

일차전단변형이론을 이용한 복합재료 적층평판의 효율적 열응력 해석

한 장 우¹ · 김 준 식² · 조 맹 효^{1*}

¹서울대학교 기계항공공학부, ²금오공과대학교 지능기계공학과

Efficient Thermal Stress Analysis of Laminated Composite Plates using Enhanced First-order Shear Deformation Theory

Jang-Woo Han¹, Jun-Sik Kim² and Maenghyo Cho^{1*}

¹School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Republic of Korea

²Department of Intelligent Mechanical Engineering, Kumoh National Institute of Technology, Gumi, 730-701, Republic of Korea

Abstract

In this paper, an efficient yet accurate method for the thermal stress analysis using a first order shear deformation theory(FSDT) is presented. The main objective herein is to systematically modify transverse shear strain energy through the mixed variational theorem(MVT). In the mixed formulation, independent transverse shear stresses are taken from the efficient higher-order zigzag plate theory, and the in-plane displacements are assumed to be those of the FSDT. Moreover, a smooth parabolic distribution through the thickness is assumed in the transverse normal displacement field in order to consider a transverse normal deformation. The resulting strain energy expression is referred to as an enhanced first order shear deformation theory, which is obtained via the mixed variational theorem with transverse normal deformation effect(EFSDTM_TN). The EFSDTM_TN has the same computational advantage as the FSDT_TN(FSDT with transverse normal deformation effect) does, which allows us to improve the through-the-thickness distributions of displacements and stresses via the recovery procedure. The thermal stresses obtained by the present theory are compared with those of the FSDT_TN and three-dimensional elasticity.

Keywords : EFSDTM_TN, mixed variational theorem, laminated composite plates, transverse normal deformation, thermal stress

1. 서 론

최근에 항공기, 우주구조물, 그리고 자동차 산업에 이르기까지 다양한 분야에서 쓰이는 고강도 경량 구조물들은 복합재료 적층평판을 통하여 구현할 수 있으며, 따라서 복합재의 거동을 정확하고 효율적으로 예측하는 것이 중요한 문제로 대두되었다. 일반적으로 적층형태의 복합재의 경우 횡방향 응력에 대하여 취약점을 가지고 있으며, 이에 따라 효과적으로 두께방향의 전단응력을 예측하기 위한 다양한 이론이 개발되었다.

Kirchoff-Love 가정에 의한 고전적층판이론(CLPT: Classical Laminated Plate Theory)을 시작으로 Reissner/Mindlin

가정에 의한 일차전단변형이론(FSDT: First-order Shear Deformation Theory)등의 기존 적층평판 이론들이 개발되었으며(Reissner, 1945; Mindlin, 1951), 그 이후 복합재의 변위 및 응력 분포를 좀 더 정확하게 예측하기 위하여 고차 다항식 전개이론(Levinson, 1980; Murthy, 1981; Reedy, 1984; Lo *et al.*, 1977), 지그재그 이론(Murakami, 1986; Di Sciuva, 1986), 그리고 층간 세분화 이론(Seide, 1980) 등이 개발되어 왔다.

Cho와 Parmeter가 개발한 효율적 고차이론(EHOPT: Efficient Higher-Order Plate Theory)은 3차 다항식 변위장에 zig-zag 항을 중첩시킴으로써, 횡전단 응력 조건들을 모두 만족하는 변위장을 제공한다(Cho and Parmeter,

* Corresponding author:

Tel: +82-2-880-1693; E-mail: mhcho@snu.ac.kr

Received November 7 2012; Revised November 10 2012;

Accepted November 10 2012

©2012 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1992; 1993). 하지만 평형방정식을 통해 해를 구하는 계산 과정이 복잡하다는 단점과 함께, 유한요소 정식화 과정에서 처짐에 관한 형상함수로 C1함수(기울기가 요소의 경계면에서 연속인 함수)의 도입이 필요하다는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여, Kim과 Cho는 고전적 일차전단변형이론과 같은 수준의 비교적 간단한 계산만으로 후처리 과정을 통하여 변위 및 응력 분포에 대한 예측을 향상시킬 수 있는 혼합변분이론에 기반한 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM: Enhanced First order Shear Deformation Theory based on Mixed formulation)을 개발하였다(Kim and Cho, 2007). 개선된 일차전단변형이론은 유한요소 정식화 과정에서 기존의 다양하게 개발된 일차전단변형이론에 기초한 유한요소들을 어떠한 수정없이 바로 사용할 수 있다는 장점이 있다.

한편, 광범위한 산업 전반에 걸쳐 폭넓게 이용되고 있는 복합재료 적층평판은 기계적 하중뿐만이 아닌 고온 등과 같은 다양한 외부 환경에 빈번하게 노출될 수 있으며, 이로 인해 복합재료 구조물에 치명적인 결함을 유발하는 열 변형 및 열응력이 발생될 수 있으므로, 복합재료 적층평판의 열탄성 거동을 정확하고 효율적으로 예측하는 것 또한 매우 중요한 문제이다.

