

# 일반 곡면 좌표계에서 구현된 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

하윤도<sup>1</sup> · 윤민호<sup>2</sup> · 조선호<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>군산대학교 조선공학과, <sup>2</sup>서울대학교 조선해양공학과

## Isogeometric Shape Sensitivity Analysis in Generalized Curvilinear Coordinate Systems

Youn Doh Ha<sup>1</sup>, Minho Yoon<sup>2</sup> and Seonho Cho<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Dept. of Naval Architecture, Kunsan National University, Gunsan, 573-701, Republic of Korea

<sup>2</sup>Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Republic of Korea

### Abstract

Finite element analysis is to approximate a geometry model developed in computer-aided design(CAD) to a finite element model, thus the conventional shape design sensitivity analysis and optimization using the finite element method have some difficulties in the parameterization of geometry. However, isogeometric analysis is to build a geometry model and directly use the functions describing the geometry in analysis. Therefore, the geometric properties can be embedded in the NURBS basis functions and control points so that it has potential capability to overcome the aforementioned difficulties. In this study, the isogeometric structural analysis and shape design sensitivity analysis in the generalized curvilinear coordinate(GCC) systems are discussed for the curved geometry. Representing the higher order geometric information, such as normal, tangent and curvature, yields the isogeometric approach to be the best way for generating exact GCC systems from a given CAD geometry. The developed GCC isogeometric structural analysis and shape design sensitivity analysis are verified to show better accuracy and faster convergency by comparing with the results obtained from the conventional isogeometric method.

**Keywords** : Shape design sensitivity analysis, isogeometric analysis, NURBS basis functions, generalized curvilinear coordinate systems

### 1. 서 론

아이소-지오메트릭 해석법은 Cho *et al.*(2003)에 의해 기본 개념이 제안된 이후 Hughes *et al.*(2005)에 의해 수학적으로 정립되었다. 이 해석 방법론은 CAD 모델을 이산화하지 않고 해석에 직접 사용하기 때문에 유한요소법과 비교하여 보다 엄밀하게 기하학적 특성을 표현할 수 있고, 요소망 조밀화(Mesh refinement)과정이 매우 간단하다. 또한 경계에서의 법선 벡터와 곡률을 보다 더 정확하게 나타낼 수 있고, 최적화 진행에 따른 요소망의 재구성이 필요하지 않기 때문에 형상 설계민감도 해석과 최적설계 분야에서 다양한

연구가 활발하게 진행되어 왔다(Ha *et al.*, 2007; 2008; Cho *et al.*, 2009; 2010; Yun *et al.*, 2011).

전통적인 해석 방법론들과 비교하여 많은 강점을 가지고 있음에도 불구하고 아이소-지오메트릭 해석법은 몇 가지 방법론적인 문제점을 가지고 있다. CAD 모델을 구현하기 위해서는 일반적으로 3차 이상의 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) 기저 함수를 사용하기 때문에 피적분함수와 Jacobian(매개변수 변환 관계)이 비선형함수가 된다. 결과적으로 비선형 함수들을 수치적으로 적분하기 위해서 보다 많은 수의 적분점이 필요하게 된다. 또한 CAD 모델이 구현되는 직교좌표계에서 쉘 구조와 같은 곡면 구조를 모델링하고 해석

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr

Received November 7 2012; Revised December 1 2012;

Accepted December 2 2012

©2012 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

하기 위해서는 유한요소 기술 등에서 쉘 해석을 위해 널리 사용되는 Degenerated 솔리드 요소를 사용해야 한다(Benson *et al.*, 2010). 이 요소는 등 매개변수(Isoparametric) 변환을 통해 절점값들을 보간하여 솔리드 요소로부터 쉘 표면을 구성하기 때문에 정식화가 비교적 단순하다. 그러나 직교좌표계에 표현되는 절점 정보만으로 구성된 해석모델은 곡률과 같은 고차의 기하학적 정보를 고려하지 못하기 때문에 Bending-Stretching 연성효과가 포함된 기하학적으로 엄밀한 해석이 어렵다. 또한 표면(Surface) 모델임에도 불구하고 솔리드 요소를 적분해야 하기 때문에 두께 방향으로 추가적인 적분점이 필요하게 되어 실제 계산에 사용되는 적분점은 2차원 표면 모델 해석의 수 배가 되어 비효율적이다.

