

국부 및 혼합 Lagrange 승수법을 이용한 영역분할 기반 유한요소 구조해석 기법 개발

곽 준 영¹ · 조 해 성¹ · 신 상 준^{1*} · 올리비에 보쇼²

¹서울대학교 기계항공공학부, ²미시간-상해교통대 연합대학교 기계공학부

Development of Finite Element Domain Decomposition Method Using Local and Mixed Lagrange Multipliers

Jun Young Kwak¹, Hae Seong Cho¹, Sang Joon Shin^{1*} and Olivier A. Bauchau²

¹School of Mechanical and Aerospace Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Republic of Korea

²Department of Mechanical Engineering, University of Michigan-Shanghai Jiao Tong University Joint Institute, Shanghai, 200240, China

Abstract

In this paper, a finite element domain decomposition method using local and mixed Lagrange multipliers for a large scale structural analysis is presented. The proposed algorithms use local and mixed Lagrange multipliers to improve computational efficiency. In the original FETI method, classical Lagrange multiplier technique was used. In the dual-primal FETI method, the interface nodes are used at the corner nodes of each sub-domain. On the other hand, the proposed FETI-local analysis adopts localized Lagrange multipliers and the proposed FETI-mixed analysis uses both global and local Lagrange multipliers. The numerical analysis results by the proposed algorithms are compared with those obtained by dual-primal FETI method.

Keywords : augmented lagrangian formulation, domain decomposition, penalty formulation, finite element tearing and interconnecting, lagrange multipliers

1. 서 론

현재까지 유한요소 구조해석의 지배방정식의 해법에 대하여 다양한 접근법이 제시되어 왔다. 대부분의 상업적 유한요소 해법에서 사용하고 있는 가장 보편적인 접근법은 전역 강성 행렬의 3-요소분해(tri-factorization)를 가능하게 하는 능동 컬럼 해법(active column solver)이다(Bathe, 1996). 하지만 능동 컬럼 해법은 병렬 알고리즘에 이식할 때 발생하는 확장성(scalability) 및 구현의 어려움으로 인한 한계가 보고되었다. 또한, 일반적으로 이런 접근법은 반복적 계산 해법(iterative solver)에 비하여 계산에 큰 저장 공간이 필요하며, 문제의 크기가 커짐에 따라 기하급수적으로 계산 횟수가 증가하는 단점이 있다(Duff *et al.*, 1973).

두 번째 유한요소 구조해석 지배방정식 해법은 반복적 알

고리즘이다. 능동 컬럼 해법의 확장성 문제때문에, 대규모 유한요소 문제의 병렬 알고리즘 구현을 위해서는 반복적 해법이 사용되어 왔다. 반복적 알고리즘에서는 행렬-벡터 또는 벡터-벡터 계산이 해의 수렴까지 반복적으로 수행된다. 이러한 반복적 해법의 효율적 수렴은 시스템 행렬 조건수(condition number)와 적절한 예조건화(pre-conditioner) 기법의 선택에 의해 결정된다. 반복적 해법을 사용한 대규모 유한요소 해석 알고리즘 중, 현재까지 가장 효율적인 알고리즘은 영역분할 기법의 하나인 FETI(Finite Element Tearing and Interconnecting) 기법으로 알려져 있다. FETI 기법은 퇴화 타원형 편미분 방정식(elliptic partial differential equation)의 풀이를 위하여 Farhat(1991)에 의하여 정립된 병렬 해법 알고리즘으로, FETI 기법의 일반적인 풀이전략은 다음과 같다. 계산 영역을 비겹침 부영역(non-overlapping

* Corresponding author

Tel: +82-2-880-1642; E-mail: ssjoon@snu.ac.kr
Received October 30 2012; Revised December 1 2012;
Accepted December 1 2012

©2012 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

sub-domain)으로 분할하고, Lagrange 승수(Lagrange multipliers)를 이용하여 각 부영역의 공유면에 적합조건(compatibility condition)을 만족시키는 것이다. FETI 기법은 이후에 4차 편미분 방정식의 해법으로 확장(Farhat *et al.*, 1998)되었고, 최근에는 해석 문제의 차수에 따라 적용 기법이 분리되던 기존의 1단계(one-level), 2단계(two-level) FETI 기법을 차수의 구분없이 적용할 수 있도록 발전시킨 FETI-DP(dual-primal) 기법(Farhat *et al.*, 2001)이 제시되었다. 기존의 FETI 기법(Original FETI)과는 다르게, FETI-DP 기법은 부영역 공유면에 연속성 구속조건(continuity constraint)을 부가하기 위하여 Lagrange 승수와 더불어 적은 수의 상위 격자(coarse mesh) 절점을 사용한 쌍대 영역분할 기법(dual sub-structuring method)을 도입하였다. 결과적으로 유도된 쌍대문제(dual problem)는 연관된 Lagrange 함수의 안장점(saddle-point)을 구하여 해를 구할 수 있다.

기존의 FETI와 FETI-DP의 차이점은 다음과 같다. 기존의 FETI 기법은 임의적인 초기값 추정을 사용하지 않지만, FETI-DP 기법은 PCG(preconditioned conjugate algorithm)에 의한 초기값 추정기법을 사용하고 있으며, 쌍대문제의 도입으로 인한 모서리 공유면 절점(corner interface node)의 계산 기법도 차이를 보인다.