이에 따라 복합재료 적층평판의 열탄성 거동을 정확하게 예측하기 위한 많은 평판 이론들이 개발되어 왔다. 고전적 일차전단변형이론이 열탄성 거동 해석에 있어서 가지는 취약점을 보완하고자, Jonnalagadda 등과 Rohwer 등은 고차전단변형이론을 통한 복합재료 적층평판의 열탄성 거동에 관한 연구를 수행하였으며(Jonnalagadda *et al.*, 1993; Rohwer *et al.*, 2001), Cho와 Oh는 지능 복합재료 적층평판의 기계-열-전기적 거동을 예측하기 위하여 효율적 고차 zig-zag 이론을 개발함으로써 복합하중에 대한 거동을 효과적으로 해석할 수 있는 방향을 제시하였다(Cho and Oh, 2004). 또한 Kapuria 등은 횡방향 변위장에 열팽창 계수를 고려해줌으로써 열탄성 거동을 효과적으로 예측할 수 있는 효율적 고차 zig-zag 이론을 개발하였다(Kapuria and Achary, 2004). Wanji 등은 횡방향 변위장에 열팽창 계수를 고려해 줌과 동시에 면내 변위장에 전역변수와 국소변수를 함께 고려해 줌으로써 열탄성 해석의 정확도를 높일 수 있는 효율적 전역-국소 고차이론을 개발하였다(Wanji *et al.*, 2010). 하지만, 제시된 열탄성 거동 해석을 위한 다양한 평판 이론들은 모두 고차 다항식을 가정함으로써 해석과정에 있어 고전 평판이론과 비교하여 효율성은 떨어진다는 단점이 있다.

고차이론들이 갖는 이러한 단점을 보완해 주며 정확성과 효율성을 동시에 만족시키는 EFSDTM은 기계적 거동을 해

석함에 있어서는 매우 정확한 결과를 나타내지만, 횡방향 수직 변형의 영향이 커지는 열탄성 거동을 해석함에 있어서는 기존의 EFSDTM으로는 횡방향 수직변형을 효과적으로 고려할 수 없기 때문에 정확한 열탄성 거동의 해석을 수행할 수 없다.

이러한 문제에 입각하여, 본 논문에서는 일차전단변형이론을 이용하여 복합재료 적층평판의 열탄성 거동을 효과적으로 해석할 수 있는 기법에 대한 연구를 수행하였다. 열탄성 거동에서 중요한 역할을 하는 횡방향 수직변형을 효과적으로 고려하기 위하여 고전적 일차전단변형이론의 횡방향 변위장을 포물선으로 가정하였으며(FSDT_TN), 제시된 방법은 FSDT_TN과 같은 수준의 간단한 계산만을 수행하며, 후처리 과정을 통하여 열변형 및 열응력 분포에 대한 예측을 비약적으로 향상시킴으로써, 정확도와 효율성을 동시에 높일 수 있도록 하였다.

본 연구의 계산적 효율성과 결과의 정확성을 검증하기 위하여 2차원 복합재료 평판의 열탄성 거동에 대한 해석을 수행하였으며, 계산된 결과는 FSDT_TN의 결과와 3차원 탄성해(Pagano, 1969)등과 비교, 검증하였다.

2. 본 론

2.1 혼합 변분 이론

본 연구에서는 단사정 물성치(monoclinic material property)로 이루어진 두께 h 의 복합재료 적층 구조물을 고려하였다. 적층평판의 기하학적 형상과 좌표는 다음과 같다(Fig. 1). 주어진 평판의 면내 방향을 나타내는 두 좌표축은 x_1 , x_2 로 표현되며, x_3 는 $h/2$ 와 $-h/2$ 사이의 값을 갖는 두께 방향을 나타내는 좌표축으로 표현하였다. 본 장에서는 서로 독립적인 응력장과 변위장을 가정하며, 혼합변분이론을 통하여 가정된 응력장과 변위장에 대한 횡방향 변형에너지 관계식을 유도한다.

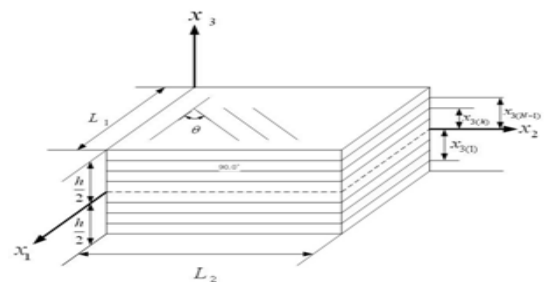


Fig. 1 Geometry and coordinate of composite laminate plate

주어진 선형 열탄성 문제에 대한 Hellinger-Reissner 범함수(functional)는 다음과 같다.

$$\int_V [\sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha 3}^* \delta \gamma_{\alpha 3} + \sigma_{33}^* \delta \varepsilon_{33}] dV + \int_V [(\gamma_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3}^*) \delta \sigma_{\alpha 3}^* + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^*) \delta \sigma_{33}^*] dV - \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i \delta u_i dS_\sigma - \int_{S_u} \delta \tilde{T}_i (u_i - \tilde{u}_i) dS_u = 0 \quad (1)$$

여기서, 상첨자 (*)는 독립적으로 가정된 응력장으로부터 얻어진 응력과 변형률 텐서이며, S_σ 은 \tilde{T}_i 로 기술된 응력 경계면을, S_u 는 \tilde{u}_i 로 주어진 변위 경계면을 나타낸다. 또한, 일반적으로 열탄성 문제에 대한 3차원 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \theta), \quad \theta = T - T_o \quad (2)$$

여기서, C_{ijkl} 은 단사정 물성치를 나타내는 탄성 텐서의 성분들이며, θ 는 초기 온도 T_o 에 대한 온도의 변화를 나타낸다. 그리고 α_{kl} 은 열팽창 계수를 나타낸다.