이러한 문제점들을 해결하기 위하여 본 연구에서는 쉘 이론에 기초한 곡면 모델 정식화를 한다. 쉘 이론에 기초한 유한요소 해석을 위해 일반 곡면 좌표계(GCC, Generalized curvilinear coordinates)를 사용하는 해석법이 Cho *et al.* (2003)에 의해 제안되어 아이소-지오메트릭 해석법의 시초가 되기도 하였다. 이 요소는 쉘 이론에 기초하여 개발되어서 Bending-Stretching 연성효과와 곡률을 표현할 수 있다. 그러나 이 요소를 사용하여 정식화하기 위해서는 곡면 부채를 표현하는 일반 곡면 좌표계가 필요하기 때문에 원통형, 구형 좌표계 등 비교적 잘 알려진 단순한 기하학적 형상에만 적용이 용이하다는 문제가 있다. 그에 반해 본 논문에서 제안하는 아이소-지오메트릭 해석법은 주어진 CAD 모델로부터 직접 일반 곡면 좌표계를 유도하기 때문에 임의의 곡면에 대해서 쉘 이론에 기초한 곡면 모델 정식화가 가능하다. 일반적으로 NURBS를 사용한 직교좌표계와 매개변수 좌표계의 변환은 비선형적인 반면, 유도된 일반 곡면 좌표계에서는 기저 함수가 절점마다 방향과 크기가 다르게 정의되어 곡면 좌표계가 매개변수 좌표계로부터 선형적으로 변환된다. 따라서 매개변수 변환 관계식인 Jacobian이 상수가 되어 기존 해석법에 비해 수치 적분의 효율면에서 유리하다. 또한 솔리드 요소가 아닌 2차원 표면 요소이기 때문에 두께 방향 적분도 필요가 없어서 더 효율적인 해석이 가능하다. 또한 법선, 접선, 곡률을 비롯한 고차의 기하학적 정보가 CAD 모델로부터 엄밀하게 계산되어 곡면 모델 정식화에 도입될 수 있다. 결과적으로 동일한 수치 계산 조건 하에서 기존의 아이소-지오메트릭 해석법으로 구현된 쉘 해석(Degenerated 솔리드 해석)보다 일반 곡면 좌표계에서 구현된 해석법이 더 높은 정확도와 빠른 수렴속도를 구현할 수 있었다.

## 2. NURBS 기저함수

1차원 공간에서 다음과 같이 표현된 노트(knot) 벡터를 고려하자.

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m+p+1}\} \quad (1)$$

여기서,  $p$ 와  $m$ 은 각각 기저 함수의 차수와 숫자를 의미한다. 노트들은 동일 좌표에서 반복될 때 동일한 이름으로 반복되며, 끝단의 노트가  $(p+1)$ 번 반복되면 열려있다고 한다. B-스플라인 기저 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_i^0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, (p=0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \phi_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \phi_{i+1}^{p-1}(\xi), (p=1,2,3,\dots) \quad (3)$$

또한 B-스플라인 함수는 다음과 같은 기저 함수로서의 조건을 충족시킨다.

- (A)  $\sum_{i=1}^m \phi_i^p(\xi) = 1$  (Partition of unity)
- (B)  $\phi_i^p$ 는 구간  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ 내에 포함된다. (Compactness)
- (C)  $\phi_i^p(\xi) \geq 0$  (Non-negativity)

NURBS 곡선은 기저 함수와 조정점  $P_i = P(x_i)$ 의 선형 결합으로 얻어진다.  $m$ 개의  $p$ 차 B-스플라인 기저함수와 조정점으로 구성되는 NURBS 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^m L_i^p(\xi) P_i \quad (4)$$

여기서,

$$L_i^p(\xi) = \phi_i^p(\xi) \omega_i / \sum_{j=1}^m \phi_j^p(\xi) \omega_j \quad (5)$$

$$\omega_i = (P_i^w)_{d+1} \quad (6)$$

$$(P_i)_\ell = (P_i^w)_\ell / \omega_i, (\ell=1,2,\dots,d) \quad (7)$$

$P_i^w$ 는  $R^{d+1}$  공간에서의 B-스플라인 곡선의 조정점 세트이다. 만약 가중치  $\omega_i$ 가 모두 동일하다면 NURBS 곡선은 B-스플라인 곡선과 동일하게 된다. NURBS에 대한 더 자세한 설명은 Piegl *et al.* (1997)에 수록되어 있다.

## 3. 일반 곡면 좌표계에서의 아이소-지오메트릭 해석

### 3.1 곡선보(Curved beam)의 운동학

Fig. 1과 같은 일반 곡면 좌표계  $\theta^1$ 에서 위치벡터  $\mathbf{r}$ 의 미분소는 다음과 같다.

$$d\mathbf{r} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{d\theta^1} d\theta^1 = \mathbf{a}_1 d\theta^1 \quad (8)$$

여기서,  $\mathbf{a}_1$ 은 좌표  $\theta^1$ 의 공변(Covariant) 기저벡터이다. 접평면(Tangent plane)  $\theta^1 \times \theta^3$ 는 법선방향 곡률이 최대가 되는 곳에서 정의된다. 좌표  $\theta^3$ 의 공변 기저벡터  $\mathbf{a}_3$ 는  $\mathbf{a}_1$ 에 수직이며, 두 기저 모두 단위벡터로 정의한다. 법선 좌표(Surface normal coordinate)  $\theta^2$ 에 대해 공변 기저벡터는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1|} \quad (9)$$

모든 공변 기저 벡터가 단위벡터이고 서로 직교하므로 그들의 역(Reciprocal) 기저벡터와 또한 동일하다:  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}^1$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}^2$ ,  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$ .

