한국철도학회논문집 제15권 제6호 ▌pp. 588-596 (2012년 12월)
JOURNAL OF THE KOREAN SOCIETY FOR RAILWAY VOL.15, NO.6 ▌pp. 588-596 (December 2012)

pISSN 1738-6225

두꺼운 디스크의 면외 진동 해석을 위한 준-해석적 환상 민드린 평판 요소

Semi-analytical Annular Mindlin Plate Element for Out-of-plane Vibration Analysis of Thick Disks

김창부* · 조현석 · 범현규

Chang-Boo Kim · Hyeon Seok Cho · Hyeon Gyu Beom

Abstract This paper presents a new semi-analytical annular Mindlin plate element with which out-of-plane natural vibration of thick disks can be analyzed simply, efficiently, and accurately through FEM by including effects of rotary inertia and transverse shear deformation. Using static deformation modes which are exact solutions of equilibrium equations of annular Mindlin plate, the element interpolation functions, stiffness and mass matrices corresponding to each number of nodal diameters are derived. The element is capable of representing out-of-plane rigid-body motions exactly and free from shear locking. Natural frequencies of uniform and multi-step disks with or without concentric ring support are analyzed by applying the presented element. Such results are compared with theoretical predictions of previous works or FEA results obtained by using two-dimensional shell element to investigate the convergence and accuracy of the presented element.

Keywords : Annular Mindlin plate element, Out-of-plane vibration, Interpolation function, Natural frequency, FEM

초 록 이 논문은 두꺼운 디스크의 면외 고유 진동을 유한 요소법을 사용하여 회전 관성 및 횡 전단 변형의 효과를 포함하면서 단순하고 효율적으로 정밀하게 해석할 수 있는 새로운 준-해석적 환상 민드린 평판 요소를 제시한다. 환상 민드린 평판의 평형 방정식의 정확한 해인 정적 변형 모드를 사용하여 요소의 보간 함수, 강성 및 질량 행렬은 절 직경 수에 대하여 유도되며, 이와 같은 요소는 면외 강체 운동을 정확하게 표현할 수 있고 전단 잠김이 없다. 제시된 요소를 적용하여 동심 링으로 지지되거나 지지되지 않은 균일 디스크 및 다단 디스크의 고유진동수를 해석하고, 그 결과를 선행 연구의 이론적 결과 또는 2차원 쉘 요소를 사용하여 얻어진 유한요소 해석 결과와 비교하여 제시된 요소의 수렴성 및 정확성을 조사하였다.

주요어 : 환상 민드린 평판 요소, 면외 고유진동, 보간 함수, 고유진동수, 유한요소법

1. 서 론

원형 또는 환상 평판으로 구성된 디스크의 고유진동 특성의 파악은 디스크 장치를 설계하는 데에 있어서 매우 중요하며, 대표적인 디스크 장치로는 컴퓨터 정보 저장용 디스크, 터빈 익차, 에너지 저장용 플라이 휠, 자동차 및 철도차량의 제동 디스크, 철도차량 차륜 등이 있다. 이와 같은 디스크의 면내 또는 면외 고유진동에 관한 연구는 오래 전부터 많은 연구자에 의해서 활발히 수행되어 왔다[1-5]. 디스크의 면외 진동에 대한 연구는 대부분 2차원 평판 이론을 근간으로 하고 있다. 회전 관성 및 횡 전단 변형의 효과를 무시한 고전적인 키르쉬호프(Kirchhoff) 평판 이론을 어느 정도 두꺼운 디스크에 적용하는 경우에는 면외 진동의 고유 진동수는 실제보다 높게 예측된다[5]. 따라서 많은 연구자가 상기의 효과를 고려한 민드린(Mindlin) 평판 이론을 사용하여 디스크의 면외 진동을 해석적 혹은 수치적으로 해석하였다.

디스크의 면외 진동을 유한요소법을 이용하여 수치적으로 해석하는 연구가 많이 수행되었으며, 환상 평판 요소를 사용한 대표적인 연구로는 참고 문헌 [6-10]과 같다. 이와 같은 환상 평판 요소는 반경 및 원주 각의 좌표에 따르는 변위의 반경 방향 변화를 반경에 대한 다항식 함수(polynomial functions)로 근사적으로 표현하는 반면에 원주 방향 변화를 원주 각에 대한 삼각 함수(trigonometric functions)로 정확히 표현하기 때문에 준-해석적 요소(semi-analytical element)이고, 2차원 문제를 1차원 문제로 변환시킴으로써 디스크 유한요소 모델의 자유도를 상당히 감소시키고 해석의 효율성과 정확성을 향상시킨다.

Pardon [6], Kirkhope와 Wilson [7], Han과 Pilkey [10]은 키르쉬호프 평판 이론을 근간으로 하면서 환상 평판의 평형방정식의 정확한 해를 사용하여 반경의 함수인 휨 변위를 보간한 환상 평판 요소를 제시하였다. Mota Soares 와 Petyt [8]는 민드린 평판 이론을 근간으로 하면서 반경의 함수인 모든 면외 변위를 3차 다항식을 사용하여 보간한 환상 평

*Corresponding author.
Tel.: +82-32-860-7383, E-mail : kimcb@inha.ac.kr

http://dx.doi.org/10.7782/JKSR.2012.15.6.588

판 요소를 제시하였고, Priolo와 Sitzia [9]은 민드린 평판 이론을 근간으로 하면서 반경의 함수인 수직 변위를 3차 다항식을 사용하여 보간하고, 반경의 함수인 반경 및 원주 방향 회전을 2차 다항식을 사용하여 보간한 환상 평판 요소를 제시하였다.

이 논문에서는 어느 정도 두꺼운 원형 또는 환상 디스크의 면외 진동을 유한요소법을 이용하여 회전 관성 및 횡 전단 변형의 효과를 포함하면서 단순하고 효율적으로 정밀하게 해석할 수 있는 새로운 준-해석적 환상 평판 요소를 제시하고자 한다. 제시되는 환상 평판 요소는 민드린 평판 이론을 근간으로 하면서 환상 평판의 평형 방정식의 정확한 해인 정적 변형 모드를 사용하여 각각의 절 직경 수에 대하여 요소의 보간 함수, 질량 및 강성 행렬을 유도하고, 다양한 디스크 모델의 고유 진동 해석에 적용하여 그 결과를 선행 연구 또는 2차원 쉘 요소를 사용한 유한요소 해석 결과와 비교하여 제시된 요소의 수렴성 및 정확성을 조사한다.

2. 디스크 운동방정식

2.1 환상 민드린 평판 요소의 면외 운동

Fig. 1과 같이 내부 반경 r_1, 외부 반경 r_2, 두께 h, 밀도 ρ, 탄성 계수 E, 포아송 비 ν인 환상 평판 요소에서 반경 방향으로 r, 원주 방향으로 θ에 위치하면서 평판의 중간 면에 수직한 선분의 면외 변위인 z축 방향 변위 u_z, 반경 방향 회전 ϕ_r 및 원주 방향 회전 ϕ_θ에 관한 환상 평판 요소의 면외 운동방정식은 응력과 변형도 관계를 평면 응력으로 가정하고 회전 관성 및 횡 전단 변형 효과를 고려하면 다음과 같은 가상 일의 원리 식으로 표현된다.

$$\delta A^e + \delta V^e = \delta W^e \qquad \forall\, \delta u_z, \delta\phi_r, \delta\phi_\theta \tag{1}$$

여기서, δW^e는 외력에 의한 가상 일이고, δA^e는 유효력(effective force)에 의한 가상 일, δV^e는 가상 변형에너지이며 다음과 같고,

$$\begin{aligned}\delta A^e = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \{&\delta u_z\, \rho h \ddot{u}_z \\ &+ \delta\phi_r\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_r + \delta\phi_\theta\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_\theta\}\, r\, d\theta\, dr\end{aligned} \tag{2}$$