2.2 고차이론에 의해 가정된 횡방향 응력장

식 (1)에서 언급한 횡방향 응력장을 유도하기 위해서 횡방향 변위장을 포물선으로 가정한 3차 zig-zag 모델(EHOPT-TN)을 고려하였다(Cho and Parmeter, 1992). 언급된 모델은 면내 변위장을 두께 방향으로 3차 다항식에 층별로 기울기가 변하는 선형 zig-zag함수를 추가적으로 고려해 줌으로써, 표면 횡전단 무응력 조건과 층(layer)간 횡방향 전단응력 연속 조건을 모두 만족시킨다. 기술된 변위장은 다음과 같다.

$$u_\alpha(x_i) = u_\alpha^o(x_\alpha) + w_\alpha(x_\alpha)x_3 + \xi_\alpha(x_\alpha)x_3^2 + \phi_\alpha(x_\alpha)x_3^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^{(k)}(x_\alpha)(x_3 - x_{3(k)})H(x_3 - x_{3(k)}), \\ u_3(x_\alpha) = u_3^o(x_\alpha) + r_1(x_\alpha)x_3 + r_2(x_\alpha)x_3^2 \quad (3)$$

여기서, 상첨자 (°)는 기준면에서의 변수를 나타내고, N은 복합재료 적층수, 또한 $H(x_3 - x_{3(k)})$ 는 단위계단함수를 나타낸다. 그리고 $S_\alpha^{(k)}$ 는 각 층의 계면에서 변위의 기울기를 나타내며, 이 값들은 횡방향 전단응력 연속 조건을 부과함으로써 $S_\alpha^{(k)} = a_{\alpha\beta}^{(k)}\phi_\beta + b_{\alpha\beta}^{(k)}r_{2,\beta}$ 의 형태와 같이 전단 강성계수의 함수로 나타낼 수 있다. 식 (3)과 같이 기술된 변위장에 표면 전단 무응력 조건과 층(layer)간 횡방향 전단응력 연속 조건을 부과하면 최종 변위장은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$u_\alpha = u_\alpha^o - u_{3,\alpha}^o x_3 - \frac{1}{2} r_{1,\alpha} x_3^2 - \frac{1}{3} r_{2,\alpha} x_3^3 + \Phi_{\alpha\beta}^{(a)} \phi_\beta + \Phi_{\alpha\beta}^{(b)} r_{2,\beta} \\ u_3 = u_3^o + r_1 x_3 + r_2 x_3^2 \quad (4)$$

$$\Phi_{\alpha\beta}^{(a)} = 3\left(\frac{x_3^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_3\right) \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{\alpha\beta}^{(k)} f(x_3, x_{3(k)}) \\ \Phi_{\alpha\beta}^{(b)} = \left(\frac{x_3^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_3\right) \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} b_{\alpha\beta}^{(k)} f(x_3, x_{3(k)}) \\ f(x_3, x_{3(k)}) = -\frac{x_3}{2} - \frac{x_3^2}{2h} + (x_3 - x_{3(k)})H(x_3 - x_{3(k)}) \quad (5)$$

식 (4)로 주어지는 변위장으로부터 변형률 성분들은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \gamma_{\alpha 3}^* = \Phi_{\alpha\beta,3}^{(a)} \phi_\beta + \Phi_{\alpha\beta,3}^{(b)} r_{2,\beta} \\ \varepsilon_{33}^* = u_{3,3} \quad (6)$$

식 (6)에서 얻어지는 변형률 성분들과 식 (2)로 주어지는 구성방정식을 통하여 혼합변분이론에서 가정되는 횡방향 응력장은 다음과 같이 유도된다.

$$\sigma_{\alpha 3}^* = C_{\alpha 3\beta 3} \gamma_{\beta 3}^* \\ \sigma_{33}^* = C_{33\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta}^* - \alpha_{\alpha\beta} \theta) + C_{3333} (\varepsilon_{33}^* - \alpha_{33} \theta) \quad (7)$$

2.3 일차전단변형이론에 의해 가정된 변위장

식 (1)에서 언급한 변위장은 횡방향 변위장을 포물선으로 가정한 일차전단변형이론(FSDT-TN)의 변위장을 고려하였다. 기술된 변위장은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha^o + \bar{w}_\alpha x_3 \\ \bar{u}_3 = \bar{u}_3^o + \bar{r}_1 x_3 + \bar{r}_2 x_3^2 \quad (8)$$

식 (8)로 주어지는 변위장으로부터 변형률 성분들은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \bar{u}_{\alpha,\beta}^o + \bar{w}_{\alpha,\beta} x_3 \\ \gamma_{\alpha 3} = (\bar{w}_\alpha + \bar{u}_{3,\alpha}^o) + \bar{r}_{1,\alpha} x_3 + \bar{r}_{2,\alpha} x_3^2 \\ \varepsilon_{33} = \bar{r}_1 + 2\bar{r}_2 x_3 \quad (9)$$

또한, 다음 변형률 성분들을 통해 혼합변분이론에서 요구되는 면내 응력은 다음과 같이 유도된다.