일차 전단 변형을 고려한 곡선보는 쉘의 정식화로부터 유도될 수 있다. Fig. 1에 주어진 좌표계와 자유도를 사용하여 곡선보의 변형률들은 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = \frac{du}{d\theta^1} - u\Gamma_{11}^1 - b_{11}w \quad (10)$$

$$\kappa = -\frac{d\psi}{d\theta^1} + \psi\Gamma_{11}^1 \quad (11)$$

$$\gamma = ub_1^1 + \frac{dw}{d\theta^1} - \psi \quad (12)$$

여기서,  $\varepsilon, \kappa, \gamma$ 는 각각 축방향, 굽힘, 전단 변형률이다. 곡률 텐서 계수는 제2 기본 표면식(Second fundamental form of surfaces)으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$b_{11} = \mathbf{a}_2 \cdot \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta^1} = a_{11}b_1^1 = b_1^1 \quad (13)$$

또한 기저의 변화율인 제2 크리스토펬 심볼은 다음과 같다.

$$\Gamma_{11}^k = \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta^1} \cdot \mathbf{a}^k = \frac{d\mathbf{a}_1}{d\theta^1} \cdot \mathbf{a}_k \quad (14)$$

### 3.2 일반 곡면 좌표계에서 아이소지오메트릭 정식화

Fig. 1에서 정의된 일반 곡면 좌표계  $\theta^1$ 에서 길이가  $L$ 인 곡선보를 고려하자. 변위 벡터  $\mathbf{z} = [z^1 \ z^2 \ z^3]^T$ 와 힘 벡터  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$ 에 대해 전 퍼텐셜 에너지(Total potential

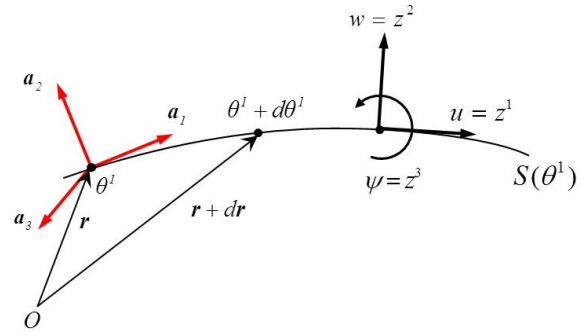


Fig. 1 Curved beam geometry and degrees of freedom energy)는 다음과 같다.

$$\Pi = U_a + U_b + U_s - \int_0^L f_i z^i d\theta^1 \quad (15)$$

여기서,  $U_a, U_b, U_s$ 는 각각 축방향, 굽힘, 전단 변형 에너지이다.  $f_1, f_2, f_3$ 는 또한 각각 축방향, 전단방향 외력과 분포 모멘트이다. 변형에너지들은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$U_a = \int_0^L \frac{1}{2} EA [\varepsilon(\mathbf{z})]^2 d\theta^1 \quad (16)$$

$$U_b = \int_0^L \frac{1}{2} EI [\kappa(\mathbf{z})]^2 d\theta^1 \quad (17)$$

$$U_s = \int_0^L \frac{1}{2} kGA [\gamma(\mathbf{z})]^2 d\theta^1 \quad (18)$$

여기서,  $E$ 는 영률,  $G$ 는 전단률 물성치이며,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 관성모멘트이다.  $k$ 는 전단 수정 인자로 보통 5/6이다. 변형률식 (10~12)로부터 축방향, 굽힘, 전단 변형률은 각각 다음과 같다.

$$\varepsilon(\mathbf{z}) = \left( \frac{d}{d\theta^1} - \Gamma_{11}^1 \right) z^1 + (-b_{11})z^2 \quad (19)$$

$$\kappa(\mathbf{z}) = \left( -\frac{d}{d\theta^1} + \Gamma_{11}^1 \right) z^3 \quad (20)$$

$$\gamma(\mathbf{z}) = b_1^1 z^1 + \frac{dz^2}{d\theta^1} - z^3 \quad (21)$$

전 퍼텐셜 에너지 원리로부터 다음을 얻는다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \ell(\bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} = [\bar{z}^1 \ \bar{z}^2 \ \bar{z}^3]^T \in \bar{Z} \quad (22)$$

여기서, 선형 에너지 식과 선형 힘 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_0^L [EA\varepsilon(\mathbf{z})\varepsilon(\bar{\mathbf{z}}) + EI\kappa(\mathbf{z})\kappa(\bar{\mathbf{z}}) + kGA\gamma(\mathbf{z})\gamma(\bar{\mathbf{z}})] d\theta^1 \quad (23)$$

$$\ell(\bar{\mathbf{z}}) = \int_0^L f_i \bar{z}^i d\theta^1 \quad (24)$$

변분공간은 다음과 같다.

$$\bar{Z} = \{\bar{\mathbf{z}} \in [H^1(\theta^1)]^3 : \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma^D\} \quad (25)$$

여기서,  $\Gamma^D$ 는 변위 경계이다.