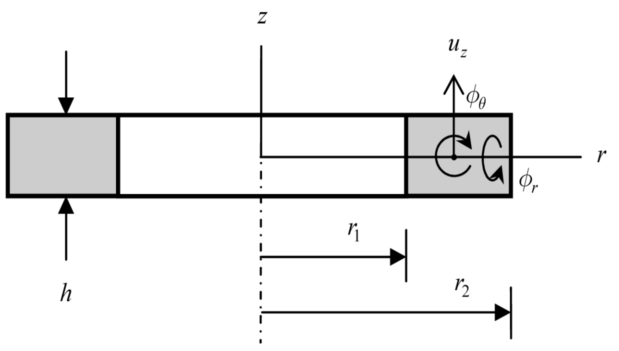

Fig. 1 Geometry of an annular plate element

$$\begin{aligned}\delta V^e = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\theta=0}^{2\pi} \{&\delta\phi_{\theta,r}\, M_{rr} + [(-\delta\phi_{r,\theta} + \delta\phi_\theta)/r] M_{\theta\theta} \\ &+ [-\delta\phi_{r,r} + (\delta\phi_{\theta,\theta} + \delta\phi_r)/r] M_{r\theta} \\ &+ (\delta u_{z,r} + \delta\phi_\theta) Q_{rz} + (\delta u_{z,\theta}/r - \delta\phi_r) Q_{\theta z}\}\, r\, d\theta\, dr\end{aligned} \tag{3}$$

$\ddot{u} = \partial^2 u/\partial t^2$, $u_{,r} = \partial u/\partial r$, $u_{,\theta} = \partial u/\partial\theta$이며, 전단력 Q_{rz}, $Q_{\theta z}$및 굽힘 모멘트 M_{rr}, $M_{\theta\theta}$, $M_{r\theta}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}Q_{rz} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} \sigma_{rz}\, dz = KGh(u_{z,r} + \phi_\theta) \\ Q_{\theta z} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta z}\, dz = KGh(u_{z,\theta}/r - \phi_r)\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}M_{rr} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} z\sigma_{rr}\, dz = D[\phi_{\theta,r} + \nu(-\phi_{r,\theta} + \phi_\theta)/r] \\ M_{\theta\theta} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} z\sigma_{\theta\theta}\, dz = D[\nu\phi_{\theta,r} + (-\phi_{r,\theta} + \phi_\theta)/r] \\ M_{r\theta} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} z\sigma_{r\theta}\, dz = \frac{D}{2}(1-\nu)[-\phi_{r,r} + (\phi_{\theta,\theta} + \phi_r)/r]\end{aligned} \tag{5}$$

상기 식에서 $D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, $G=E/[2(1+\nu)]$이며, K는 전단 계수(shear coefficient)로서 Reissner [11]와 Mindlin [12]은 각각 5/6과 $\pi^2/12$의 값을 제안하였다.

참고로 회전 관성 및 횡 전단 변형 효과를 무시하는 경우에는 식 (2)에서 $\rho h^3/12$, 식 (4)에서 $1/K$를 각각 영으로 놓으면 환상 키르쉬호프 평판의 운동방정식이 얻어진다.

환상 민드린 평판 요소의 면외 변위 $u_z(r, \theta, t)$, $\phi_r(r, \theta, t)$ 및 $\phi_\theta(r, \theta, t)$는 z축에 대한 축 대칭성을 고려하면 다음과 같이 푸리에 급수로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}u_z &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{zCn}(r,t)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} u_{zSn}(r,t)\sin n\theta \\ \phi_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{rCn}(r,t)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{rSn}(r,t)\sin n\theta \\ \phi_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{\theta Cn}(r,t)\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{\theta Sn}(r,t)\sin n\theta\end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)을 식 (1)에 대입하면, 반경 r 및 시간 t의 함수인 변위 u_{zCn}, u_{zSn}, ϕ_{rCn}, ϕ_{rSn}, $\phi_{\theta Cn}$, $\phi_{\theta Sn}$에 대한 운동방정식은 푸리에 급수의 지수인 절 직경 수(number of nodal diameters) n에 대하여 다음과 같은 가상 일의 원리 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}&\delta A_n^e + \delta V_n^e = \delta W_n^e \\ &\forall\, \delta u_{zCn}, \delta u_{zSn}, \delta\phi_{rCn}, \delta\phi_{rSn}, \delta\phi_{\theta Cn}, \delta\phi_{\theta Sn}\end{aligned} \tag{7}$$

여기서, δW_n^e, δA_n^e, δV_n^e는 각각 절 직경 수 n일 때의 외력에 의한 가상일, 유효력에 의한 가상일, 가상변형에너지이며 n=0의 경우에는 그 절반 량이고, δA_n^e, δV_n^e는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta A_n^e = \int_{r=r_1}^{r_2} \pi\{&\delta u_{zCn}\, \rho h \ddot{u}_{zCn} + \delta u_{zSn}\, \rho h \ddot{u}_{zSn} \\ &+ \delta\phi_{rCn}\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_{rCn} + \delta\phi_{rSn}\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_{rSn} \\ &+ \delta\phi_{\theta Cn}\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_{\theta Cn} + \delta\phi_{\theta Sn}\,(\rho h^3/12)\ddot{\phi}_{\theta Sn}\}\, r\, dr\end{aligned} \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\delta V_n^e = \int_{r=r_1}^{r_2} \pi\{ & \delta\phi_{\theta Cn,r}\, M_{rrCn} + \delta\phi_{\theta Sn,r}\, M_{rrSn} \\
& + [(-n\delta\phi_{rSn} + \delta\phi_{\theta Cn})/r] M_{\theta\theta Cn} \\
& + [(n\delta\phi_{rCn} + \delta\phi_{\theta Sn})/r] M_{\theta\theta Sn} \\
& + [-\delta\phi_{rCn,r} + (n\delta\phi_{\theta Sn} + \delta\phi_{rCn})/r] M_{r\theta Cn} \\
& + [-\delta\phi_{rSn,r} + (-n\delta\phi_{\theta Cn} + \delta\phi_{rSn})/r] M_{r\theta Sn} \\
& + (\delta u_{zCn,r} + \delta\phi_{\theta Cn}) Q_{rzCn} \\
& + (\delta u_{zSn,r} + \delta\phi_{\theta Sn}) Q_{rzSn} \\
& + (n\delta u_{zSn}/r - \delta\phi_{rCn}) Q_{\theta zCn} \\
& + (-n\delta u_{zCn}/r - \delta\phi_{rSn}) Q_{\theta zSn}\}\, r\, dr
\end{aligned}
\tag{9}
$$

상기 식에서 전단력 및 굽힘 모멘트의 $\cos n\theta$ 및 $\sin n\theta$ 에 대한 성분은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Q_{rzCn} &= KGh(u_{zCn,r} + \phi_{\theta Cn}) \\
Q_{rzSn} &= KGh(u_{zSn,r} + \phi_{\theta Sn}) \\
Q_{\theta zCn} &= KGh(nu_{zSn}/r - \phi_{rCn}) \\
Q_{\theta zSn} &= KGh(-nu_{zCn}/r - \phi_{rSn})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{rrCn} &= D[\phi_{\theta Cn,r} + \nu(-n\phi_{rSn} + \phi_{\theta Cn})/r] \\
M_{rrSn} &= D[\phi_{\theta Sn,r} + \nu(n\phi_{rCn} + \phi_{\theta Sn})/r] \\
M_{\theta\theta Cn} &= D[\nu\phi_{\theta Cn,r} + (-n\phi_{rSn} + \phi_{\theta Cn})/r] \\
M_{\theta\theta Sn} &= D[\nu\phi_{\theta Sn,r} + (n\phi_{rCn} + \phi_{\theta Sn})/r] \\
M_{r\theta Cn} &= D(1-\nu)[-\phi_{rCn,r} + (n\phi_{\theta Sn} + \phi_{rCn})/r]/2 \\
M_{r\theta Sn} &= D(1-\nu)[-\phi_{rSn,r} + (-n\phi_{\theta Cn} + \phi_{rSn})/r]/2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2.2 환상 민드린 평판 요소의 보간 함수

