residual error 1e-4)	BDM+CGM CPU time (sec)	pMUS+CGM CPU time (sec)
Pyramid (381)	4.4*1e3	27.5	23	14	7.103	4.825
Cube (720)	1.0*1e4	27.5	36	22	38.875	23.996
Cone (840)	2.6*1e5	27.5	11	5	16.585	9.324
Cylinder (1758)	3.4*1e4	27.5	146	82	934.223	680.275
Plate (2640)	1.1*1e5	27.5	-	284	-	4345.46
Sphere (3901)	4.5*1e9	27.5	219	112	6895.9	4814.08
Cone (5145)	1.4*1e5	27.5	-	231	-	6723.26

보다 적은 반복 횟수를 사용하여 계산할 수 있음을 보였다. 또한, pMUS 기법은 루프-스타 기저 함수 이외에도 모멘트 법을 이용하여 형성된 행렬이 2×2 블록으로 표현할 수 있는 행렬 방정식에 적용하여 빠르게 해를 계산할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press, 1993.
- [2] Walton C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [3] Andrew F. Peterson, Scott L. Ray, and Raj Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press, 1998.
- [4] Weng Cho Chew, Mei Song Tong, and Bin Hu, "Integral equation methods for electromagnetic and elastic waves", *Morgan & Claypool*, pp. 43-107, 2009.
- [5] Weng Cho Chew, C. P. Davis, K. F. Warnick, Z. P. Nie, J. Hu, S. Yan, and L. Gurel, "EFIE and MFIE, Why the difference?", in *Proc. IEEE Int. Symp. Antennas Propagation/USNC/URSI Nat. Radio Sci. Meeting*, San Diego, CA, pp. 1-2, 2008.
- [6] Giuseppe Vecchi, "Loop-star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 47, no. 2, pp. 339-346, Feb. 1999.
- [7] Jun-Sheng Zhao, Weng Cho Chew, "Integral equation solution of Maxwell's equations from zero frequency to microwave frequencies", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 48, no. 10, pp. 1635-1645, Oct. 2000.
- [8] Jin-Fa Lee, Robert Lee, and Robert J. Burkholder, "Loop star basis functions and a robust preconditioner for EFIE scattering problems", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 51, no. 8, pp. 1855-1863, Aug. 2003.
- [9] Ozgur Ergul, Levent Gurel, "The use of curl-conforming basis functions for the magnetic-field integral equation", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 54, no. 7, pp. 1917-1926, Jul. 2006.
- [10] Eduard Ubeda, Juan M. Rius, "Novel monopolar MFIE MoM-discretization for the scattering analysis of small objects", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 54, no. 1, pp. 50-57, Jan. 2006.
- [11] Ozgur Ergul, Levent Gurel, "Improving the accuracy of the magnetic field integral equation with the linear-linear basis functions", *Radio Science*, vol. 41, pp. 1-15, Jul. 2006.
- [12] Ozgur Ergul, Levent Gurel, "Linear-linear basis functions for MLFMA solution of magnetic-field and combined-field integral equations", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 55, no. 4, pp. 1103-1110, Apr. 2007.
- [13] Roberto D. Graglia, Donald Wilton, and Andrew F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics", *IEEE Trans. on Antenna and Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997.
- [14] John L. Volakis, Arindam Chatterjee, and Leo C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*, IEEE Press, 1998.
- [15] Seung-Cheol Lee, Vineet Rawat, and Jin-Fa Lee, "A hybrid finite/boundary element method for periodic structures on non-periodic meshes using an interior penalty formulation for Maxwell's equations", *Journal of Computational Physics*, vol. 229, issue 13, pp. 4934-4951, Jul. 2010.
- [16] Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, 1989.
- [17] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 1st Ed., PWS, 1996.

염재현



2006년 2월: 한양대학교 전자전기 컴퓨터공학부 (공학사)
2006년 3월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 통합박사과정
[주 관심분야] 고주파 수치 해석 기법, 저주파 수치 해석 기법

진희철



2008년 2월: 부산대학교 전자전기 통신공학부 (공학사)
2008년 3월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 통합박사과정
[주 관심분야] 고주파 수치 해석 기법, 저주파 수치 해석 기법

박현규



2006년 8월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학사)
2008년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학석사)
2008년 2월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 박사과정
[주 관심분야] 고주파 수치 해석 기법, 저주파 수치 해석 기법, EMI, EMC

김효태



1978년 2월: 서울대학교 전자전기 공학과 (공학사)
1982년 2월: 서울대학교 전자전기 공학과 (공학석사)
1986년 2월: Ohio State University Columbus, OH, USA Electronic Engineering (공학박사)
1986년 3월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 교수
[주 관심분야] RCS, EMI/EMC, 레이더 신호처리

이현석



2007년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학사)
2009년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학석사)
2009년 2월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 박사과정
[주 관심분야] 고주파 수치 해석 기법, 저주파 수치 해석 기법

김경태



1994년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학사)
1996년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학석사)
1999년 2월: 포항공과대학교 전자 전기공학과 (공학박사)
2002년 3월~2011년 2월: 영남대학교 전자공학과 교수
2011년 3월~현재: 포항공과대학교 전자전기공학과 교수
[주 관심분야] 레이더 표적 인식, 레이더 영상, 레이더 신호 처리, 패턴 인식, 전자기수치 해석 및 RCS 측정