등 매개변수 변환을 사용하여 기하학적 절점  $\mathbf{x}$  (직교좌표계) 혹은  $\varphi$  (곡면좌표계)와 응답(Response) 벡터  $\mathbf{z}$ 를 NURBS 기저 함수와 조정점에서의 계수들로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^{CP} L_i^p(\xi) \mathbf{P}_i \quad (26)$$

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{CP} L_i^p(\xi) \beta_i \quad (27)$$

$$\mathbf{z}(\xi) = \sum_{i=1}^{CP} L_i^p(\xi) \mathbf{y}_i \quad (28)$$

여기서,  $\mathbf{P}_i$ 와  $\beta_i$ 는 각각 직교좌표계와 곡면좌표계에서의 조정점 위치이다.  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(\theta^1) = [z_i^1 \ z_i^2 \ z_i^3]^T$ 는 조정점에서의 응답 계수이다. CP는 총 조정점 수이다.  $\mathbf{x}$ 와  $\varphi$ 는 기준이 되는 좌표계만 다를 뿐 동일한 기하학적 위치를 표현한다. 이들을 이용하여 식 (22)는 다음과 같이 다시 표현될 수 있다.

$$a(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \ell(\bar{\mathbf{y}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^{CP} L_i^p(\xi) \bar{\mathbf{y}}_i \in \bar{Z} \quad (29)$$

여기서,

$$a(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \int_0^L \sum_{i,k}^{CP} EAB_{ii}^a(\xi) B_{kk}^a(\xi) y_i^j \bar{y}_k^j d\theta^1 + \int_0^L \sum_{i,k}^{CP} EIB_{ii}^b(\xi) B_{kk}^b(\xi) y_i^j \bar{y}_k^j d\theta^1 + \int_0^L \sum_{i,k}^{CP} kGAB_{ii}^s(\xi) B_{kk}^s(\xi) y_i^j \bar{y}_k^j d\theta^1 \quad (30)$$

$$\ell(\bar{\mathbf{y}}) = \int_0^L \sum_{i=1}^{CP} f_i L_i^p(\xi) \bar{y}_i^j d\theta^1 \quad (31)$$

이다. 식 (19~21)을 통해,

$$\mathbf{B}_i^a(\xi) = \left[ \left\{ \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dL_i^p(\xi)}{d\xi} - \Gamma_{11}^1 L_i^p(\xi) \right\} \quad -b_{11} L_i^p(\xi) \quad 0 \right] \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_i^b(\xi) = \left[ 0 \quad 0 \quad \left\{ - \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dL_i^p(\xi)}{d\xi} + \Gamma_{11}^1 L_i^p(\xi) \right\} \right] \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_i^s(\xi) = \left[ b_{11} L_i^p(\xi) \quad \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} \frac{dL_i^p(\xi)}{d\xi} \quad -L_i^p(\xi) \right] \quad (34)$$

여기서,  $d\theta^1/d\xi$ 는  $\theta^1$ 와  $\xi$ 에 대한 변환 관계식인 Jacobian이다.

공변 기저벡터는 NURBS 곡선을  $\theta^1$ 에 대해 일차 미분을 취하여 계산될 수 있다.

$$\mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta^1} = \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} \sum_{i=1}^{CP} \frac{dL_i^p(\xi)}{d\xi} \mathbf{P}_i \quad (35)$$

단위 기저벡터를 구성하기 위해,

$$\frac{d\theta^1}{d\xi} = \left| \sum_{i=1}^{CP} \frac{dL_i^p(\xi)}{d\xi} \mathbf{P}_i \right| \quad (36)$$

가 되는 것을 알 수 있다. 식 (36)으로부터  $\theta^1$ 와  $\xi$ 가 길이차원(선형)으로 변환되는 것을 알 수 있다.

#### 4. 일반 곡면 좌표계에서의 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

##### 4.1 전미분

Fig. 2와 같은 선분 영역의 변화는 매개변수  $\tau$ 를 이용하여 변환  $T$ 로 표현할 수 있다.

$$\theta_\tau^1 \equiv T(\theta^1, \tau) \quad \text{여기서, } \theta^1 = \theta^1 \mathbf{a}_1 \quad (37)$$

$$S_\tau \equiv T(S, \tau) \quad (38)$$

영역이 변화할 때 설계속도와 이를 이용한 응답의 전미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}(\theta_\tau^1, \tau) \equiv \frac{d\theta_\tau^1}{d\tau} = \frac{dT(\theta^1, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\theta^1, \tau)}{\partial \tau} \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{z}} \equiv \frac{d}{d\tau} \mathbf{z}_\tau(\theta^1 + \tau \mathbf{V}(\theta^1)) \Big|_{\tau=0} = \mathbf{z}' + \nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V} \quad (40)$$

여기서,  $\mathbf{z}'$ 은 편미분이고  $\nabla \mathbf{z}$ 는  $\mathbf{a}_1 \frac{d}{d\theta^1} (z^j \mathbf{a}_j)$ 가 된다.