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\omega} (\varepsilon_{\gamma\omega} - \alpha_{\gamma\omega} \theta) + C_{\alpha\beta 33} (\varepsilon_{33} - \alpha_{33} \theta) \quad (10)$$

2.4 혼합변분이론에 의한 두 이론 사이의 관계식

식 (1)로 주어지는 혼합변분이론의 두 번째 항은 구속 방정식을 통하여 가정된 변위장과 횡방향 응력장 사이의 관계식을 제공해 줌으로써, EFSDTM_TN의 유도과정에서 매우 중요한 역할을 한다. 그 구속방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\int_V [(\gamma_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3}^*) \delta \sigma_{\alpha 3}^* + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^*) \delta \sigma_{33}^*] dV = 0 \quad (11)$$

여기서, 두 이론의 횡방향 수직 변형률은 동일하기 때문에 구속방정식의 두 번째 항은 0이 되며, 이러한 관계는 식 (12)와 같이 횡방향 수직응력 또한 FSDT_TN의 항으로 근사적 표현이 가능함을 의미한다.

$$\varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} \rightarrow \sigma_{33}^* \approx \sigma_{33} \quad (12)$$

따라서, 최종적으로 고려되는 구속방정식은 다음과 같다.

$$\int_V [(\gamma_{\alpha 3} - \gamma_{\alpha 3}^*) \delta \sigma_{\alpha 3}^*] dV = 0 \quad (13)$$

구속방정식에 쓰이는 각 이론들의 횡방향 전단 변형률은 식 (6)과 식 (9)를 통해 정의되며, 식 (7)로 정의되는 고차 이론의 횡방향 전단응력에 대한 결과력들은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Q_{\alpha}^{(0)} \\ Q_{\alpha}^{(1)} \\ Q_{\alpha}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(0)} & \hat{B}_{\alpha 3 \beta 3}^{(0)} \\ \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(1)} & \hat{B}_{\alpha 3 \beta 3}^{(1)} \\ \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(2)} & \hat{B}_{\alpha 3 \beta 3}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\beta} \\ r_{2, \beta} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i)} = \langle x^i C_{\alpha 3 \beta 3} \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(a)} \rangle, \hat{B}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i)} = \langle x^i C_{\alpha 3 \beta 3} \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(b)} \rangle \quad (14)$$

또한, 구속방정식인 식 (13)에 의해서, 고차이론에 의한 횡방향 응력장의 변수들을 FSDT_TN의 변수들로 표현할 수 있으며, 그 관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(0)} & \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(1)} & \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{\alpha} + \bar{u}_{3, \alpha}^o \\ \bar{r}_{1, \alpha} \\ \bar{r}_{2, \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3} & \tilde{B}_{\alpha 3 \beta 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\beta} \\ r_{2, \beta} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3} = \langle \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(a)} C_{\alpha 3 \beta 3} \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(a)} \rangle, \tilde{B}_{\alpha 3 \beta 3} = \langle \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(a)} C_{\alpha 3 \beta 3} \Phi_{\beta \gamma, 3}^{(b)} \rangle \quad (15)$$

여기서, $\bar{r}_{2, \alpha} = r_{2, \alpha}$ 이므로 최종적으로 표현되는 관계식은 다음과 같다(Kim and Cho, 2007; Kim, 2007).

$$\phi_{\beta} = (\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(0)} & \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(1)} & \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(2)} - \tilde{B}_{\alpha 3 \beta 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{\alpha} + \bar{u}_{3, \alpha}^o \\ \bar{r}_{1, \alpha} \\ \bar{r}_{2, \alpha} \end{bmatrix} \quad (16)$$

전단 변형률에 대한 관계식인 식 (16)을 식 (14)에 대입함으로써, 고차 이론의 횡방향 전단응력에 대한 결과력들을 FSDT_TN의 변수들로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{\alpha}^{(0)} \\ Q_{\alpha}^{(1)} \\ Q_{\alpha}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{\alpha} + \bar{u}_{3, \alpha}^o \\ \bar{r}_{1, \alpha} \\ \bar{r}_{2, \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{i1} = \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i-1)} (\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3})^{-1} \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(0)}$$

$$\Gamma_{i2} = \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i-1)} (\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3})^{-1} \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(1)}$$

$$\Gamma_{i3} = \hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i-1)} (\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3})^{-1} (\hat{A}_{\alpha 3 \beta 3}^{(2)} - \tilde{B}_{\alpha 3 \beta 3}) + \hat{B}_{\alpha 3 \beta 3}^{(i-1)} \quad (17)$$

2.5 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM_TN)

2.5.1 평형방정식 및 경계조건

2.4절을 통하여 구속방정식인 식 (13)을 만족하는 두 이론 사이의 관계식을 유도하였으며, 이에 따라 선형 열탄성 문제에 대한 Hellinger-Reissner 범함수(functional)는 다음과 같이 수정된다.

$$\int_V [\sigma_{\alpha \beta} \delta \varepsilon_{\alpha \beta} + \sigma_{\alpha 3}^* \delta \gamma_{\alpha 3} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33}] dV - \int_{\Omega} p \delta u_3 d\Omega = 0 \quad (18)$$

여기서, 횡방향 수직응력은 식 (12)에 의해서 FSDT_TN의 변위장으로부터 유도되는 값이며, 횡방향 전단응력만이 고차 이론에 의해 가정된 횡방향 응력장에서부터 유도된 값이다. 식 (18)에 부분 적분법을 적용함과 동시에 응력 결과력들을 정의해 줌으로써, 선형 열탄성 문제에 대하여 혼합변분이론에 기초한 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM_TN)의 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\delta \bar{u}_{\alpha}^o : \bar{N}_{\alpha \beta, \beta} = 0$$

$$\delta \bar{\psi}_{\alpha} : \bar{M}_{\alpha \beta, \beta} - Q_{\alpha}^{(0)} = 0$$

$$\delta \bar{u}_{3}^o : Q_{\alpha, \alpha}^{(0)} + p = 0$$

$$\delta \bar{r}_{1} : Q_{\alpha, \alpha}^{(1)} + \frac{h}{2} p - \bar{N}_{33} = 0$$

$$\delta \bar{r}_{2} : Q_{\alpha, \alpha}^{(2)} + \frac{h^2}{4} p - 2\bar{M}_{33} = 0 \quad (19)$$