최근에는 수치안정성을 높인 교차 기법(staggered method)과 FETI 기법을 접목시켜 수치효율성을 증대시키는 방법(Lee *et al.*, 2010)이 제시되었고, 반복적인 계산이 요구되는 문제에서 유용하게 적용될 수 있는 축소시스템과의 연동을 통해 효율성을 향상시키는 연구(Kim *et al.*, 2009)도 발표되었다.

이외에 유연다물체(flexible multi-body) 시스템에 대하여 Bauchu(2009)는 ALF(Augmented Lagrangian Formulation) 기법과 전역(global) 및 국부(local) Lagrange 승수를 결합하는 방식을 유도하여 공유면 문제(interface problem)의 해의 수렴성을 향상시켰다. 이 기법을 적용하여 본 논문에서는 전역(global)과 국부(local) Lagrange 승수에 기반을 둔 FETI 유형의 알고리즘을 유도하고 ALF 항이 해의 풀이과정에 추가되어 수렴성을 향상시키는 결과를 수치적 검증을 통해 제시하였다.

2. 본 론

이 장에서는 기본적인 FETI 기법의 강제 모드(rigid body mode) 처리 방법에 대하여 논의하고, 이와 비교하여 ALF 기법과 전역(global) 및 국부(local) Lagrange 승수

를 결합하는 과정을 제시하고자 한다.

2.1 Original FETI 알고리즘

Original FETI 기법에서는 Fig.1과 같이 계산영역을 비접점 부영역으로 분할한다. 결합력(connection force)으로 이해되는 Lagrange 승수는, 공유면 절점에 적합조건을 만족시키기 위하여 사용되며, 대부분의 문제에서는 하나의 시스템을 여러 개의 부영역으로 분할하는 과정에서 물리적 경계조건이 존재하지 않고 오직 공유면 경계조건만 존재하는 floating 부영역이 발생한다.

Original FETI의 정적 해석에서는, 각각의 floating 부영역에 의해 유도되는 강제 모드의 풀이를 위해 다음과 같이 두 단계로 해법을 구성한다. 첫 번째, 각각의 국부 문제에서 강제 모드를 제거하고, 동시에 직접 분해(direct factorization) 기법을 모든 부영역에 사용하여 각각의 국부 해를 도출한다. 두 번째, 각 부영역 모드 사이의 관계는 Lagrange 승수를 통하여 고려된다. 이를 이용하여 기본 FETI 기법의 지배방정식을 다음과 같은 과정을 통해 유도할 수 있다.

$$Ku = f \tag{1}$$

여기서, K, u 그리고 f 는 각각 강성 행렬, 변위 벡터, 그리고 규정된 힘 벡터를 나타낸다. 다음으로 전체 계산영역 Ω 는 N_s 개의 부영역 $\Omega^{(i)}, i=1, 2, \dots, N_s$ 으로 분할되어 Lagrange 승수가 내부 영역(inter-region) 접합성 제약조건 도입을 위해 사용된다. Lagrange 승수의 존재로 인하여, 최소화 문제는 안장점 문제로 전환되어 각 부영역의 공유면에 연속성 조건을 부과하여 식 (1)은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$K^{(i)}u^{(i)} = f^{(i)} + \sum_{j=1}^{n^{(i)}} B_j^{(i)T} \lambda, i = 1, \dots, N_s \tag{2}$$

$$B_j^{(i)}u^{(i)} = B_j^{(j)}u^{(j)}, i = 1, \dots, N_s \tag{3}$$

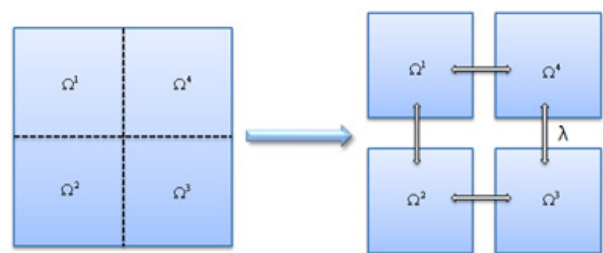


Fig. 1 Schematic description of FETI method

여기서, $B^{(i)}$ 는 연계성 부울 행렬(connectivity Boolean matrix)을 나타내며, λ 는 Lagrange 승수, 그리고 $a^{(i)}$ 는 i 번째 부영역 $\Omega^{(i)}$ 와 연결된 부영역 수이다. 만약 모든 부영역들이 적합한 경계조건으로 제약되어 있다면 $K^{(i)}$ 행렬은 비특이행(non-singular)이 되며, 식 (2)와 식 (3)은 다음과 같이 재구성될 수 있다.

$$u^{(i)} = K^{(i)-1}(f^{(i)} + B^{(i)T}\lambda), i = 1, \dots, N_s \quad (4)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)} K^{(i)-1} B^{(i)T}\right)\lambda = \sum_{i=1}^{N_s} B^{(i)} K^{(i)-1} f^{(i)} \quad (5)$$