또한 영역의 적분형태로 표현된 성능함수의 설계민감도는 전미분을 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\Phi = \int_S f(\theta^1) dS \quad (41)$$

$$\Phi' \equiv \frac{d}{d\tau} \int_{S_\tau} f_\tau(\theta_\tau^1) dS_\tau \Big|_{\tau=0} = \int_S \frac{d}{d\tau} [f_\tau(\theta_\tau^1) |J|] \Big|_{\tau=0} dS = \int_S [f'(\theta^1) + \nabla f(\theta^1)^T \mathbf{V}(\theta^1) + f(\theta^1) \text{div} \mathbf{V}(\theta^1)] dS \quad (42)$$

여기서,  $\text{div} \mathbf{V}(\theta^1) = \mathbf{a}_1 \frac{d}{d\theta^1} \cdot (V^j \mathbf{a}_j)$ 가 된다. 또한 본 연구에

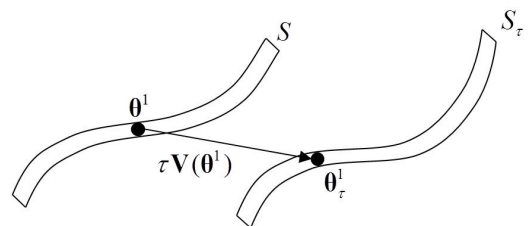


Fig. 2 Design variation of line

서 유도되는 설계민감도 식은 1차원 일반 곡면 좌표계  $\theta^1$ 에 대해 유도된다.

### 4.2 직접미분법에 의한 설계민감도 정식화

식 (22)에 대해서 설계변수에 대한 변분을 취하고 아이소-지오메트릭 해석 관점에서 이산화를 하면 다음과 같다.

$$a(\dot{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = \ell'_V(\bar{\mathbf{y}}) - a'_V(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} = \sum_{I=1}^{CP} L_I^p(\xi) \bar{\mathbf{y}}_I \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (43)$$

$$a(\dot{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} [EAB_{II}^a B_{KK}^a + EIB_{II}^b B_{KK}^b + kGAB_{II}^s B_{KK}^s] \dot{\mathbf{y}}_I^j \bar{\mathbf{y}}_K^k d\theta^1 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \ell'_V(\bar{\mathbf{y}}) &\equiv \ell'(\bar{\mathbf{y}}) - \ell(\nabla \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{V}) \\ &= \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} [f_{I,1} V^1 L_I^p + f_{j,I} V^j \Gamma_{j,1}^I L_I^p + f_i (V_{,1}^i + V^i \Gamma_{1,1}^i) L_I^p] \bar{\mathbf{y}}_I^j d\theta^1 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} a'_V(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) &\equiv a'(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) - a(\nabla \mathbf{y}^T \mathbf{V}, \bar{\mathbf{y}}) - a(\mathbf{y}, \nabla \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{V}) \\ &= \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} EA [B_{II,1}^a V^1 B_{KK}^a + B_{II}^a B_{KK,1}^a V^1] \dot{\mathbf{y}}_I^j \bar{\mathbf{y}}_K^k d\theta^1 \\ &+ \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} EI [B_{II,1}^b V^1 B_{KK}^b + B_{II}^b B_{KK,1}^b V^1] \dot{\mathbf{y}}_I^j \bar{\mathbf{y}}_K^k d\theta^1 \\ &+ \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} kGA [B_{II,1}^s V^1 B_{KK}^s + B_{II}^s B_{KK,1}^s V^1] \dot{\mathbf{y}}_I^j \bar{\mathbf{y}}_K^k d\theta^1 \\ &+ \int_0^L \sum_{I,K}^{CP} [EAB_{II}^a B_{KK}^a + EIB_{II}^b B_{KK}^b + kGAB_{II}^s B_{KK}^s] \dot{\mathbf{y}}_I^j \bar{\mathbf{y}}_K^k (V_{,1}^i + V^i \Gamma_{1,1}^i) d\theta^1 \end{aligned} \quad (46)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_{I,1}^a V^1 = \left[ \left\{ \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} V^1 \frac{dL_I^p}{d\xi} - \Gamma_{1,1,1}^I V^1 L_I^p \right\} \quad -b_{1,1,1} V^1 L_I^p \quad 0 \right] \quad (47)$$

$$\mathbf{B}_{I,1}^b V^1 = \left[ 0 \quad 0 \quad \left\{ - \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} V^1 \frac{dL_I^p}{d\xi} + \Gamma_{1,1,1}^I V^1 L_I^p \right\} \right] \quad (48)$$

$$\mathbf{B}_{I,1}^s V^1 = \left[ b_{1,1,1}^s V^1 L_I^p \quad \left( \frac{d\theta^1}{d\xi} \right)^{-1} V^1 \frac{dL_I^p}{d\xi} \quad 0 \right] \quad (49)$$

노트 공간은 형상 변화에 대해 고정되었다고 가정한다. 식 (26)과 (39)를 사용하면 설계 속도는 NURBS 기저 함수로부터 직접 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\mathbf{V}(\xi) = \frac{d}{d\tau} \left[ \sum_{I=1}^{CP} L_I^p \{ \mathbf{P}_I + \tau \delta \mathbf{P}_I \} \right] \Big|_{\tau=0} = \sum_{I=1}^{CP} L_I^p \delta \mathbf{P}_I \quad (50)$$

설계민감도 해석에 대한 전반적인 설명은 Haug *et al.* (1986)을 참고하기 바란다.