식 (7)에서 외력 및 유효력에 의한 가상 일을 무시하고 가상 변형에너지를 부분 적분하여 얻어지는 정적 평형상태에서의 미분 방정식의 일반 해는 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
&For\ \ n = 0 \\
&u_{zC0} = r_2\{x^2 C_{01} + (x^2 - x^2 \ln x) C_{02} + C_{03} - \ln x\, C_{04}\} \\
&\phi_{rC0} = \alpha\{I_1(\gamma x) C_{05} - K_1(\gamma x) C_{06}\} \\
&\phi_{\theta C0} = -2x C_{01} - (x - 2x\ln x) C_{02} + x^{-1} C_{04} + \alpha\{4x^{-1} C_{02}\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&For\ \ n = 1 \\
&u_{zC1} = r_2\{x^3 C_{11} + (x - 2x\ln x) C_{12} + x C_{13} + x^{-1} C_{14}\} \\
&\phi_{rS1} = -x^2 C_{11} - (1 - 2\ln x) C_{12} - C_{13} - x^{-2} C_{14} \\
&\quad + \alpha\{-8C_{11} + 4x^{-2} C_{12} + [I_0(\gamma x) + I_2(\gamma x)] C_{15} \\
&\quad - [K_0(\gamma x) + K_2(\gamma x)] C_{16}\} \\
&\phi_{\theta C1} = -3x^2 C_{11} + (1 + 2\ln x) C_{12} - C_{13} + x^{-2} C_{14} \\
&\quad + \alpha\{-8C_{11} - 4x^{-2} C_{12} + [I_0(\gamma x) - I_2(\gamma x)] C_{15} \\
&\quad - [K_0(\gamma x) - K_2(\gamma x)] C_{16}\} \\
&u_{zS1} = r_2\{x^3 D_{11} + (x - 2x\ln x) D_{12} + x C_{13} + x^{-1} D_{14}\} \\
&\phi_{rC1} = x^2 D_{11} + (1 - 2\ln x) D_{12} + D_{13} + x^{-2} D_{14} \\
&\quad + \alpha\{8D_{11} - 4x^{-2} D_{12} - [I_0(\gamma x) + I_2(\gamma x)] D_{15} \\
&\quad + [K_0(\gamma x) + K_2(\gamma x)] D_{16}\} \\
&\phi_{\theta S1} = -3x^2 D_{11} + (1 + 2\ln x) D_{12} - D_{13} + x^{-2} D_{14} \\
&\quad + \alpha\{-8D_{11} - 4x^{-2} D_{12} + [I_0(\gamma x) - I_2(\gamma x)] D_{15} \\
&\quad - [K_0(\gamma x) - K_2(\gamma x)] D_{16}\}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&For\ \ n \ge 2 \\
&u_{zCn} = r_2\{x^{n+2} C_{n1} + x^{-n+2} C_{n2} + x^n C_{n3} + x^{-n} C_{n4}\} \\
&\phi_{rSn} = -nx^{n+1} C_{n1} - nx^{-n+1} C_{n2} - nx^{n-1} C_{n3} - nx^{-n-1} C_{n4} \\
&\quad + \alpha\{-4n(n+1)x^{n-1} C_{n1} + 4n(n-1)x^{-n-1} C_{n2} \\
&\quad + [I_{n-1}(\gamma x) + I_{n+1}(\gamma x)] C_{n5} \\
&\quad - [K_{n-1}(\gamma x) + K_{n+1}(\gamma x)] C_{n6}\} \\
&\phi_{\theta Cn} = -(n+2)x^{n+1} C_{n1} + (n-2)x^{-n+1} C_{n2} \\
&\quad - nx^{n-1} C_{n3} + nx^{-n-1} C_{n4} \\
&\quad + \alpha\{-4n(n+1)x^{n-1} C_{n1} - 4n(n-1)x^{-n-1} C_{n2} \\
&\quad + [I_{n-1}(\gamma x) - I_{n+1}(\gamma x)] C_{n5} \\
&\quad - [K_{n-1}(\gamma x) - K_{n+1}(\gamma x)] C_{n6}\} \\
&u_{zSn} = r_2\{x^{n+2} D_{n1} + x^{-n+2} D_{n2} + x^n D_{n3} + x^{-n} D_{n4}\} \\
&\phi_{rCn} = nx^{n+1} D_{n1} + nx^{-n+1} D_{n2} + nx^{n-1} D_{n3} + nx^{-n-1} D_{n4} \\
&\quad + \alpha\{4n(n+1)x^{n-1} D_{n1} - 4n(n-1)x^{-n-1} D_{n2} \\
&\quad - [I_{n-1}(\gamma x) + I_{n+1}(\gamma x)] D_{n5} \\
&\quad + [K_{n-1}(\gamma x) + K_{n+1}(\gamma x)] D_{n6}\} \\
&\phi_{\theta Sn} = -(n+2)x^{n+1} D_{n1} + (n-2)x^{-n+1} D_{n2} \\
&\quad - nx^{n-1} D_{n3} + nx^{-n-1} D_{n4} \\
&\quad + \alpha\{-4n(n+1)x^{n-1} D_{n1} - 4n(n-1)x^{-n-1} D_{n2} \\
&\quad + [I_{n-1}(\gamma x) - I_{n+1}(\gamma x)] D_{n5} \\
&\quad - [K_{n-1}(\gamma x) - K_{n+1}(\gamma x)] D_{n6}\}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

여기서, C_{ni}, D_{ni} $(i = 1,2,3,4,5,6)$는 적분 상수이며, $r_1 = 0$인 특이 요소(singular element), 즉 원형 평판(circular plate) 요소인 경우에는 C_{n2}, C_{n4}, C_{n6}, D_{n2}, D_{n4}, D_{n6}는 무시되고 $I_n(z)$ 및 $K_n(z)$는 n차의 수정된 베셀 함수(nth-order modified Bessel functions)이며, $x = r/r_2$, $\alpha = D/[KGhr_2^2]$, $\gamma = \sqrt{2/([(1-\nu)\alpha])}$ 이다.

식 (12)~(14)을 사용하여 적분상수를 $r = r_1$과 $r = r_2$에서의 요소 절점변위의 선형 조합으로 표현하고 식 (12)~(14)에 대입하면 변위 u_{zCn}, u_{zSn}, ϕ_{rCn}, ϕ_{rSn}, $\phi_{\theta Cn}$, $\phi_{\theta Sn}$는 시간 t만의 함수인 요소 절점변위 벡터 $\mathbf{u}_{Cn}^e$, $\mathbf{u}_{Dn}^e$ 과 반경 r만의 함수인 요소 보간 함수 벡터 $\mathbf{N}_{zn}^e$, $\mathbf{N}_{rn}^e$, $\mathbf{N}_{\theta n}^e$ 를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
&For\ \ n = 0 \\
&u_{zC0} = \mathbf{N}_{z0}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{C0}^e,\ \phi_{rC0} = \mathbf{N}_{r0}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{C0}^e,\ \phi_{\theta C0} = \mathbf{N}_{\theta 0}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{C0}^e
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&For\ \ n \ge 1 \\
&u_{zCn} = \mathbf{N}_{zn}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Cn}^e,\ \phi_{rSn} = \mathbf{N}_{rn}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Cn}^e,\ \phi_{\theta Cn} = \mathbf{N}_{\theta n}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Cn}^e \\
&u_{zSn} = \mathbf{N}_{zn}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Dn}^e,\ \phi_{rCn} = -\mathbf{N}_{rn}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Dn}^e,\ \phi_{\theta Sn} = \mathbf{N}_{\theta n}^{e\ \mathrm{T}} \mathbf{u}_{Dn}^e
\end{aligned}
\tag{16}
$$

여기서,

$$\begin{gathered} For\ \ circular\ \ plate\ \ element\ \ (r_1=0) \\ \mathbf{u}_{C0}^e=\mathbf{u}_{C02}^e,\ \ \mathbf{u}_{Cn}^e=\mathbf{u}_{Cn2}^e,\ \ \mathbf{u}_{Dn}^e=\mathbf{u}_{Dn2}^e \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} For\ \ annular\ \ plate\ \ element\ \ (r_1\neq 0) \\ \mathbf{u}_{C0}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{C01}^e\\ \mathbf{u}_{C02}^e\end{Bmatrix},\ \ \mathbf{u}_{Cn}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{Cn1}^e\\ \mathbf{u}_{Cn2}^e\end{Bmatrix},\ \ \mathbf{u}_{Dn}^e=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_{Dn1}^e\\ \mathbf{u}_{Dn2}^e\end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{C01}^e&=\left(u_{zC0}(r_1)\quad \phi_{rC0}(r_1)\quad \phi_{\theta C0}(r_1)\right)^T \\ \mathbf{u}_{C02}^e&=\left(u_{zC0}(r_2)\quad \phi_{rC0}(r_2)\quad \phi_{\theta C0}(r_2)\right)^T \\ \mathbf{u}_{Cn1}^e&=\left(u_{zCn}(r_1)\quad \phi_{rSn}(r_1)\quad \phi_{\theta Cn}(r_1)\right)^T \\ \mathbf{u}_{Cn2}^e&=\left(u_{zCn}(r_2)\quad \phi_{rSn}(r_2)\quad \phi_{\theta Cn}(r_2)\right)^T \\ \mathbf{u}_{Dn1}^e&=\left(u_{zSn}(r_1)\quad -\phi_{rCn}(r_1)\quad \phi_{\theta Sn}(r_1)\right)^T \\ \mathbf{u}_{Dn2}^e&=\left(u_{zSn}(r_2)\quad -\phi_{rCn}(r_2)\quad \phi_{\theta Sn}(r_2)\right)^T \end{aligned} \tag{19}$$