식 (4)~(5)를 사용하여, Lagrange 승수를 각 부영역에서 계산하고, 다음으로 변위장 $u^{(i)}$ 가 각 부영역에서 계산된다. 하지만 대부분의 문제는 공유면의 결합력을 제외하고는 적절한 경계조건이 없는 floating 부영역이 존재하기 때문에 특이성을 가지는 강성 행렬이 유도된다. 식 (4)~(5)는 특이성 강성 행렬의 존재로 인하여 다음과 같이 수정된다.

$$u^{(i)} = K^{(i)+}(f^{(i)} + B^{(i)T}\lambda) + R^{(i)}\alpha^{(i)}, i = 1, \dots, N_s \quad (6)$$

여기서, $K^{(i)+}$ 는 가상역행렬(pseudo-inverse)을 나타내고, i 번째 부영역 $\Omega^{(i)}$ 에서의 강체 모드는 $R^{(i)}$, 그리고 $\alpha^{(i)}$ 는 6개의 정벡터(3차원 탄성문제의 경우)를 나타낸다. 추가적으로 각각의 floating 부영역은 반드시 평형상태(self-equilibrated state)이어야 하기때문에 다음의 식이 유도될 수 있다.

$$R^{(i)T}(f^{(i)} - B^{(i)T}\lambda) = 0, i = 1, \dots, N_s \quad (7)$$

식 (3), 식 (6)~(7)을 이용하여 시스템의 공유면 문제를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} F_I - G_I \\ -G_I^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -e \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서,

$$F_I = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} K^{(s)+} B^{(s)T}, \quad d = \sum_{s=1}^{N_s} B^{(s)} K^{(s)+} f^{(s)},$$

$$G_I = [B^{(1)} R^{(1)} \dots B^{(N_f)} R^{(N_f)}], \quad \alpha = [\alpha_1^T \dots \alpha_{N_f}^T]^T$$

$$e^{(s)} = [f^{(s)} R^{(s)T}]^T, \quad s = 1, \dots, N_f$$

마지막으로, 강성 행렬의 가상역행렬은 다음과 같이 정의

할 수 있다.

$$K^{(s)+} = \begin{cases} K^{(s)-1}, & \text{비특이성 조건} \\ K^{(s)} \text{의 역행렬}, & \text{특이성 조건} \end{cases} \quad (9)$$

여기서, N_f 는 floating 부영역의 수이며, 특이성 문제의 해를 구하기 위해서는 추가적으로 여러 가지의 풀이 기법이 요구된다.

2.2 개선된 FETI 알고리즘

개선된 FETI 기법은 Bauchau(2010)에 의해 제안된 방식에 따라 부영역 문제에 ALF 기법을 도입하여 시스템의 제약조건에 페널티 계수(penalty factor)를 추가하는 기법이다. 시스템의 총 퍼텐셜 에너지(total potential energy)는 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = A + \Phi + V^c \quad (10)$$

식 (10)처럼 총 퍼텐셜 에너지 Π 는, 변형률(strain)의 퍼텐셜 A , 외부 하중의 퍼텐셜 Φ , 그리고 제약조건 퍼텐셜 V^c 의 총 합과 같다. 변형률 에너지 A , 외부 하중에 의해 수행된 일 Φ 은 다음과 같이 각 부영역 i 에서의 에너지들의 총합으로 구해진다.

$$A = \sum_{i=1}^{N_s} A_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_s} u_i^T K_i u_i = \frac{1}{2} u^T \text{diag}(K_\alpha) u \quad (11)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_s} \Phi_i = - \sum_{i=1}^{N_s} u_i^T Q_i = - u_i^T Q \quad (12)$$

ALF 기법으로부터 제약조건 퍼텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 K_i 는 부영역 i 에서의 강성행렬을 표현하고, 전체 시스템의 강성행렬 K_α 의 크기는 $n \times n$ 이다. 또한 Q_i 는 부영역 i 에서의 하중배열을 나타내고, 전체 시스템의 하중 배열은 $Q^T = \{Q_1^T, Q_2^T, \dots, Q_{N_s}^T\}$ 이다.

$$V^c = \lambda_G^T \text{diag}(p_{G_\alpha}) C_G + \frac{1}{2} C_G^T \text{diag}(\overline{p_{G_\alpha}}) C_G$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_s} [p_{L_i} \lambda_{L_i}^T C_{L_i} + \frac{1}{2} C_{L_i}^T C_{L_i}] \quad (13)$$

여기서, λ_G 와 $\lambda_L^T = \{\lambda_{L1}^T, \lambda_{L2}^T, \dots, \lambda_{LN_s}^T\}$ 는 각각 전역 및 국부 제약조건을 부과하는 전역(global)과 국부(local) Lagrange