## 5. 수치예제

### 5.1 기존 아이소-지오메트릭 해석법과 비교

이 장에서는 직교좌표계(RCC)에서 유도되는 기존의 아이소-지오메트릭 해석법과 곡면좌표계(GCC)에서의 아이소-지오메트릭 해석법을 비교한다. 일반적으로 NURBS로 표현되는 CAD 형상은 직교좌표계에서 표현된다. 따라서 기존의 아이소-지오메트릭 해석법에서는 매개변수 좌표계  $\xi$ 를 직교좌표계  $\mathbf{x}$ 로 직접 변환한다. 따라서 응답 벡터  $\mathbf{z}$ 의  $\mathbf{x}$ 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}}(\xi) = \sum_{I=1}^{CP} \frac{\partial L_I^p(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}_I \quad (51)$$

식 (51)은 선형 에너지 식을 구성한다. 곡면을 구성하기 위해서는 일반적으로 2차 이상의 NURBS를 사용하기 때문에,  $\partial L_I^p(\xi)/\partial \xi$ 와 Jacobian  $\partial \mathbf{x}/\partial \xi$ 는 비선형 변환에 의해 상수가 아닌  $\xi$ 에 대한 함수가 된다. 일반 곡면 좌표계에서 유도되는 아이소-지오메트릭 해석법에서는 NURBS 곡면 정보로부터 일반 곡면 좌표계  $\theta^1$ 를 구성하여 매개변수 좌표계와 직교좌표계를 중계하게 한다. 따라서 응답 벡터  $\mathbf{z}$ 의 편미분은  $\mathbf{x}$ 가 아닌  $\theta^1$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \theta^1}(\xi) = \sum_{I=1}^{CP} \frac{\partial L_I^p(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta^1} \mathbf{y}_I \quad (52)$$

식 (52)는 식 (23)에 주어진 선형 에너지 식을 구성한다. 이 경우에는 Jacobian  $\partial \theta^1/\partial \xi$ 이 선형 변환(식 (36)참조)에 의해 상수가 되기 때문에 수치적분에서 이점이 있다. 또한 기존의 해석법으로 쉘 모델을 정식화하면 Degenerated 솔리드 모델을 구성하게 되어 두께 방향으로 추가적인 적분이 필요하기 때문에 실제 계산에 소요되는 적분점의 수는 수 배의 차이가 있다.

일반 곡면 좌표계에서 구성되는 아이소-지오메트릭 해석법은 곡면 기하 모델에서 추가적인 장점이 나타난다. 기존 아이소-지오메트릭 해석법의 정식화에 사용되는 식 (51)은 1차 기하 정보 ( $\partial \mathbf{x}/\partial \xi$ )까지 포함하며 그 이상의 고차 정보(곡률 등)는 고려되지 않는다. 일반 곡면 좌표계에서의 아이소-지오메트릭 해석법의 곡선보 정식화에 사용되는 식 (52)에는 기하학적 정보가 직접 나타나지 않고 다만 곡면 좌표계  $\theta^1$ 와 매개변수 좌표계  $\xi$ 의 길이 차원 변환( $\partial \theta^1/\partial \xi$ )만 나타난다. 그러나 법선, 접선, 곡률을 비롯한 고차의 기하학적 정보가 NURBS 모델로부터 직접 계산되어 변형률 계산에 도입된다(식 (19)~(21), (32)~(34) 참조). 이때 고차의 기하학적 정보는 식 (52)와 별도로 계산되어 곡선보 정식화에 추가되기 때문에 선형 에너지식 (23)을 구성하는 피적분함수의 차수 및 정확도와 무관하게 엄밀하게 계산된다.

결과적으로 일반 곡면 좌표계에서 정의되는 아이소-지오메트릭 해석법은 기존의 직교 좌표계에서 정의되는 해석법에 비해 보다 효율적이고 정확하게 수치적분이 가능하며 보다 높은 차수의 기하 정보를 엄밀하게 고려할 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안된 아이소-지오메트릭 해석법은 보다 나은 정확도와 빠른 수렴속도를 보장한다. 이는 다음의 수치예제를 통해 검증한다.

### 5.2 곡선보 구조 해석

Fig. 3과 같은 4분원 곡선보 모델을 2차 NURBS 기저 함수로 생성한다. 곡선보는 길이  $h$ 가 0.1m인 정사각 단면을 가지고 반지름  $R$ 은 1m이다. 또한 왼쪽 끝단은 고정되어 있고 오른쪽 끝단은 원주 방향 하중  $Q=100N$ 을 받고 있다. 영률은 27.6MPa이며, 포아송비는 0.3이다. 곡선보를 일반 곡면 좌표계(GCC)에서의 아이소-지오메트릭 해석법으로 해석하여 기존의 직교좌표계(RCC)에서의 아이소-지오메트릭 해석 결과와 비교한다. 적분영역은 노트 벡터로부터 구성된다. 이 때 반복되는 노트는 적분영역에서는 하나의 노트로 취급하며 이웃한 두 노트로 구성되는 영역을 최소 적분 영역으로 정하였다.