2.3 환상 민드린 평판 요소의 질량 및 강성 행렬

식 (7)에 식 (15)~(16)을 대입하면 환상 민드린 평판 요소의 유효력에 의한 가상 일 및 가상 변형에너지는 질량 행렬 및 강성 행렬을 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &For\ \ n=0 \\ &\delta A_0^e=\delta\mathbf{u}_{C0}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{M}_0^e\,\ddot{\mathbf{u}}_{C0}^e \\ &\delta V_0^e=\delta\mathbf{u}_{C0}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{K}_0^e\,\mathbf{u}_{C0}^e \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &For\ \ n\geq 1 \\ &\delta A_n^e=\delta\mathbf{u}_{Cn}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{M}_n^e\,\ddot{\mathbf{u}}_{Cn}^e+\delta\mathbf{u}_{Dn}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{M}_n^e\,\ddot{\mathbf{u}}_{Dn}^e \\ &\delta V_n^e=\delta\mathbf{u}_{Cn}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{K}_n^e\,\mathbf{u}_{Cn}^e+\delta\mathbf{u}_{Dn}^{e\ \mathrm{T}}\,\mathbf{K}_n^e\,\mathbf{u}_{Dn}^e \end{aligned} \tag{21}$$

여기서, $\mathbf{M}_n^e$ 및 $\mathbf{K}_n^e$은 절 직경 수 n에 대한 요소 질량 및 강성 행렬이고 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^e=&\int_{r=r_1}^{r_2}\pi\{\rho hr[\mathbf{N}_{zn}^e\,\mathbf{N}_{zn}^{e\ \mathrm{T}}] \\ &+(\rho h^3/12)r[\mathbf{N}_{rn}^e\,\mathbf{N}_{rn}^{e\ \mathrm{T}}+\mathbf{N}_{\theta n}^e\,\mathbf{N}_{\theta n}^{e\ \mathrm{T}}]\}\,dr \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^e=&\int_{r=r_1}^{r_2}\pi\{D[r\,\mathbf{N}_{\theta n,r}^e\,\mathbf{N}_{\theta n,r}^{e\ \mathrm{T}} \\ &-\nu\,\mathbf{N}_{\theta n,r}^e\,(n\mathbf{N}_{rn}^e-\mathbf{N}_{\theta n}^e)^{\mathrm{T}}-\nu\,(n\mathbf{N}_{rn}^e-\mathbf{N}_{\theta n}^e)\mathbf{N}_{\theta n,r}^{e\ \mathrm{T}} \\ &+(1/r)(n\mathbf{N}_{rn}^e-\mathbf{N}_{\theta n}^e)(n\mathbf{N}_{rn}^e-\mathbf{N}_{\theta n}^e)^{\mathrm{T}}] \\ &+D(1-\nu)[r\,\mathbf{N}_{rn,r}^e\,\mathbf{N}_{rn,r}^{e\ \mathrm{T}} \\ &+\mathbf{N}_{rn,r}^e\,(n\mathbf{N}_{\theta n}^e-\mathbf{N}_{rn}^e)^{\mathrm{T}}+(n\mathbf{N}_{\theta n}^e-\mathbf{N}_{rn}^e)\mathbf{N}_{rn,r}^{e\ \mathrm{T}} \\ &+(1/r)(n\mathbf{N}_{\theta n}^e-\mathbf{N}_{rn}^e)(n\mathbf{N}_{\theta n}^e-\mathbf{N}_{rn}^e)^{\mathrm{T}}]/2 \\ &+KGh[r\,\mathbf{N}_{zn,r}^e\,\mathbf{N}_{zn,r}^{e\ \mathrm{T}}+r\,\mathbf{N}_{zn,r}^e\,\mathbf{N}_{\theta n}^{e\ \mathrm{T}} \\ &+r\,\mathbf{N}_{\theta n}^e\,\mathbf{N}_{zn,r}^{e\ \mathrm{T}}+r\,\mathbf{N}_{\theta n}^e\,\mathbf{N}_{\theta n}^{e\ \mathrm{T}}+r\,\mathbf{N}_{rn}^e\,\mathbf{N}_{rn}^{e\ \mathrm{T}} \\ &+n\mathbf{N}_{rn}^e\,\mathbf{N}_{zn}^{e\ \mathrm{T}}+n\mathbf{N}_{zn}^e\,\mathbf{N}_{rn}^{e\ \mathrm{T}}+(n^2/r)\mathbf{N}_{zn}^e\,\mathbf{N}_{zn}^{e\ \mathrm{T}}]\}\,dr \end{aligned} \tag{23}$$

2.4 디스크의 면외 자유진동 방정식

디스크를 여러 개의 보 요소로 모델링 되는 직선 보와 유사하게 반경 방향으로 여러 개의 환상 평판 요소로 모델링하고, 경계 조건을 고려하면서 식 (20) 및 식 (21)을 사용하여 얻어지는 디스크의 면외 자유진동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &For\ \ n=0 \\ &\mathbf{M}_0\,\ddot{\mathbf{u}}_{C0}+\mathbf{K}_0\,\mathbf{u}_{C0}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &For\ \ n\geq 1 \\ &\mathbf{M}_n\,\ddot{\mathbf{u}}_{Cn}+\mathbf{K}_n\,\mathbf{u}_{Cn}=\mathbf{0} \\ &\mathbf{M}_n\,\ddot{\mathbf{u}}_{Dn}+\mathbf{K}_n\,\mathbf{u}_{Dn}=\mathbf{0} \end{aligned} \tag{25}$$

여기서, $\mathbf{u}_{Cn}$와 $\mathbf{u}_{Dn}$은 디스크의 전체 절점 변위 벡터이고, $\mathbf{M}_n^e$ 및 $\mathbf{K}_n^e$은 디스크의 전체 질량 및 강성 행렬이다.

고유진동수 ω, 절 직경 수 n의 순환대칭 모드로 진동하는 디스크의 전체 절점 변위를 다음과 같이 표현하고,

$$\begin{aligned} &For\ \ n=0 \\ &\mathbf{u}_{C0}=\mathbf{U}_{C0}\cos\omega t \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &For\ \ n\geq 1 \\ &\mathbf{u}_{Cn}=\mathbf{U}_{Cn}\cos\omega t \\ &\mathbf{u}_{Dn}=\mathbf{U}_{Dn}\cos\omega t \end{aligned} \tag{27}$$

식 (26)을 식 (24)에, 식 (27)을 식 (23)에 대입하여 정리하면 디스크의 고유진동 방정식이 얻어진다.

$n\geq 1$의 경우에는 고유진동 방정식으로부터 구해지는 고유진동수 $\omega\geq 0$는 항상 이중(double)이고, 이중인 고유진동수에 대응하는 고유벡터 ($\mathbf{U}_{Cn}$;$\mathbf{U}_{Dn}$)는 ($\mathbf{U}_{Cn}$;$\mathbf{0}$) 또는 ($\mathbf{0}$;$\mathbf{U}_{Dn}$)이 되므로 고유벡터 ($\mathbf{U}_{Cn}$;$\mathbf{0}$)에 대한 모드 형상은 고유벡터 z에 대한 모드 형상이 축 방향으로 $\pi/2n$ 만큼 회전된 형상이다.