승수이다. $diag(p_{G\alpha})$ 는 전역(global) Lagrange 승수의 환산 계수(scaling factor)의 블록 대각행렬(block diagonal matrix)이며, $p_{G\alpha}$ 와 P_{Li} 는 부영역 i 에서의 전역 및 국부 환산 계수, $\overline{p_{G\alpha}}$ 와 $\overline{p_{Li}}$ 는 전역 및 국부의 제약조건 페널티 계수이다. 이 식에서 전역(global) Lagrange 승수는 전형적인(classical) Lagrange 승수로서 인접한 부영역 절점의 선형 제약조건을 나타내며, 국부(local) Lagrange 승수는 부영역 경계의 절점과 상위 격자 절점 사이의 선형 제약조건을 나타낸다. 여기서 상위 격자 절점의 개념은 독립적인 공유면 절점으로 Park (2000)에 의해 제안되었다. 결과적인 운동 방정식은 최소 총 퍼텐셜 에너지(Minimum total potential energy principle)에 의해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} K^* & -diag(\overline{p_{L\alpha}}S_\alpha^T)CR^Tdiag(p_{G\alpha}) & diag(\overline{p_{L\alpha}}S_\alpha^T) \\ -C^Tdiag(\overline{p_{L\alpha}}S_\alpha) & C^Tdiag(\overline{p_{L\alpha}})C & 0 & -C^Tdiag(p_{L\alpha}) \\ diag(p_{G\alpha})R & 0 & 0 & 0 \\ diag(p_{L\alpha}S_\alpha) & -diag(p_{L\alpha})C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ c \\ \lambda_G \\ \lambda_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서, $K^* = diag(K_\alpha) + R^Tdiag(\overline{p_{G\alpha}})R + diag(S_\alpha^T\overline{p_{L\alpha}}S_\alpha)$ 이다.

2.3 공유면 구조 및 예조건화 기법

각각의 FETI 기법에 사용되는 공유면 구조는 Fig.2와 같다. Fig.2(a)는 상위 격자 절점 자유도가 없는 전형적인 Lagrange 승수 접근법이며, 따라서 original FETI에 해당한다. 이 방식은 부영역 경계 변위장의 연속성을 선형 제약조건을 통해 부여하고 있다. Fig.2(b)는 상위 격자 절점이 각 부영역의 모서리 절점에 사용되고 있으며, 제로 에너지 모드들을 제거하는 역할을 한다. 선택된 모서리 절점들은 문제의 상위 격자 자유도를 정의하는 원형(primal) 미지수로 남겨진다. Original FETI 기법과는 다르게 FETI-DP에서는 floating 부영역들이 더이상 특이성을 보이지 않는다. Fig.2(c)는 국부(local) Lagrange 승수를 사용하여, 부영역역사이의 상위 격자 절점 자유도 변위장의 연속성을 부여하고 있으며, 모든 공유면은 local Lagrange 승수로 가정된다. Fig.2(d)는 전역(global) 및 국부(local) Lagrange 승수의 혼합(mixed)형태로 공유면을 구성하여 변위장에 연속성을 부가하고 있다. Original FETI 기법에서는 국부 강제

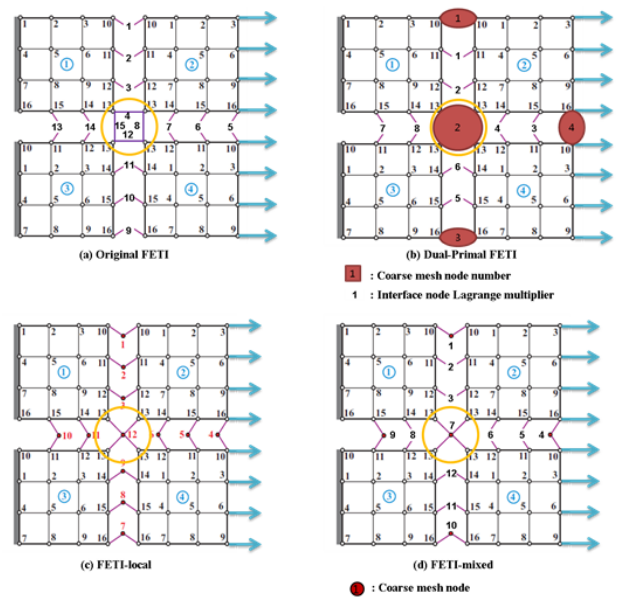


Fig. 2 Interface structure of various FETI methods

모드 요소와 Lagrange 사이의 결합 시스템의 풀이를 위하여 PCPG(Preconditioned Conjugate Projected Gradient) 알고리즘이 사용되며, Lumped 또는 Dirichlet 전제조건이 사용된다. Lumped 전제조건은 Dirichlet 전제조건에 비해서 더욱 효율적이지만, 수학적으로 최적화되어 있지는 않다. 반면에 Dirichlet 전제조건은 2차 탄성 문제에서 최적의 수렴값을 보여준다. 기존의 original FETI, 2단계 FETI, FETI-DP 기법에서는 모두 Dirichlet 전제조건을 사용하고 있다. N 개의 독립된 Dirichlet 문제에 대한 일반적인 Dirichlet 전제조건은 Farhat(1994)에 의해 다음과 같이 소개되었다.

$$M^{-1} = BSB^T = \sum_{i=1}^N B^{(i)}S^{(i)}B^{(i)T} \quad (15)$$

반면, 개선된 FETI 기법에서는 ALF 기법을 이용하여 공유면 문제의 자연적인 조건화를 유도한다. 식 (13)에서, 첫 번째와 세 번째 항들은 Lagrange 승수와 결합된 전형적인 퍼텐셜이며, 추가적으로 환산계수와 결합되어 있다. 페널티 계수는 개선된 FETI 알고리즘의 제약조건의 퍼텐셜 식에서, 식 (13)의 두 번째와 네 번째 항에 도입되어 전통적인 Lagrange 승수와 결합하며 이는 ALF 기법(Gill *et al.*, 1988)과 같다.