여기서, 응력의 결과력들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [\bar{N}_{\alpha\beta}, \bar{N}_{33}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{33}] dx_3 \\
 [\bar{M}_{\alpha\beta}, \bar{M}_{33}] &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 [\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{33}] dx_3 \\
 [Q_\alpha^{(0)}, Q_\alpha^{(1)}, Q_\alpha^{(2)}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{\alpha 3}^*, x_3 \sigma_{\alpha 3}^*, x_3^2 \sigma_{\alpha 3}^*] dx_3
 \end{aligned} \tag{20}$$

또한, 평형방정식에 대한 경계조건들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{u}_\alpha^o &= 0 \text{ or } \bar{N}_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 \\
 \delta \bar{\psi}_\alpha &= 0 \text{ or } \bar{M}_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 \\
 \delta \bar{u}_3^o &= 0 \text{ or } Q_\alpha \nu_\alpha = 0 \\
 \delta \bar{r}_1 &= 0 \text{ or } Q_\alpha^{(1)} \nu_\alpha = 0 \\
 \delta \bar{r}_2 &= 0 \text{ or } Q_\alpha^{(2)} \nu_\alpha = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

식 (19)에서 횡방향 전단 결과력을 제외한 나머지 항들은 FSDT_TN의 값들이며, 따라서 전단력이 무시할 수 있을 정도로 작은 경우에는 FSDT_TN와 같은 해를 갖는다.

2.5.2 변위 및 응력 성분들의 후처리 과정

복합재료 구조물의 열탄성 거동을 해석함에 있어서 두께 방향의 응력 분포를 정확하게 예측하는 것은 중요한 문제이다. 본 논문에서는 평형방정식을 통해 계산된 결과에 대하여 식 (4)에서 언급한 3차 zig-zag 변위장을 이용하여 변위 및 응력의 복원과정을 수행함으로써 두께방향의 응력 분포를 보다 정확하게 예측할 수 있도록 하였다. 이러한 후처리 과정은 3차 zig-zag 변위장의 변수들을 본 논문에서 유도된 EFSDTM_TN의 변수들로 표현하게 됨으로써 가능하다.

평균 변위의 일반적 정의는 다음과 같다.

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \min_{u_\alpha^o} (u_\alpha - \bar{u}_\alpha^o)^2 dx_3 = 0 \tag{22}$$

이는 기하학적 형상에 대하여 최소 자승 오차법(Least square sense)을 적용한 관계식이며, 식 (22)을 통하여 다음과 같은 관계식이 주어진다.

$$u_\alpha^o = \bar{u}_\alpha^o + \frac{h^2}{24} \bar{r}_{1,\alpha} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(a)} \rangle \phi_\beta - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(b)} \rangle \bar{r}_{2,\beta} \tag{23}$$

구해진 식 (23)에 의해서, 식 (4)에서 주어진 3차 zig-zag 변위장은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u_\alpha &= \bar{u}_\alpha^o + \frac{h^2}{24} \bar{r}_{1,\alpha} - \frac{1}{h} \bar{u}_{3,\alpha}^o x_3 - \frac{1}{2} \bar{r}_{1,\alpha} x_3^2 - \frac{1}{3} \bar{r}_{2,\alpha} x_3^3 \\
 &+ \left[\Phi_{\alpha\beta}^{(a)} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(a)} \rangle \right] \phi_\beta + \left[\Phi_{\alpha\beta}^{(b)} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(b)} \rangle \right] \bar{r}_{2,\beta} - c_\alpha
 \end{aligned}$$

$$u_3 = \bar{u}_3^o + \bar{r}_1 x_3 + \bar{r}_2 x_3^2 \tag{24}$$

여기서, c_α 는 3차 zig-zag 변위장과 일차전단변형이론의 변위장을 통해 얻어진 각각의 면내 결과력이 같다는 가정을 통하여 얻어지는 면내 보정함수이며, ϕ_β 는 식 (16)에 의해 EFSDTM_TN의 변수로 표현될 수 있다. 따라서 3차 zig-zag 변위장을 EFSDTM_TN의 변수만으로 표현할 수 있으며, 이러한 후처리 과정을 통하여 두께 방향에 대한 열응력 분포의 정확도를 향상시킬 수 있다.

2.6 수치예제 결과 및 고찰

논문에서 제시된 이론(EFSDTM_TN)의 정확도를 검증하기 위하여 2차원 복합재료 직교 적층평판의 열탄성 거동 해석을 수행하였다. 계산된 해석 결과들은 3차원 탄성해 및 참고문헌을 통하여 이용 가능한 다른 결과들과 비교분석하였다. 2차원 복합재료 적층평판의 형상 및 좌표는 Fig. 1을 통하여 나타내었다.