3. 적용 및 수치해석 결과

2장에서 제시된 환상 민드린 평판 요소를 적용하여 다양한 디스크 모델의 고유진동을 해석하였다. 적용 예에서 자유 경계(free boundary) 면에서는 면외 변위 u_z, ϕ_r, ϕ_θ 모두가 구속되지 않고, 단순 지지 경계(simply supported boundary) 면에서는 u_z만 구속되고, 경첩 경계(hinged boundary) 면에서는 u_z, ϕ_r가 구속되고, 고정 경계(clamped boundary) 면에서는 면외 변위 모두가 구속되었다. 식 (22) 및 식 (23)의 요소 질량 행렬 및 강성 행렬은 4개의 가우스 점(Gaussian point)을 이용한 가우스-르장드르 적분(Gauss-Legendre integration)을 사용하여 수치적으로 산정되었다. 또한, 물성 치로는 $\rho=7850\mathrm{kg/m^3}$, $E=2.07\times 10^{11}\mathrm{N/m^2}$, $\nu=0.3$이 공통적으로 사용되었다.

3.1 균일한 원형 디스크

반경 $a=1\mathrm{m}$, 두께 $h=0.2\mathrm{m}$, 전단 계수 $K=\pi^2/12$인 균일한

Table 1 Frequency parameters $\lambda = \omega a^2\sqrt{\rho h/D}$ of a uniform circular disk with free outer boundary surface; $h/a = 0.2$, $\nu = 0.3$, and $K = \pi^2/12$

n	m[a]	1-D FE model[b]						Theory[c]
		$N_e = 16$	$N_e = 32$	$N_e = 64$	$N_e = 128$	$N_e = 256$	$N_e = 512$	
0	2	8.50623	8.50538	8.50517	8.50512	8.50511	8.50510	8.50510
	3	31.1643	31.1238	31.1139	31.1114	31.1108	31.1107	31.1106
	4	60.0194	59.7365	59.6678	59.6507	59.6464	59.6454	59.6450
	5	91.3479	90.3728	90.1371	90.0787	90.0642	90.0606	90.0593
1	2	17.9883	17.9805	17.9786	17.9781	17.9780	17.9780	17.9779
	3	44.5858	44.4719	44.4433	44.4362	44.4344	44.4340	44.4338
	4	75.0315	74.5070	74.3752	74.3422	74.3339	74.3319	74.3312
	5	106.986	105.524	105.156	105.064	105.041	105.035	105.033
2	1	5.11438	5.11420	5.11415	5.11414	5.11413	5.11413	5.11413
	2	28.7098	28.6786	28.6708	28.6689	28.6684	28.6683	28.6682
	3	58.0532	57.8052	57.7429	57.7273	57.7233	57.7224	57.7220
	4	89.7076	88.8266	88.6042	88.5485	88.5346	88.5311	88.5300
3	1	11.3163	11.3143	11.3138	11.3137	11.3137	11.3137	11.3137
	2	40.0716	39.9881	39.9671	39.9618	39.9605	39.9602	39.9601
	3	71.4718	71.0159	70.9009	70.8721	70.8649	70.8631	70.8625
	4	104.073	102.726	102.385	102.299	102.278	102.272	102.270
6	1	36.4377	36.3731	36.3568	36.3527	36.3517	36.3514	36.3514
	2	75.7011	75.1638	75.0275	74.9933	74.9848	74.9827	74.9819
	3	111.140	109.533	109.122	109.018	108.992	108.986	108.984
	4	145.261	141.952	141.095	140.878	140.824	140.811	140.806
9	1	66.3308	65.9567	65.8615	65.8376	65.8316	65.8301	65.8296
	2	112.012	110.382	109.961	109.855	109.829	109.822	109.820
	3	149.653	146.116	145.187	144.952	144.893	144.878	144.874
	4	182.202	176.676	175.204	174.830	174.736	174.712	174.704

[a] m is a mode order for the given n number of nodal diameters.
[b] N_e is the number of circular and annular plate elements with equal radial length.
[c] Calculated by using the frequency equation presented by Irie et al. [13].

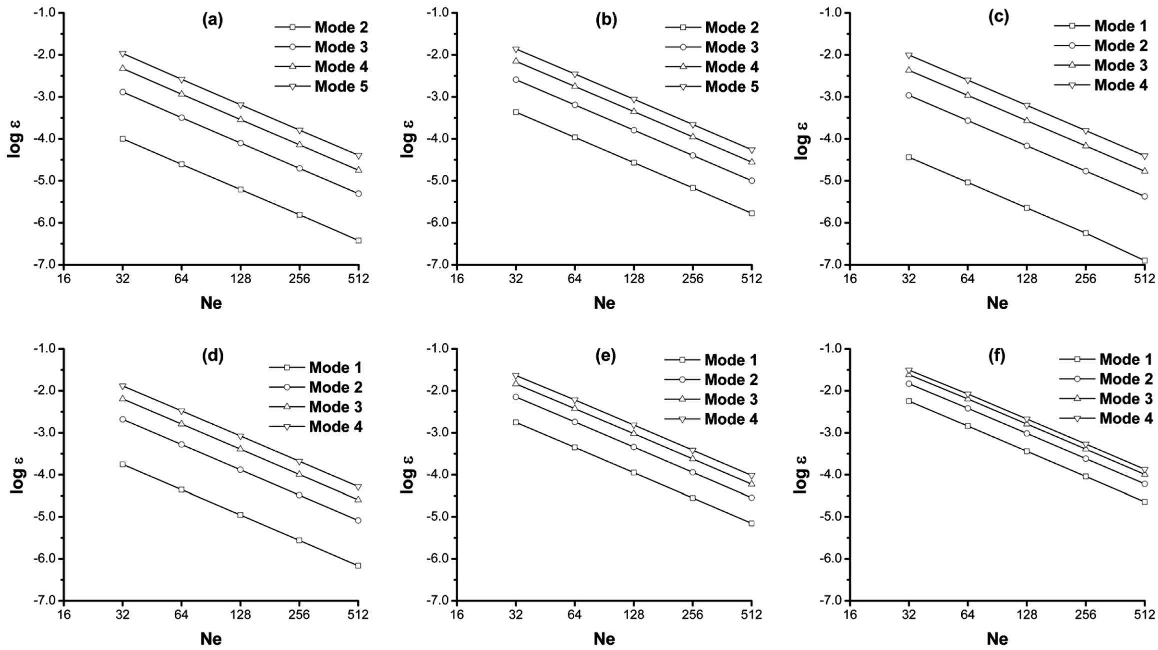

Fig. 2 Relative convergence errors ε of frequency parameters versus number of elements N_e for one-dimensional finite element models of a uniform circular disk with free outer boundary; $h/a = 0.2$, $\nu = 0.3$, and $K = \pi^2/12$: (a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 2$; (d) $n = 3$; (e) $n = 6$; and (f) $n = 9$

원형 디스크의 면외 진동을 동일한 반경 길이를 갖는 1개의 원형 민드린 평판 요소와 N_e-1개의 환상 민드린 평판 요소로 구성된 1차원 유한요소 모델(1-D FE model)을 사용하여 해석하였다. 해석 결과의 고유진동수를 무 차원인 진동수 매개변수(frequency parameter) $\lambda = \omega a^2\sqrt{\rho h/D}$ 로 나타내었다.

Table 1에는 외부 경계 면이 자유인 경우에 대하여 요소 수 N_e가 각각 16, 32, 64, 128, 256, 512인 1차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 진동수 매개변수를 비교하여 나타내었다. $n \geq 1$에 대한 진동수 매개변수는 이중이다.

$n = 0$ 및 $n = 1$에 대하여 생략된 1차 모드는 각각 고유진동수가 0인 z축 방향의 병진 강체 모드 및 r-θ면내의 반경축 방향의 회전 강체 모드와 그 모드 형상이 z축 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전된 회전 강체 모드이다. 따라서 제시된 환상 민드린 평판 요소는 면외 강체 운동을 정확하게 구현할 수 있음을 알 수 있다. Table 1에 제시된 이론 값은 Irie 등 [13]이 제시한 진동수 방정식을 사용하여 계산되었으며, 참고 논문 [13]에 제시된 $n = 0$, 1, 2, 3, 6에 대한 값과 유효 숫자 이내에서 일치한다. Table 1에서 보여지는 바와 같이 일 차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 진동수 매개변수는 요소 수가 증가함에 따라서 단조 감소 형태로 이론 값으로 수렴하고 있다.