개선된 FETI 기법은 Lagrange 승수의 선택에 따라 다시 global, local, mixed 형태로 분류된다. 이 논문에서는 local 및 mixed 형태의 풀이 절차에 따라 수식을 전개하고

수치해석을 실시하였다.

먼저 상위 격자 절점이 모두 국부(local) Lagrange 승수로 구성되는 조건에 대하여 식 (14)를 다음과 같이 축소시킬 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\overline{K}_\alpha) & -\text{diag}(\overline{S}_\alpha^T) & \text{diag}(\overline{S}_\alpha^T) \\ -C^T \text{diag}(\overline{S}_\alpha^T) C^T & \text{diag}(p_\alpha) C & -C^T \text{diag}(p_\alpha) \\ \text{diag}(\overline{S}_\alpha^T) & -\text{diag}(p_\alpha) C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{c} \\ \underline{\lambda}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{Q} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $\overline{K}_i = K_i + p_i S_i^T S_i$, $\overline{S}_i = p_i S_i$ 이다.

다음으로 부영역과 상위 격자 자유도를 단일 배열로 결합하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\hat{\underline{u}} = \widehat{K}^{-1} (\widehat{Q} - \widehat{B}^T \text{diag}(p_\alpha) \underline{\lambda}_L) \quad (17)$$

여기서, $\widehat{K} = \text{diag}(K_\alpha) + \widehat{B}^T \text{diag}(p_\alpha) \widehat{B}$, $\widehat{B} = [\text{diag}(S_\alpha) - C]$, $\widehat{\underline{u}}^T = \{\underline{u}^T, \underline{c}^T\}$, $\widehat{Q}^T = \{Q^T, 0\}$ 이다. 부영역 사이의 관계식 식 (3)을 사용하면 다음의 식이 유도된다.

$$\text{diag}(p_\alpha) \widehat{B} \widehat{K}^{-1} \widehat{B}^T \text{diag}(p_\alpha) \underline{\lambda}_L = \text{diag}(p_\alpha) \widehat{B} \widehat{K}^{-1} \widehat{Q} \quad (18)$$

국부(local) Lagrange 승수의 공유면 문제에서 식 (18)의 좌변 항을 다음과 같이 유연도 행렬(flexibility matrix)로 재정의 할 수 있다.

$$F_L = \text{diag}(p_\alpha) \widehat{B} \widehat{K}^{-1} \widehat{B}^T \text{diag}(p_\alpha) \quad (19)$$

Bauchau(2010)에 의해 제시된 결과처럼 페널티 계수 p_α 가 증가하면 유연도 행렬은 이상적인 예조건화(ideally preconditioned)로 수렴하는 경향을 보이게 되며, 따라서 국부(local) Lagrange 승수와 ALF 기법의 결합은 유연도 행렬의 자연적인 예조건화를 유도한다.

개선된 FETI 기법 중 두 번째 조건인 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수 사용에 의한 운동 방정식의 전개는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(\widetilde{K}_\alpha) & -\text{diag}(\widetilde{S}_\alpha^T) C R^T \\ -C^T \text{diag}(\widetilde{S}_\alpha) C^T \text{diag}(p_\alpha) C & 0 \\ \text{diag}(\widetilde{S}_\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}} \\ \underline{\tilde{c}} \\ \underline{\tilde{\lambda}}_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{Q}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

공유면 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\widetilde{R} \widetilde{F}_G \widetilde{R}^T \underline{\tilde{\lambda}}_G = \widetilde{R} \widetilde{F}_G \underline{\tilde{Q}} \quad (21)$$

여기서, 유연도 행렬은 $\widetilde{F}_G = \text{diag}(\widetilde{K}_\alpha^{-1}) + \widetilde{C} \widetilde{K}_c^{-1} \widetilde{C}^T$ 이다. 식 (21)과 같이 상위 격자 문제의 강성행렬의 역은 공유면 유연도 행렬의 하나의 항으로 포함되어 예조건화되며 각 부영역의 변위장은 다음과 같다.

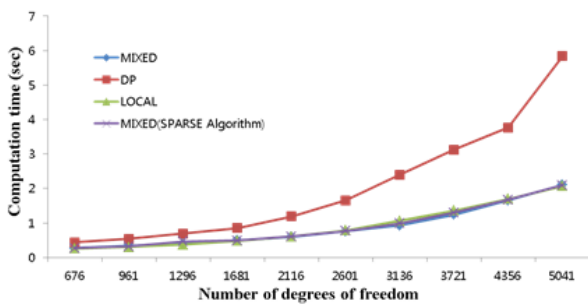
$$\underline{\tilde{u}} = \text{diag}(\widetilde{K}_\alpha)^{-1} (\underline{\tilde{Q}} + \text{diag}(\widetilde{S}_\alpha^T) C \underline{\tilde{c}} - \widetilde{R}^T \underline{\tilde{\lambda}}_G) \quad (22)$$