예제로 사용된 복합재료 적층평판의 각층의 물성치(ply material properties)는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 15E_{22}, \quad E_{22} = E_{33} = 10 \times 10^9 \text{ Gpa}, \\
 \nu_{12} &= \nu_{13} = 0.3, \quad \nu_{23} = 0.49, \\
 G_{12} &= G_{13} = 0.5E_{22}, \quad G_{23} = 0.3356E_{22}, \\
 \alpha_{11} &= 0.015\alpha_{22}, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1 \times 10^{-6} / K
 \end{aligned} \tag{25}$$

탄성해를 비롯한 모든 이론의 수치예제에 대하여 단순지지 경계 조건을 부과하였으며, 그에 따른 개선된 일차전단변형이론의 변수는 다음과 같이 가정된다.

$$\begin{aligned}
 [\bar{u}_1^o, \bar{\psi}_1] &= [U_1, \Psi_1] \cos\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2} y\right) \\
 [\bar{u}_2^o, \bar{\psi}_2] &= [U_2, \Psi_2] \sin\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L_2} y\right) \\
 [\bar{u}_3^o, \bar{r}_1, \bar{r}_2] &= [W, R_1, R_2] \sin\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2} y\right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

여기서, L_1, L_2 는 복합재료 구조물의 면내 축 방향에 대한 길이를 나타내며(Fig. 1), 열하중은 다음과 같이 고려하였다.

$$\theta(x_i) = (\bar{T}_0 + x_3 \bar{T}_1) \sin\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2} y\right) \tag{27}$$

계산된 응력 결과들에 대하여 다음과 같은 방식에 따라 무차원화를 수행하였다.

Table 1 Laminated composite plates theories compared

Reference	Theory	D.O.F
Reissner, 1945	FSDT	5(C^0)
Kim and Cho, 2007	EFSDTM	5(C^0)
Present	FSDT_TN	7(C^0)
Present	EFSDTM_TN	7(C^0)

$$[\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}, \tilde{\sigma}_{\alpha 3}] = \frac{[\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}]}{\alpha_{22} E_{22}} \quad (28)$$

Table 1에서는 본 논문에서 제시한 이론과 참고문헌을 통하여 얻어지는 다른 여러 복합재료 이론들에 대한 자유도 및 유한요소 연속조건을 비교하였다. Table 1을 통하여 본 논문에서 제시된 EFSDTM_TN은 횡방향 변위장을 포물선으로 가정한 일차전단변형이론(FSDT_TN)과 동일한 자유도를 갖는다는 사실을 알 수 있으며, 또한 유한요소 정식화 과정에 있어서 C^0 연속 조건을 만족하는 형상 함수만을 필요로 한다는 사실을 알 수 있다.

2.6.1 단층 평판의 전단응력 분포($T_0 \neq 0, T_1 = 0$)

Fig. 2는 균일 분포 열하중에 대하여 단층(single layer)으로 이루어진 복합재료 평판의 횡방향 전단응력 분포를 보여주고 있다. 이때, 계산된 결과는 길이 대 두께비가 5 ($L_1/h = L_2/h = 5$)인 경우로써, 비교적 두꺼운 적층평판 구조물에 대한 결과이다. 여기서 첨자(e)는 평형방정식을 통하여 얻어진 응력 분포임을 나타낸다.

Fig. 2에서 EFSDTM_TN의 횡방향 전단응력 분포결과의 경우 균일 분포 열하중에 대하여 탄성해와 같이 두께 방향으로 3차 곡선 형태의 응력 분포를 비교적 정확하게 표현해주

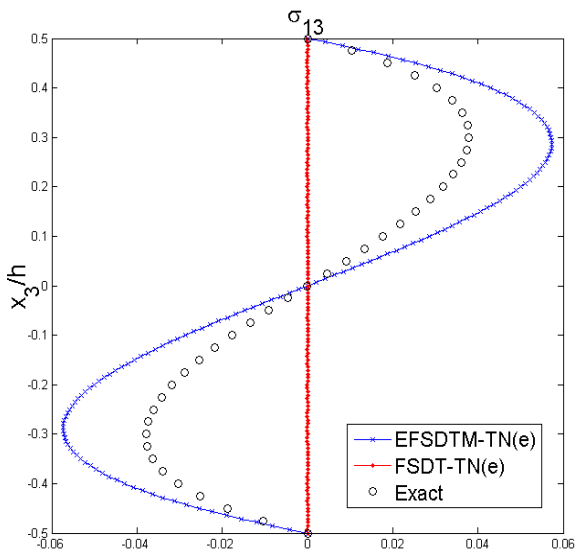


Fig. 2 Transverse shear stress of a single layer composite plates under uniform temperature rise

고 있지만, FSDT_TN의 경우 균일 분포 열하중에 대한 횡방향 전단응력 분포를 전혀 나타내지 못하는 것을 알 수 있다. 이는 전단 응력에 취약한 복합재료 구조물의 특성을 고려하였을 때, FSDT_TN은 열탄성 거동을 해석함에 있어서 중대한 취약점을 갖는다는 것을 의미한다. 반면, FSDT_TN과 거의 동일한 계산만을 수행한 후, 응력 복원과정을 통하여 응력 분포의 정확도를 향상시킨 EFSDTM_TN은 단층 복합재료 구조물에 대하여 비교적 정확한 열탄성 해석 결과를 제공한다는 것을 알 수 있다.