1차원 유한요소 모델의 요소 수에 대한 진동수 매개변수의 수렴 정도를 조사하기 위하여 Fig. 2에 진동수 매개변수 λ의 상대 수렴 오차를 나타내었다. 요소 수 N_e에 대한 진동수 매개변수의 상대 수렴 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = [\lambda(N_e/2)/\lambda(N_e)]-1 \tag{28}$$

Fig. 2에서 보여지는 바와 같이, 진동수 매개변수의 수렴율(convergence rate) $p = -d[\log\varepsilon(N_e)]/d[\log N_e]$은 제시된 모든 절 직경 수 및 모드 차수에 대하여 약 2.0이다. 요소 수가 두 배 증가되면 진동수 매개변수의 상대 수렴 오차는 약 네 배로 감소한다. 즉, 유한요소 모델의 요소 수 증가에 따르는 진동수 매개변수의 수렴 정도는 2차적(quadratic)이라고 할 수 있다. 요소 수가 무한대로 접근하면 진동수 매개변수

Table 2 Frequency parameters $\lambda = \omega a^2\sqrt{\rho h/D}$ of a uniform circular disk with $h/a = 0.2$, $\nu = 0.3$, and $K = \pi^2/12$

n	m[a]	For simply supported outer boundary surface			For clamped outer boundary surface		
		1-D FE model		Theory [d]	1-D FE model		Theory [d]
		$N_e = 512$[b]	$N_e = \infty$[c]		$N_e = 512$[b]	$N_e = \infty$[c]	
0	1	4.77725 (0.0013×10^{-4})	4.77725	4.77725	9.24004 (0.0049×10^{-4})	9.24004	9.24004
	2	24.9945 (0.0332×10^{-4})	24.9945	24.9945	30.2107 (0.0489×10^{-4})	30.2107	30.2107
	3	52.5141 (0.1440×10^{-4})	52.5139	52.5139	56.6826 (0.1692×10^{-4})	56.6823	56.6823
	4	8.27666 (0.3570×10^{-4})	82.7656	82.7656	85.5725 (0.3835×10^{-4})	85.5714	85.5714
1	1	12.6196 (0.0087×10^{-4})	12.6196	12.6196	17.7581 (0.0172×10^{-4})	17.7581	17.7581
	2	37.5369 (0.0746×10^{-4})	37.5368	37.5368	42.3740 (0.0957×10^{-4})	42.3738	42.3738
	3	66.9466 (0.2351×10^{-4})	66.9461	66.9461	70.4595 (0.2621×10^{-4})	70.4588	70.4588
	4	97.8750 (0.5024×10^{-4})	97.8734	97.8734	100.112 (0.5265×10^{-4})	100.110	100.110
2	1	21.6880 (0.0254×10^{-4})	21.6879	21.6879	26.9935 (0.0396×10^{-4})	26.9935	26.9935
	2	50.1264 (0.1331×10^{-4})	50.1262	50.1262	54.4662 (0.1589×10^{-4})	54.4659	54.4659
	3	80.9512 (0.3451×10^{-4})	80.9503	80.9503	83.9043 (0.3727×10^{-4})	83.9032	83.9032
	4	112.430 (0.6671×10^{-4})	112.427	112.427	114.229 (0.6876×10^{-4})	114.226	114.226
3	1	31.5467 (0.0533×10^{-4})	31.5467	31.5467	36.7583 (0.0727×10^{-4})	36.7582	36.7582
	2	62.6750 (0.2082×10^{-4})	62.6745	62.6745	66.5351 (0.2365×10^{-4})	66.5345	66.5345
	3	94.5988 (0.4732×10^{-4})	94.5973	94.5973	97.1074 (0.4997×10^{-4})	97.1058	97.1058
	4	126.534 (0.8480×10^{-4})	126.530	126.530	128.012 (0.8654×10^{-4})	128.008	128.008
6	1	63.4620 (0.2156×10^{-4})	63.4616	63.4616	67.9336 (0.2501×10^{-4})	67.9330	67.9330
	2	99.7304 (0.5307×10^{-4})	99.7286	99.7286	102.558 (0.5638×10^{-4})	102.556	102.556
	3	133.870 (0.9562×10^{-4})	133.865	133.865	135.614 (0.9801×10^{-4})	135.609	135.609
	4	166.696 (1.4667×10^{-4})	166.687	166.687	167.826 (1.4920×10^{-4})	167.818	167.818
9	1	96.5616 (0.4994×10^{-4})	96.5600	96.5600	100.319 (0.5465×10^{-4})	100.317	100.317
	2	135.734 (0.9880×10^{-4})	135.729	135.729	138.030 (1.0247×10^{-4})	138.025	138.025
	3	171.182 (1.5609×10^{-4})	171.173	171.173	172.760 (1.5976×10^{-4})	172.751	172.751
	4	188.898 (0.7189×10^{-4})	188.894	188.894	205.813 (2.2137×10^{-4})	205.797	205.797

[a] m is a mode order for the given n number of nodal diameters.

[b] Calculated by using $N_e = 512$ circular and annular elements with equal radial length. The value in parentheses denotes relative convergence error ε.

[c] Calculated from the formula : $\lambda(\infty) = \lambda(N_e = 512)/[1+\varepsilon(N_e = 512)/3]$.

[d] Calculated by using the frequency equation presented by Irie et al. [13].

는 극한 값 $\lambda(\infty)$으로 수렴하게 되므로 그 극한 값을 다음과 같은 식을 사용하여 근사적으로 예측할 수 있다.

$$\lambda(\infty) = \lambda(N_e)/[1+\varepsilon(N_e)/3] \tag{29}$$

$N_e = 512$일 때, 식 (29)을 사용하여 예측된 진동수 매개변수의 극한 값은 Table 1에서 제시된 이론 값과 정확히 일치함을 알 수 있다. 따라서 이 논문에서 제시된 환상 민들린 평판 요소는 전단 잠김(shear locking) 현상을 일으키지 않는다고 할 수 있다.

Table 2에는 단순 지지 외부 경계 면 및 고정 외부 경계 면을 갖는 균일한 원형 디스크에 관해서 요소 수가 각각 512인 1차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 진동수 매개변수, 상대 수렴 오차 및 예측된 극한 진동수 매개변수를 나타내었다. 또한 참고논문 [13]에서 제시된 진동수 방정식을 사용하여 계산된 이론 값을 비교하여 제시하였다. $n \geq 1$에 대한 진동수 매개변수는 이중이다. 예측된 극한 진동수 매개변수는 계산된 이론 값과 일치한다.

3.2 동심 링으로 지지된 균일한 원형 디스크

반경 $c = 0.5$m의 동심 링으로 지지된 반경 $a = 1$m, 두께 $h = 0.2$m, 전단 계수 $K = 5/6$인 균일한 원형 디스크의 면외 진동을 동일한 반경 길이를 갖는 1개의 원형 민드린 평판

Table 3 Frequency parameters $\lambda = \omega a^2\sqrt{\rho h/D}$ of a uniform circular disk supported by a concentric ring support with $c/a = 0.5$, $h/a = 0.2$, $\nu = 0.3$, and $K = 5/6$

For free outer boundary surface				For clamped outer boundary surface			
$(n, m)^a$	1-D FE model		Theory^d	$(n, m)^a$	1-D FE model		Theory^d
	$N_e = 512^b$	$N_e = \infty^c$			$N_e = 512^b$	$N_e = \infty^c$	
(0,1)	6.59282 (0.0023×10^{-4})	6.59282	6.59282	(0,1)	23.9924 (0.0304×10^{-4})	23.9924	23.9924
(1,1)	8.10007 (0.0035×10^{-4})	8.10006	8.10007	(1,1)	42.4305 (0.0950×10^{-4})	42.4304	42.4304
(2,1)	9.66846 (0.0050×10^{-4})	9.66846	9.66846	(0,2)	45.4604 (0.1106×10^{-4})	45.4603	45.4603
(3,1)	13.5734 (0.0096×10^{-4})	13.5734	13.5734	(2,1)	46.9091 (0.1175×10^{-4})	46.9089	46.9089
(4,1)	19.8791 (0.0211×10^{-4})	19.8791	19.8791	(1,2)	50.4384 (0.1364×10^{-4})	50.4382	50.4382
(0,2)	25.0294 (0.0328×10^{-4})	25.0294	25.0294	(3,1)	50.5889 (0.1368×10^{-4})	50.5887	50.5887
(5,1)	27.7697 (0.0407×10^{-4})	27.7696	27.7696	(4,1)	55.9552 (0.1673×10^{-4})	55.9549	55.9549
(6,1)	36.6311 (0.0702×10^{-4})	36.6310	36.6310	(5,1)	63.0282 (0.2123×10^{-4})	63.0277	63.0277
(1,2)	44.5218 (0.0997×10^{-4})	44.5216	44.5216	(2,2)	71.0507 (0.2678×10^{-4})	71.0501	71.0501
(7,1)	46.0946 (0.1106×10^{-4})	46.0945	46.0945	(6,1)	71.4638 (0.2731×10^{-4})	71.4632	71.4632

[a]The number m in parentheses (n, m) denotes a mode order for the given n number of diameters.
[b]Calculated by using $N_e = 512$ circular and annular elements with equal radial length. The value in parentheses denotes relative convergence error ε.
[c]Calculated from the formula : $\lambda(\infty) = \lambda(N_e = 512)/[1+\varepsilon(N_e = 512)/3]$.
[d]Taken from Xiang [14].