Fig. 4에서 하중 지점의 해를 RCC와 GCC에서의 아이소-지오메트릭 해석 관점에서 각각 계산하여 비교하였다. 모든 해는 국부 좌표계에서 표현되었고  $u, w, \psi$ 는 각각 축방향, 전단방향 변위와 회전량을 의미한다. 모든 해는 해석해에 대

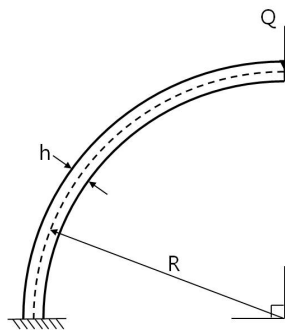


Fig. 3 A quarter ring with a radial load at tip

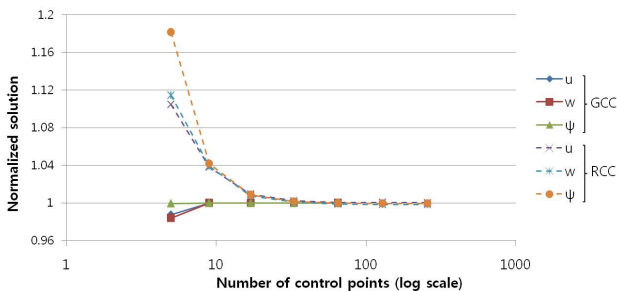


Fig. 4 Normalized solutions at the loading tip with RCC and GCC-based approaches

해 정규화되었기 때문에 1에 근접할수록 정확하다. 조절점의 수를 5에서 257까지 대략 2배씩 증가시키면서 해석을 수행하여 가로축에 로그 스케일로 표시하였다. GCC 아이소-지오메트릭 해석 결과가 RCC 결과에 비해 더 빠르고 정확하게 수렴하였다. 조절점을 5개 사용한 모델에서 변위 결과는 98%이상 정확하며 회전량은 99.9%이상 정확하다. 9개 이상의 조절점을 사용하면 GCC 아이소-지오메트릭 해석결과는 모두 99.9%이상 정확하였다. 반면에 기존의 RCC 아이소-지오메트릭 해석결과는 GCC 결과에 비해 현저히 느리게 수렴하며 적은 수의 조절점을 사용한 모델에서 상대적으로 큰 오차를 가진다. 특히 조절점을 5개 사용한 모델에서는 대략 8%이상의 오차를 보이며 회전량에서는 18%이상의 오차가 발생하였다. 99.8%의 정확도를 얻기 위해 RCC 아이소-지오메트릭 해석 모델은 GCC 모델에 비해 3배이상 많은 33개의 조절점이 필요하였다.

### 5.3 곡선보 형상 설계민감도 해석

본 장에서는 4장에서 유도한 GCC 기반 아이소-지오메트릭 모델의 형상 설계민감도 해석결과를 기존의 RCC 기반 형상 설계민감도 결과와 비교, 검증한다. 검증 모델은 Fig. 3에서 보인 4분원 곡선보가 된다.

Fig. 5와 같이 모든 조절점들의 위치를 반지름 방향으로 0.1% 변동시키는 반지름 방향의 설계변경에 대해 형상 설계민감도를 계산한다. Fig. 6에서 하중 지점의 설계민감도 값

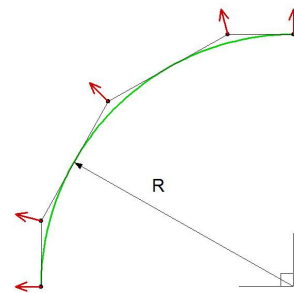


Fig. 5 Radial perturbation of the shape and velocity fields at control points

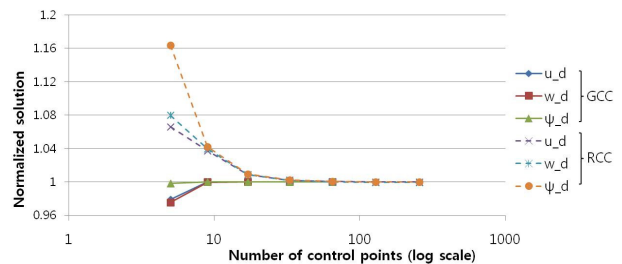


Fig. 6 Normalized sensitivities at the loading tip with RCC and GCC-based approaches

을 RCC와 GCC에서의 아이소-지오메트릭 해석관점에서 각각 계산하여 비교하였다. 모든 설계민감도 값은 해석해의 민감도에 대해 정규화되었다. 구조 해석결과와 유사하게 GCC 아이소-지오메트릭 설계민감도 해석결과가 RCC 민감도 결과에 비해 더 빠르고 정확하게 수렴하였다. GCC 기반 민감도 해석 결과와 유사한 정확도를 얻기 위해 RCC 기반 민감도 해석은 65개 이상의 조절점을 사용한 모델이 필요하였다.