2.6.2 대칭 직교평판의 면내응력 분포($T_0 \neq 0, T_1 = 0$)

Fig. 3은 균일 분포 열하중에 대하여 $[0/90/90/0]$ 으로 구성된 대칭 직교평판의 면내응력 분포를 보여주고 있다. 대칭 직교평판의 경우 역시 길이 대 두께비가 5 ($L_1/h = L_2/h = 5$)인 경우로써, 비교적 두꺼운 적층평판 구조물에 대한 결과이다. Fig. 3에서는 FSDT_TN은 전체적 거동은 비교적 잘 표현해 주고 있지만, 각 층에 대한 국소적 거동은 잘 표현해 주지 못한다는 사실을 알 수 있다. 반면, EFSDTM_TN은 탄성해의 응력 분포와 비교하여 다소 오차가 발생하지만, 자유도가 같은 FSDT_TN의 결과와 비교하였을 때 전체적 거동은 물론 각 층에 대한 국소적 거동까지도 모두 정확도 높은 결과를 제공한다는 사실을 알 수 있다.

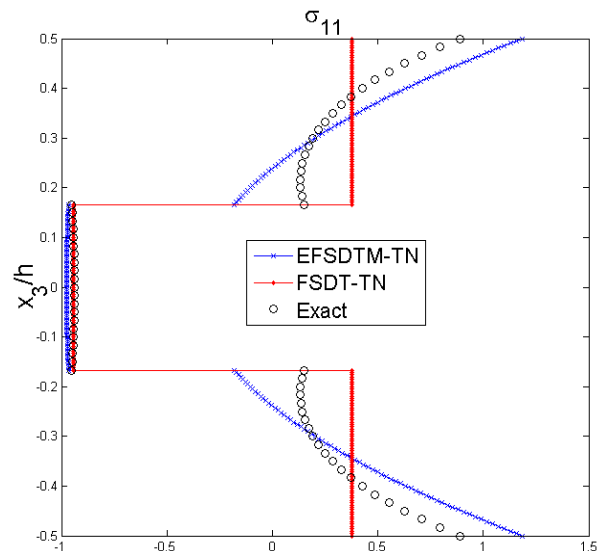


Fig. 3 In-plane stress of a $[0/90/90/0]$ composite plates under uniform temperature rise

2.6.3 비대칭 직교평판의 전단응력 분포($T_0 \neq 0, T_1 = 0$)

Fig. 4는 선형 분포 열하중에 대하여 $[0/90/0/90]$ 으로 구성된 비대칭 직교평판의 횡방향 전단응력 분포를 보여주고 있다. 비대칭 직교평판의 경우 역시 마찬가지로 길이 대 두

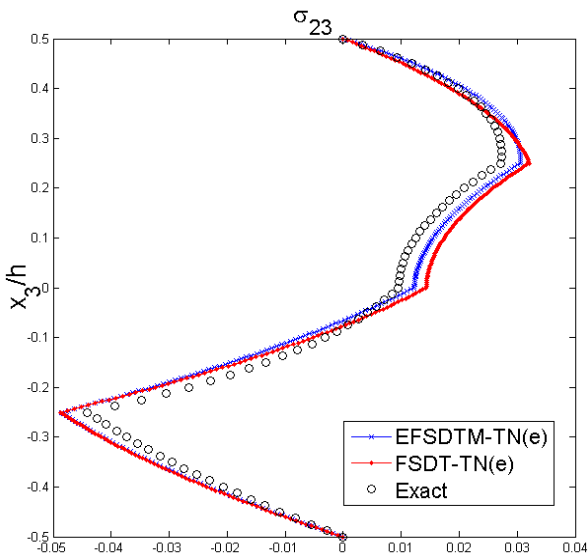


Fig. 4 Transverse shear stress of a [0/90/0/90] composite plates under linear temperature rise

깨비가 5 ($L_1/h = L_2/h = 5$)인 경우로써, 비교적 두꺼운 적층 평판 구조물에 대한 결과이다. Fig. 4에서는 EFSDTM-TN와 FSDT-TN의 결과들이 모두 탄성해의 응력분포와 비교하여 정확한 응력분포 결과를 제공한다는 사실을 알 수 있다. 이에 따라 선형 분포 열하중을 받는 비대칭 직교평판의 경우 본 논문에서 제안된 이론과 비교, 검증에 위한 이론 모두 비교적 정확한 횡방향 전단응력 분포의 예측이 가능하다는 사실을 알 수 있다.

지금까지의 수치예제를 통하여 본 논문에서 제시하는 EFSDTM-TN은 열탄성 거동 예측의 정확도와 계산의 효율성의 측면에서 보았을 때 다른 이론들에 비하여 고성능을 갖춘 유용한 이론임을 확인할 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 혼합변분이론을 통하여 횡방향 변위장이 포물선으로 가정된 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM-TN)을 제안하였다. 횡방향 응력장과 변위장은 각각 횡방향 변위장이 포물선으로 가정된 고차 지그재그 이론과 일차전단변형이론을 통하여 가정되며, 혼합변분이론을 통해 개선된 일차전단변형이론을 유도하였다. 계산된 값들에 대하여 최소 자승 오차법을 통한 변위 및 응력복원 과정을 거침으로써 변위 및 열응력 분포의 정확도를 비약적으로 향상시킬 수 있는 방안을 제시하였다. 마지막으로 수치예제를 통한 결과의 정확도를 비교, 검증함으로써, 본 논문에서 제시된 이론이 다른 이론들과 비교하여 비교적 정확한 복합재료 적층평판의 열응력 분포 결과를 제공한다는 사실을 알 수 있었다. 또한, 제시

된 계산과정이 다른 이론들의 계산과정과 비교하여 효율적임을 알 수 있었다.

본 연구에서 제안한 EFSDTM-TN은 FSDT-TN과 동일한 계산 과정만을 요구하는 반면 변위와 응력분포의 예측에 있어서는 FSDT-TN보다 정확한 결과를 보일 뿐만 아니라 탄성해와 비교하여 신뢰할 만한 정확한 결과를 나타내었다.