Table 4 Frequency parameters $\lambda = \omega a_1^2\sqrt{\rho h_1/D_1}$ of a two-step circular disk with $a_2/a_1 = 0.5$, $h_1/a_1 = 0.1$, $h_2/h_1 = 2.0$, $\nu = 0.3$, and $K = 5/6$

For hinged outer boundary surface				For clamped outer boundary surface			
$(n, m)^a$	1-D FE model		Theory ^{d}	$(n, m)^a$	1-D FE model		Theory^d
	$N_e = 512^b$	$N_e = \infty^c$			$N_e = 512^b$	$N_e = \infty^c$	
(0,1)	5.94088 (0.0005×10^{-4})	5.94088	5.94088	(0,1)	11.0254 (0.0018×10^{-4})	11.0254	11.0254
(1,1)	14.3961 (0.0028×10^{-4})	14.3961	14.3961	(1,1)	21.6130 (0.0060×10^{-4})	21.6130	21.6130
(2,1)	29.5769 (0.0118×10^{-4})	29.5769	29.5769	(2,1)	37.5335 (0.0187×10^{-4})	37.5335	37.5335
(0,2)	37.4877 (0.0184×10^{-4})	37.4877	37.4877	(0,2)	46.7178 (0.0285×10^{-4})	46.7177	46.7177
(3,1)	45.1643 (0.0275×10^{-4})	45.1643	45.1643	(3,1)	55.0430 (0.0407×10^{-4})	55.0429	55.0429
(1,2)	56.8834 (0.0432×10^{-4})	56.8833	56.8833	(1,2)	69.1945 (0.0639×10^{-4})	69.1943	69.1943
(4,1)	59.2702 (0.0469×10^{-4})	59.2701	59.2701	(4,1)	70.3430 (0.0662×10^{-4})	70.3428	70.3428
(2,2)	73.0428 (0.0709×10^{-4})	73.0426	73.0426	(5,1)	84.5378 (0.0959×10^{-4})	84.5375	84.5375
(5,1)	73.4062 (0.0721×10^{-4})	73.4061	73.4061	(2,2)	85.5331 (0.0979×10^{-4})	85.5328	85.5328
(0,3)	78.9802 (0.0808×10^{-4})	78.9800	78.9800	(0,3)	90.7943 (0.1080×10^{-4})	90.7940	90.7940

[a]The number m in parentheses (n, m) denotes a mode order for the given n number of diameters.
[b]Calculated by using $N_e = 512$ circular and annular elements with equal radial length. The value in parentheses denotes relative convergence error ε.
[c]Calculated from the formula : $\lambda(\infty) = \lambda(N_e = 512)/[1+\varepsilon(N_e = 512)/3]$.
[d]Taken from Xiang and Zhang [15].

요소와 N_e-1개의 환상 민드린 평판 요소로 구성된 1차원 유한요소 모델을 사용하여 해석하였다. 동심 원은 단순 지지 경계 조건을 제공한다.

Table 3에는 자유 외부 경계 면 및 고정 외부 경계 면을 갖는 균일한 원형 디스크에 관해서 요소 수가 각각 512인 1차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 가장 낮은 10개의 진동수 매개변수, 상대 수렴 오차 및 예측된 극한 진동수 매개변수를 나타내었다. 또한 참고논문 [14]에서 제시된 이론 값을 비교하여 제시하였다. $n \geq 1$에 대한 진동수 매개변수는 이중이다. 예측된 극한 진동수 매개변수는 제시된 이론 값과 일치한다.

3.3 2단 원형 디스크

반경 $a_1 = 1$m, $a_2 = 0.2$m, 두께 $h_1 = 0.1$m, $h_2 = 0.2$m, 전단 계수 $K = 5/6$인 2단 원형 디스크의 면외 진동을 동일한 반경 길이를 갖는 1개의 원형 민드린 평판 요소와 N_e-1개의 환상 민드린 평판 요소로 구성된 1차원 유한요소 모델을 사용하여 해석하였다.

Table 4에는 경첩 외부 경계 면 및 고정 외부 경계 면을 갖는 2단 원형 디스크에 관해서 요소 수가 각각 512인 1차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 가장 낮은 10개의 진동수 매개변수, 상대 수렴 오차 및 예측된 극한 진동수 매개변수를 나타내었다. 또한 참고논문 [15]에서 제시된 이론 값을 비교하여 제시하였다. $n \geq 1$에 대한 진동수 매개변수는 이중이다. 예측된 극한 진동수 매개변수는 제시된 이론 값과 일치한다.

3.4 동심 링으로 지지된 3단 환상 디스크

Fig. 3에서 보여지는 바와 같이 외부 반경 $a_1 = 1$m, 내부 반경 $a_4 = 0.2$m인 가상의 환상 디스크는 반경 $a_1 = 1$m,

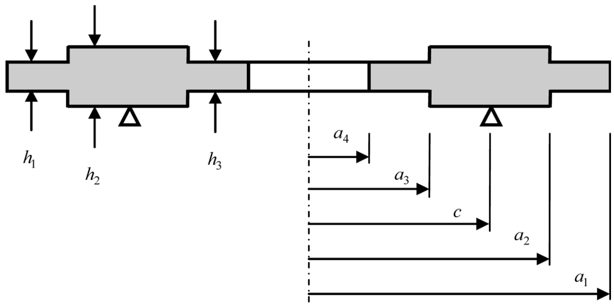

Fig. 3 Geometry of a three-step annular disk with one concentric ring support.

Table 5 Frequency parameters $\lambda = \omega a_1^2 \sqrt{\rho h_1 / D_1}$ of a three-step annular disk supported by a concentric ring support with free outer boundary surface; $a_2/a_1 = 0.8$, $a_3/a_1 = 0.4$, $a_4/a_1 = 0.2$, $c/a_1 = 0.6$, $h_1/a_1 = 0.1$, $h_2/h_1 = 2.0$, $h_3/h_1 = 1.0$, $\nu = 0.3$, and $K = \pi^2/12$