2.4 수치해석 결과

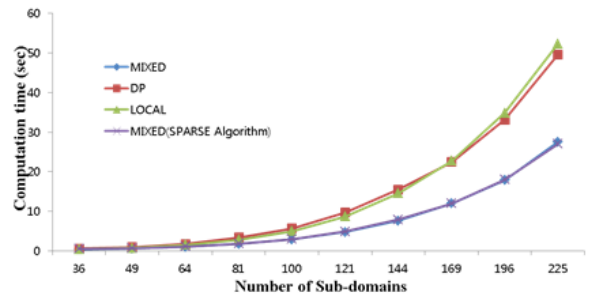
먼저, 이 논문에서 제시한 국부(local) 및 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수를 사용한 개선된 FETI 기법의 이론적 효율성의 수치해석 예제를 통한 검증을 위하여 유연도 행렬 조건수와 메모리 사용량 및 계산 시간에 대한 효율성을 original FETI 및 FETI-DP 기법의 결과와 비교하였다. 모든 수치해석 예제는 Fig. 2와 같은 2차원의 평면 응력 조건 구조물을 탄성계수 $E=73\text{GPa}$, Poisson비 $\nu=0.3$ 의 물성치를 사용하여 순차적(serial) 방식의 프로그램을 작성하여 64-bit의 듀얼 코어 컴퓨터에서 계산한 것이다. Table 1은 다양한 FETI 접근방식에 대한 유연도 행렬의 조건수 비교결과이다. 조건수 해석에서 사용한 형상은 Fig. 2에 제시되어 있으며, 49개 절점을 가지고 있는 4개의 부영역 분할 시스템으로 구성된다. 해석에 사용한 4가지 기법의 해의 정확도 확인을 위하여 공유면 모서리 절점에서의 변형을 측정된 결과를 Table 1에 제시하였다. 조건수 해석 결과는 다음과 같다. Original FETI의 경우 다른 FETI 기법들에 비하여 조건수가 상대적으로 크고, 따라서 많은 수의 반복계산이 필요하다. 그러나 큰 수의 페널티 계수 ($p=1.0 \times 10^{10}$)를 사용한 국부(local) 및 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수에 의한 개선된 FETI 기법의 경우, 유연도 행렬의 조건수가 매우 작은 것을 확인할 수 있다. 이 결과들은 개선된 FETI 기법을 사용한 수치해석 해의 정확성과 수렴성이 매우 효율적임을

Table 1 Comparison on the condition numbers of the flexibility matrix

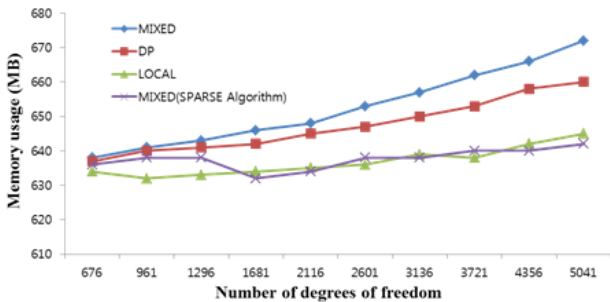
Analysis method	Condition number	Corner node Displacement(m)
Original FETI	$4.70 \times 10^{16} (F_I)$	1.89×10^{-4}
FETI-DP	$6.98 (F_I)$	1.89×10^{-4}
proposed FETI-local	$1.17 (F_L)$	1.89×10^{-4}
proposed FETI-mixed	$1.05 (F_G)$	1.89×10^{-4}



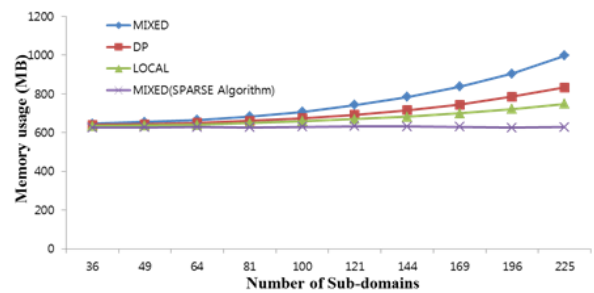
(a) Computational time according to the number of nodes



(a) Computational time according to the number of sub-domains



(b) Memory use according to the number of nodes



(b) Memory use according to the number of sub-domains

Fig. 3 Results for a fixed number of the sub-domains

보여준다.

다음으로, 개선된 FETI 알고리즘의 계산 효율성에 대한 검증은 위하여 계산 시간과 사용 메모리 측정을 수행하였다. 수치예제 해석에 사용한 알고리즘은 FETI-DP, 국부(local) Lagrange 승수를 적용한 FETI-local, 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수를 적용한 FETI-mixed, FETI-mixed 기법에 sparse 해법을 적용한 FETI-mixed(sparse)의 4가지로 구분한다.