감사의 글

본 연구는 방위사업청과 국방과학연구소의 지원으로 수행되었으며(계약번호 UD100048JD), 또한 부분적으로 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국 연구 재단의 지원을 받아 수행되었습니다(No.2011-0014847). 이에 대해 깊이 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- Cho, M., Parmerter, R.R. (1992) An Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites, *Composite Structure*, 20, pp.113~123.
- Cho, M., Parmerter, R.R. (1993) Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations, *AIAA Journal*, 31, pp.1299~1306.
- Cho, M.H., Oh, J.H. (2004) Higher Order Zig-Zag Theory for Fully Coupled Thermo-Electric-Mechanical Smart Composite Plates, *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp.1331~1356.
- Di Sciuva, M. (1986) Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: An Evaluation of a New Displacement Model, *Journal of Sound and Vibration*, 105, pp.425~442.
- Jonnalagadda, K.D., Tauchert, T.R., Blandford, G.E. (1993) Higher Order Thermoelastic Composite Plate Theories, Analytical Comparison, *Journal of Thermal Stresses*, 16, pp. 265~284.
- Kapurja, S., Achary, G.G.S. (2004) An Efficient Higher Order Zigzag Theory for Laminated Plates Subjected to Thermal Loading, *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp.4661~4684.
- Kim, J.-S. (2007) Free Vibration of Laminated and Sandwich Plates using Enhanced Plate Theories, *Journal of Sound and Vibration*, 308, pp.268~286.

- Kim, J.-S., Cho, M.** (2007) Enhanced First-Order Theory Based on Mixed Formulation and Transverse Normal Effect, *International Journal of Solids and Structures*, 44, pp.1256~1276.
- Kim, J.-S., Cho, M.** (2006) Enhanced Modeling of Laminated and Sandwich Plates Via Strain Energy Transformation, *Composites Science and Technology*, 66, pp.1575~1587.
- Kim, J.-S., Cho, M.** (2006) An Accurate and Efficient Analysis of Composite Plates Based on Enhanced First-order Shear Deformation Theory, *Journal of Computational Structural Engineering*, 18, pp.407~418.
- Kim, J.-S., Han, J.-W., Cho, M.** (2011) On the Modification of a Classical Higher-Order Shear Deformation Theory to Improve the Stress Prediction of Laminated Composite Plates, *Journal of Computational Structural Engineering*, 24, pp.249~257.
- Levinson, M.** (1980) An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates, *Mechanics Research. Communications*, 7, pp.343~350.
- Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.** (1977) A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 44, pp.669~676.
- Mindlin, R.D.** (1951) Influence of Rotator Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 18, pp.31~38.
- Murakami, H.** (1986) Laminated Composite Plate Theory with Improved In-Plane Responses, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 53, pp.661~666.
- Murthy, M.V.V.** (1981) An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plates, *NASA Tech. Paper 1903*.
- Pagano, N.J.** (1969) Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending, *Journal of Composite Materials*, 3, pp.398~411.
- Reissner, E.** (1945) The Effects of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 12, pp.69~77.
- Reddy, J.N.** (1984) A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, *ASME: Journal of Applied Mechanics*, 51, pp.745~752.
- Rohwer, K., Rolfes, R., Sparr, H.** (2001) Higher Order Theories for Thermal Stresses in Layered Plates, *International Journal of Solids and Structures*, 38, pp.3673~3687.
- Seide, P.** (1980) An Improved Approximate Theory for the Bending of Laminated Plates, *Mechanics Today*, 5, pp.451~465.
- Zhen, W., Cheung, Y.K., Lo, S., Wanji, C.** (2010) On the Thermal Expansion Effects in the Transverse Direction of Laminated Composite Plates by Means of a Global-Local Higher-Order Model, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp.970~981.

요 지

본 논문에서는 일차전단변형 평판 이론(FSDT)의 개선을 통한 복합재료 적층평판의 효율적 열응력 해석 기법을 제안한다. 횡방향 응력 성분에 대해서만 변분을 취하는 혼합변분이론(Mixed variational theorem)을 이용하여 횡방향 변형에너지를 개선하였다. 가정된 횡방향 전단응력 성분들은 효율적 고차이론으로부터 구하였으며, 면내 변위 성분들은 일차적층평판 이론의 변위장을 사용하였다. 또한, 열응력 해석에 있어서 횡방향 수직 변형을 효과적으로 고려하기 위해서 횡방향 수직 변위를 두께방향에 대하여 포물선으로 가정하였다. 이 과정을 통하여 얻어진 전단변형 에너지를 본 논문에서는 횡방향 수직 변형이 고려된 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM_TN)이라고 명명하였다. 제안된 EFSDTM_TN은 복합재료 적층평판의 열탄성 거동을 해석함에 있어서 횡방향 수직 변형이 고려된 일차전단변형 평판 이론(FSDT_TN)과 비슷한 수준의 계산만을 필요로 하며, 동시에 후처리 과정을 통하여 열변형 및 열응력의 두께방향 분포를 정확하게 예측할 수 있도록 개선하였다. 계산된 결과는 FSDT_TN, 3차원 탄성해 등의 결과와 비교하여 검증하였다.

핵심용어 : 횡방향 수직 변형이 고려된 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM_TN), 혼합변분이론, 복합재료 적층평판, 횡방향 수직 변형, 열응력