n	m[a]	For free inner boundary surface			For clamped inner boundary surface		
		1-D FE model		2-D FE model[d]	1-D FE model		2-D FE model[d]
		$N_e = 512$[b]	$N_e = \infty$[c]		$N_e = 512$[b]	$N_e = \infty$[c]	
0	1	14.1914 (0.0014×10^{-4})	14.1914	14.1913	25.2472 (0.0055×10^{-4})	25.2472	25.2471
	2	51.5263 (0.0227×10^{-4})	51.5263	51.5244	89.9710 (0.0666×10^{-4})	89.9708	89.9725
	3	105.580 (0.0909×10^{-4})	105.579	105.580	118.018 (0.1169×10^{-4})	118.018	118.017
	4	129.446 (0.1391×10^{-4})	129.445	129.444	239.922 (0.4856×10^{-4})	239.918	239.920
1	1	22.3210 (0.0045×10^{-4})	22.3210	22.3209	27.0114 (0.0063×10^{-4})	27.0114	27.0116
	2	60.9053 (0.0317×10^{-4})	60.9052	60.9049	94.1228 (0.0728×10^{-4})	94.1226	94.1210
	3	108.845 (0.0974×10^{-4})	108.845	108.843	119.242 (0.1191×10^{-4})	119.242	119.242
	4	137.264 (0.1566×10^{-4})	137.264	137.263	242.423 (0.4954×10^{-4})	242.419	242.419
2	1	30.1427 (0.0076×10^{-4})	30.1427	30.1427	30.9184 (0.0084×10^{-4})	30.9184	30.9182
	2	86.4290 (0.0632×10^{-4})	86.4289	86.4306	105.071 (0.0904×10^{-4})	105.070	105.070
	3	114.560 (0.1091×10^{-4})	114.560	114.560	125.143 (0.1326×10^{-4})	125.143	125.142
	4	162.414 (0.2217×10^{-4})	162.413	162.413	250.669 (0.5278×10^{-4})	250.665	250.667
3	1	35.8617 (0.0112×10^{-4})	35.8617	35.8616	35.9454 (0.0111×10^{-4})	35.9454	35.9453
	2	114.053 (0.1070×10^{-4})	114.052	114.051	116.003 (0.1103×10^{-4})	116.003	116.004
	3	128.165 (0.1404×10^{-4})	128.165	128.166	142.780 (0.1737×10^{-4})	142.779	142.779
	4	200.307 (0.3425×10^{-4})	200.305	200.303	257.247 (0.5120×10^{-4})	257.243	257.246
9	1	99.8980 (0.0855×10^{-4})	99.8977	99.9030	99.8980 (0.0855×10^{-4})	99.8977	99.9030
	2	202.245 (0.3372×10^{-4})	202.243	202.248	202.245 (0.3372×10^{-4})	202.243	202.248
	3	318.333 (0.8029×10^{-4})	318.324	318.329	318.333 (0.8029×10^{-4})	318.324	318.329
	4	360.552 (1.1313×10^{-4})	360.539	360.549	360.594 (1.1315×10^{-4})	360.580	360.594

[a] m is a mode order for the given n number of nodal diameters.
[b] Calculated by using $N_e = 512$ annular elements with equal radial length. The value in parentheses denotes relative convergence error ε.
[c] Calculated from the formula : $\lambda(\infty) = \lambda(N_e = 512)/[1+\varepsilon(N_e = 512)/3]$.
[d] Calculated by using 2×64 eight-node finite strain shell elements(SHELL281) of ANSYS for a cyclic substructure of a subtended angle of 5 degrees.

$a_2 = 0.8$m, $a_3 = 0.4$m, 두께 $h_1 = 0.1$m, $h_2 = 0.2$m, $h_3 = 0.1$m, 전단 계수 $K = \pi^2/12$인 3단 디스크로 구성되며 반경 $c = 0.6$m의 동심 링으로 지지되어 있다. 이와 같은 3단 환상 디스크의 면외 진동을 동일한 반경 길이를 갖는 N_e개의 환상 민드린 평판 요소로 구성된 1차원 유한요소 모델을 사용하여 해석하였다.

Table 5에는 동심 링으로 지지되면서 자유 외부 경계 면과 자유 내부 경계 면 및 고정 내부 경계 면을 갖는 3단 환상 디스크에 관해서 요소 수 $N_e = 512$인 1차원 유한요소 모델을 사용하여 얻어진 진동수 매개변수, 상대 수렴 오차 및 예측된 극한 진동수 매개변수를 나타내었다. 또한 디스크를 원주 방향으로 72등분하여 호의 각이 5도인 순환 부분 구조를 원주방향으로 2개, 반경방향으로 64개로 등분하여 2×64개의 8절점 유한 쉘 요소(SHELL 281 of ANSYS ver.11.0)로 구성한 2차원 유한요소 모델(2-D FE model)을 순환 대칭성을 이용하는 해석 기법 [16]을 사용하여 디스크의 고유 진동을 해석하고 그 결과를 비교하여 제시하였다. $n \geq 1$에 대한 진동수 매개변수는 이중이다. 예측된 극한 진동수 매개변수는 2차원 유한요소 모델의 결과 값과 거의 일치한다.

3. 결　론

이 논문에서는 두꺼운 원형 또는 환상 디스크의 면외 진동을 유한요소법을 이용하여 회전 관성 및 횡 전단 변형의 효과를 포함하면서 단순하고 효율적으로 정밀하게 해석할 수 있는 새로운 준-해석적 환상 평판 요소를 제시하였다. 환상 민드린 평판의 평형 방정식의 정확한 해인 정적 변형 모드를 사용하여 각각의 절 직경 수에 대한 요소의 보간 함수, 질량 및 강성 행렬이 유도되었다. 따라서 제시된 요소는 면외 강체 운동을 정확하게 구현할 수 있고 전단 잠김이 없다. 또한 다양한 디스크 모델의 고유 진동 해석을 통하여 제시된 요소의 수렴성 및 정확성을 조사하였다. 진동수 매개변수는 요소 수가 증가함에 따라서 단조 감소 형태로 정확한 값으로 수렴하고 수렴 율은 2차적이다. 상대 수렴 오차 및 수렴율을 사용하여 얻어진 진동수 매개변수의 예측된 극한 값은 정확한 값과 유효 숫자 이내에서 일치함을 알 수 있었다. 이 논문에서 제시된 환상 평판 요소는 철도차량의 차륜, 제동 디스크 등의 진동해석에 활용될 수 있다.

후　기

이 논문은 인하대학교의 지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

[1] A.W. Leissa (1977) Recent research in plate vibrations: Classical theory, *Shock and Vibration Digest*, 9(10), pp. 13-24.
[2] A.W. Leissa (1978) Recent research in plate vibrations: Complicating effects, *Shock and Vibration Digest*, 10(12), pp. 21-35.
[3] A.W. Leissa (1987) Recent studies in plate vibrations, 1981-85: Part I, Classical theory, *Shock and Vibration Digest*, 19(2), pp. 11-18.
[4] A.W. Leissa (1987) Recent studies in plate vibrations, 1981-85: Part II, Complicating effects, *Shock and Vibration Digest*, 19(3), pp. 10-24.
[5] K.M. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai (1995) Research on thick plate vibration: A literature survey, *Journal of Sound and Vibration*, 180, pp. 163-176.
[6] G.C. Pardoen (1973) Static, vibration and buckling analysis of axisymmetric circular plates using finite elements, *Computers & Structures*, 3, pp. 355-375.
[7] G.C. Pardoen (1975) Asymmetric bending of circular plates using the finite element method, *Computers & Structures*, 5, pp. 197-202.
[8] C.A. Mota Soares, M. Petyt (1978) Finite element dynamic analysis of practical discs, *Journal of Sound and Vibration*, 61, pp. 647-560.
[9] P. Priolo, C. Sitzia (1984) Efficiency of annular finite elements for flexural vibrations of thick disks, *Journal of Sound and Vibration*, 92, pp. 21-31.
[10] S. Han, W.D. Pilkey (1990) Stiffness matrices for the static, dynamic, and buckling analysis of circular plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, 7, pp. 27-50.
[11] E. Reissner (1945) The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp. 69-77.
[12] R.D. Mindlin (1951) Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates, *Journal of Applied Physics*, 22, pp. 316-323.
[13] T. Irie, G. Yamada, S. Aomura (1980) Natural frequencies of Mindlin circular plates, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, 47, pp. 652-655.
[14] Y. Xiang (2002) Exact vibration solutions for circular Mindlin plates with multiple concentric ring supports, *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp. 6081-6102.
[15] Y. Xiang, L. Zhang (2005) Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, 280, pp. 633-655.
[16] D.L. Thomas (1979) Dynamics of rotationally periodic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, pp. 81-102.

접수일(2012년 8월 29일), 수정일(2012년 12월 3일),
게재확정일(2012년 12월 6일)

Chang-Boo Kim : cbkim@ inha.ac.kr
Department of Mechanical Engineering, Inha University,
253 Yonghyun-Dong, Nam-Gu, Incheon 402-751, Korea

Hyeon Seok Cho : deflepad@ naver.com
Department of Mechanical Engineering, Inha University,
253 Yonghyun-Dong, Nam-Gu, Incheon 402-751, Korea

Hyeon Gyu Beom : hgbeom@ inha.ac.kr
Department of Mechanical Engineering, Inha University,
253 Yonghyun-Dong, Nam-Gu, Incheon 402-751, Korea