Fig.3은 수치예제의 부영역 수는 4개로 유지하고, 전체 해석 자유도의 크기만을 증가시키는 조건에서 측정한 계산 시간 및 메모리 사용량을 나타낸다. 해석 자유도를 증가시키면서 부영역 수를 일정하게 유지시키는 문제 조건에 따라, 공유면에서 발생하는 모서리 절점 자유도는 해석 자유도 크기의 증가와 상관없이 일정하게 유지된다. Fig.3(a)의 해석 결과를 분석해 보면, 모서리 자유도를 제외한 공유면의 나머지 절점 자유도에는 전통적인 Lagrange 승수를 사용하는 FETI-DP의 경우보다, 국부(local) 및 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 상수를 사용하는 개선된 FETI 알고리즘의 계산 시간 효율성이 높게 나타난다. FETI-DP 기법 공유면에서 발생하는 다수의 전통적 Lagrange 승수 도입과는 달리, 개선된 FETI 기법들의 공유면에서는 페널티 항에 의한 유연도 행렬이 생성되어 해의 수렴성 향상 및 계산 시간 감소에 효과적임을 확인할 수 있다. Fig.3(b)의 FETI-mixed 기법에 sparse 해법을 적용한 알고리즘과 FETI-local 기법의 경우

Fig. 4 Results for a varying number of the sub-domains

가 메모리 사용량이 가장 적었고, FETI-mixed 기법만을 적용한 알고리즘의 메모리 사용량이 가장 큰 것을 확인할 수 있다.

Fig. 4는 공유면 자유도의 증가에 따른 각 계산기법의 효율성을 판단하기 위해 각 부영역의 해석 자유도를 고정하고 부영역의 수를 36~225개로 증가시키면서 계산하는 수치예제의 결과이다. 따라서 부영역 수의 증가와 함께 공유면 모서리 절점 및 전체 해석 자유도도 증가하게 된다. Fig. 4(a)의 결과에서 볼 수 있듯이 계산시간의 효율성은 FETI-mixed 기법이 가장 좋고, FETI-local 기법과 FETI-DP의 계산시간의 효율성은 거의 비슷한 수준을 나타내는 것을 확인하였다. 계산 메모리 사용량의 경우에는 Fig.3(b)와 Fig.4(b)의 공유면 모서리 자유도에 대한 두 개의 문제조건 모두에서 FETI-mixed 기법에 sparse 해법을 적용한 경우가 가장 좋은 효율성을 보였으며, 반대로 sparse 해법을 적용하지 않은 FETI-mixed 기법은 다른 3개의 FETI 기법에 비하여 더 많은 메모리 사용량이 요구되는 것을 확인하였다. 이 결과는 FETI-mixed 기법의 경우에 전역(global) Lagrange 승수 공유면을 구성하는 과정에서 FETI-DP 및 FETI-local 기법보다 큰 크기의 희소한 블록 대각 강성행렬을 구성하기 때문에 나타나는 것이다. 따라서 FETI-mixed 기법에서는 sparse 풀이 기법을 적용한 경우에 Fig.3(b) 및 Fig.4(b)의 결과처럼 계산에 필요한 메모리 사용량이 크게 감소하는 특징을 보이게 된다. 이와 유사하게 Farhat(2000)은 original FETI

기법에 sparse 해법을 추가적으로 도입하는 것이 계산 효율성 향상에 도움을 줄 가능성이 있다고 제시하였다.

3. 결 론

본 연구에서는 유한요소 영역분할 구조해석 문제에 ALF 기법을 도입하여, 시스템 제약조건에 페널티 계수를 추가하는 개선된 FETI 기법의 계산 효율성에 대한 수치해석 결과를 제시하였다. 제안된 FETI 기법에서는 분할된 부영역 사이 공유면에 상위 격자 절점을 생성하여 국부(local) 또는 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수를 도입하고, 시스템 변위장 방정식을 유도하는 과정에서 해의 수렴성에 영향을 주는 유연도 행렬을 재정의하였다. 계산 효율성에 대한 수치예로써 다양한 FETI 기법들을 이용하여 2차원 평면 응력 문제를 해석하였다. 구체적으로 행렬 조건수, 계산 시간, 메모리 사용량에 관한 계산 효율성 검증을 위해서 기존의 전통적 FETI 기법 및 FETI-DP 기법과 이 논문에서 제시하는 개선된 FETI(-local, -mixed) 기법들을 비교하였다. 본문에서 제시한 수치예제 결과처럼 개선된 FETI 기법의 유연도 행렬의 조건수는 이상적인 경우에 가깝게 수렴하였다. 계산 시간과 메모리 사용량에 대한 검증 결과, 문제의 공유면 모서리 절점 자유도에 대한 가정에 따라서 차이가 있었지만, FETI-DP 기법과 비교하여 동등하거나 더 좋은 효율을 보이는 것을 확인할 수 있었다. 특히 Sparse 해법과 결합한 FETI-mixed 기법의 경우 공유면 모서리 절점 가정에 상관 없이 계산시간 및 메모리 사용에 있어서 FETI-DP 기법보다 33~44% 향상된 효율을 나타내었다. 다만 FETI-mixed 기법은, 전역(global) Lagrange 승수를 이용한 공유면 구성에 의하여 대규모 희소 블록 대각행렬이 생성되기 때문에, 추가적인 sparse 해법의 도입이 없을 경우에는 계산 메모리 사용량이 다른 기법들에 비해 큰 것으로 확인되었다. 반면 FETI-local 기법의 경우, 문제에서 가정하는 모서리 자유도 수가 증가하게 되었을 때는, sparse 해법을 도입한 FETI-mixed 기법에 비해 계산 효율성은 낮았지만, 여전히 FETI-DP 기법과 동등하거나 좀 더 효율적이었다. 또한 추가적인 해법의 도입없이 공유면 해석이 가능하며 다른 FETI 기법들에 비해 알고리즘이 단순하여 실제 수치계산을 위한 코드개발이 용이한 장점이 있다.