이상과 같이 본 연구에서 개발한 일반 곡면 좌표계에 기반한 아이소-지오메트릭 해석법은 구조 응답 해석뿐만 아니라 형상 설계민감도 해석에서도 기존의 아이소-지오메트릭 해석 방법론과 비교하여 우월한 결과를 보여준다.

## 8. 결 론

본 연구에서는 일반 곡면 좌표계에서 아이소-지오메트릭 해석법을 구현하여 곡면 부재(곡선보)에 대해 기하학적으로 엄밀한 구조 해석 및 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 기존의 아이소-지오메트릭 관점에서는 CAD로부터 받은 기하학 정보의 손실없이 해석 모델을 구현할 수 있지만 직교좌표계로 표현되는 해 공간에서는 고차의 기하학적 정보가 고려되지 않는다는 문제가 있다. 반면에 본 연구에서 제안하는 모델은 주어진 CAD로부터 직접 일반 곡면 좌표계를 생성하여 해 공간을 표현하기 때문에 고차의 기하학적 정보(법선 벡터와 곡률 등)를 고려한 해석이 가능하다. 특히 곡면 부재 해석 측면에서는 고차의 기하학적 정보의 활용과 수치적분의 효율성 때문에 기존 해석법보다 정확한 해를 작은 수의 조정점을 사용해서(빠른 수렴속도) 얻을 수 있다. 형상 설계민감도 해석 측면에서는 법선 벡터와 곡률 등의 설계 구배를 또한 엄밀하게 고려할 수 있으므로 더욱 정확한 설계민감도를 얻을 수 있다. 나아가 NURBS 기저함수를 이용하여 자연스러운 설계 속도장을 표현할 수 있고, 요소 재구성없이 형상을 변화시킬 수 있다는 아이소-지오메트릭 해석법의 장점과 본 연구에서 제안한 기하학적으로 엄밀한 접근법의 장점을 결합하여 형상 최적설계 기술개발 연구에도 기여할 수 있다.

## 감사의 글

본 연구는 교육과학기술부의 지원에 의한 창의적 연구사업단(과제관리번호 2010-18282)의 지원을 받아 진행되었습니다. 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

- Ahn, S., Kim, M.G., Cho, S. (2010) Isogeometric Shape Design Optimization of Structures under Stress Constraints, *Journal of Computational Structural Engineering*, 23(4), pp.275~282.
- Benson, D.J., Bazilevs, Y., Hsu, M.C., Hughes, T.J.R. (2010) Isogeometric Shell Analysis: The Reissner-Mindlin Shell, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, pp.276~289.
- Cho, M., Roh, H.Y. (2003) Development of Geometrically Exact New Shell Elements Based on General Curvilinear Coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(1), pp.81~115.
- Cho, S., Ha, S.H. (2009) Isogeometric Shape Design Optimization: Exact Geometry and Enhanced Sensitivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(1), pp.53~70.
- Ha, S.H., Cho, S. (2007) Shape Design Sensitivity Analysis Using Isogeometric Approach, *Journal of Computational Structural Engineering*, 20(3), pp.339~345.
- Ha, S.H., Cho, S. (2008) Shape Design Optimization Using Isogeometric Analysis, *Journal of Computational Structural Engineering*, 21(3), pp.233~238.
- Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V. (1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, New York.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005) Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.4135~4195.
- Piegl, L., Tiller, W. (1997) The NURBS Book (Monographs in Visual Communication), 2<sup>nd</sup> edn., Springer-Verlag, New York.
- Yoon, M., Koo, B.Y., Ha, S.H., Cho, S. (2010) Isogeometric Shape Design Optimization of Structures Subjected to Design-dependent Loads, *Journal of Computational Structural Engineering*, 24(1), pp.1~7.

---

## 요 지

유한요소 해석법에서는 CAD 모델을 유한요소 모델로 이산화하기 때문에 CAD와 해석 모델의 차이로 인해 형상 설계민감도 및 최적설계에서 설계영역 매개 변수화에 어려움이 있다. 반면에 아이소-지오메트릭 해석법은 CAD 모델과 동일한 NURBS 기저함수와 조정점을 해석에 이용함으로써 설계의 기하학적 변화를 해석모델에 직접적으로 표현할 수 있기 때문에 전술된 여러 어려움들을 개선할 수 있다. 본 연구에서는 일반 곡면 좌표계에서 아이소-지오메트릭 해석 모델을 정식화하여 곡면 부재에 대한 구조해석과 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 아이소-지오메트릭 해석에서는 법선, 접선, 곡률 등과 같은 고차의 기하학적 정보들이 엄밀하게 표현될 수 있기 때문에 주어진 CAD 모델에 적합한 일반 곡면 좌표계를 생성해 낼 수 있다. 기존의 아이소-지오메트릭 구조해석 및 설계민감도 해석 결과와 비교하여 제안된 해석방법론이 더 정확한 해와 더 빠른 수렴성을 보이는 것을 확인하였다.

**핵심용어** : 형상 설계민감도 해석, 아이소-지오메트릭 해석법, NURBS 기저함수, 일반 곡면 좌표계