이 논문에서는 몇 가지의 수치예제를 통해 개선된 FETI 기법들의 계산 효율성을 제시하였으나 추가적으로 연구가 필요한 사항들이 남아있다. 먼저, 본 논문에서 제시한 결과는 순차적 계산에 의한 것이기 때문에, 영역분할 기법의 주요 목적인 병렬 처리 알고리즘으로의 확장이 필요하다. 또한 본

논문에서 제기한 sparse 해법과 FETI 기법의 결합 등 추가적인 풀이 기법의 도입이 각 FETI 기법들의 계산 효율성에 주는 영향을 확인할 필요가 있다. 이에 따라 본 연구는 병렬 처리 알고리즘, 동적 해석기법 도입, 그리고 고차 편미분 방정식 문제로 확장될 예정이다.

감사의 글

이 논문은 2011년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었습니다.(2011-0029094)

참 고 문 헌

- Bauchau, O.A, Epple, A., Bottasso, C.L.** (2009) Scaling of Constraints and Augmented Lagrangian Formulations in Multibody Dynamics Simulations, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4.
- Bauchau, O.A.** (2010) Parallel Computation Approaches for Flexible Multibody Dynamics Simulations, *Journal of the Franklin Institute*, 347, pp.53~68.
- Bathe, K.-J.** (1996) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, ISBN 0-13-301458-4.
- Duff, S., Reid, J.K.** (1973) The Multifrontal Solution of Indefinite Sparse Symmetric Linear Equations, *ACM Trans. Math. Software*, 9, pp.302~325.
- Farhat, C., Chen, P.S., Mandel, J., Roux, F.-X.** (1998) The Two-level FETI Method. Part I: an Optimal Iterative Solver for Biharmonic Systems, *Computer Methods and Applied Mechanics and Engineering*, 155, pp.129~151.
- Farhat, C., Chen, P.S., Mandel, J., Roux, F.-X.** (1998) The Two-level FETI Method. Part II: Extension to Shell Problems, Parallel Implementation and Performance Results, *Computer Methods and Applied Mechanics and Engineering*, 155, pp.153~179.
- Farhat, C., Lesoinne, M., LeTallec, P., Pierson, K., Rixen, D.** (2001) FETI-DP: a Dual-primal Unified FETI method PartI: A Faster Alternative to the Two-level FETI Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp.1523~1544.
- Farhat, C., Mandel, J., Roux, F.-X.** (1994) Optimal Convergence Properties of the FETI Domain Decomposition Method, *Computer Methods and Applied*

- Mechanics and Engineering*, 115, pp.367~388.
- Farhat, C., Pierson, K., Lesoinne, M.** (2000) The Second Generation FETI Methods and their Application to the Parallel Solution of Large-scale Linear and Geometrically Non-linear Structural Analysis Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184, pp.333~374.
- Farhat, C., Roux, F.-X.** (1991) A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and Its Parallel Solution Algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, pp.1205~1227.
- Gill, P., Murray, W., Saunders, M.** (1988) Sequential Quadratic Programming Methods for Nonlinear Programming, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp.183~195.
- Kim, H.G., Cho, M.H.** (2009) Reduction Method based on Sub-domain Structure using Reduced Pseudo Inverse Method. *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 22(2), pp.173~180.
- Lee, K.J., Tak, M.H., Kang, Y.S., Park, T.H.** (2010) The Mixed Finite Element Analysis for Porous Media Using Domain Decomposition Method. *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 23(4), pp.369~378.
- Park, K.C., Felippa, C.A., Gumaste, U.A.** (2000) A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications. *Computational Mechanics*, 24, pp.476~490.

요 지

본 논문에서는 대규모 구조해석을 위하여 국부(local) 및 전역-국부 혼합(mixed) Lagrange 승수(Lagrange multiplier)를 이용한 새로운 유한요소 영역분할 기법을 제시한다. 제시되는 FETI 알고리즘은 계산 효율성을 향상시키기 위하여 기존의 FETI 기법들에서 사용되어 온 전통적인 Lagrange 승수법과는 달리, 국부 및 전역-국부 혼합 Lagrange 승수를 도입하고 ALF(Augmented Lagrangian Formulation)과의 결합을 유도하여 공유면 문제(interface problem)의 해의 수렴성을 향상 시켰다. 추가적으로, 몇 가지 수치예제 계산을 통해 기존의 FETI-DP 기법과 비교하여 유연도 행렬의 조건수, 계산 시간 그리고 메모리 사용량에 대한 계산결과를 제시하였다.

핵심용어 : ALF, 영역 분할, 페널티 계수, 유한요소, Lagrange 승수