

SDRE 기반 준최적 교통 혼잡 제어기 설계

SDRE-Based Near Optimal Traffic Controller Design

최 한 호*

(Han Ho Choi¹)

¹Dongguk University-Seoul

Abstract: We propose a near optimal controller design method for ramp metering based on SDRE (State Dependent Riccati Equation) approach. We parameterize the optimal nonlinear controller in terms of the solution matrices of an SDRE. We also give a simple algorithm to obtain the controller gain. Finally we give numerical results to show the effectiveness of the proposed near optimal traffic controller design method.

Keywords: SDRE (State Dependent Riccati Equation), optimal control, traffic control, nonlinear system

I. 서론

교통 혼잡은 세계적으로 거의 모든 도시민들이 겪는 가장 심각한 문제 중의 하나로 출퇴근 시간에 주요 간선도로에서의 병목현상은 평일에 정기적으로 일어나고 있으며 출퇴근 시간 이외에도 교통사고나, 도로공사, 기상 이변, 공공행사 등 다양한 원인에 의하여 부정기적인 교통 혼잡이 발생한다. 이러한 교통 혼잡은 도로 이용의 비효율화, 물류비용 증가, 공기 오염의 심화 등 산업, 사회, 경제적인 부작용을 야기한다. 교통 혼잡을 줄이는 방법으로 도로와 철도의 확충과 대중교통수단의 확보를 생각할 수 있으나 이는 재정적 및 환경적인 요건들 때문에 제한적일 수밖에 없다. 이보다 적극적이지는 않지만 도로망의 효율성을 증대시키는 방향의 해결책도 생각할 수 있다. 현재 시내 주요도로나 고속도로에서 사용되고 있는 버스 전용 차로와 같은 대규모 운송수단 전용 라인의 설치, 진입부 폐쇄, 진입로 신호등 제어 등을 예로 들 수 있다. 이 가운데 진입로 신호등 제어 방법이 도로의 효율성을 증가시켜 교통 혼잡을 줄여주는 효율적인 방법으로 미국과 유럽 등 선진국에서 많이 사용되고 있는 방법이다. 피드백 방식의 교통량 감응 방법이 최근 많이 도입되고 있는데 이 방법은 교통량을 실시간으로 측정하여 이에 따라 진입로 신호등의 점등 주기를 제어한다[1-5].

많은 경우 제어입력과 상태사이의 트레이드오프를 고려한 제어기의 설계가 요구되는 데 이때 LQ 제어기는 좋은 해결책이 될 수 있다[6]. 기존의 진입로 신호등 제어기 설계 방법은 LQ 성능 지수의 고려를 통한 제어기 설계가 어려운 단점이 있다. 이는 진입로 시스템의 동역학이 비선형적이기 때문이다. 한편 SDRE 방법은 시스템 행렬에 비선형

을 갖는 시스템에 대하여 LQ성능을 고려하여 제어기를 설계할 수 있도록 제안된 방법으로 성공적으로 비선형 제어 시스템 설계를 위해 사용되어 왔다[7-9]. 본 논문에서는 SDRE 접근법에 기반하여 최적 진입로 신호등 제어기 설계 방법을 제안한다.

II. 문제 설정

이전 결과들 [2-5]을 참조하여 다음과 같은 단순화된 2차의 거시적인 교통 모델 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 - k_2 x_1 - k_3 x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -k_4 x_1 - k_5 x_2 - k_1 x_2^2 \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 x_1 은 교통량 밀도오차, x_2 는 평균속도 오차, u 는 제어입력으로 정규화된 차량 진입률을 의미한다. 그리고 $k_i, i=1, \dots, 5$ 는 고려하는 단위 도로의 길이, 최고 속도, 설정 교통량 밀도, 설정 평균속도, 포화 교통량 밀도 등 값들에 의존하는 상수값들이다.

위의 시스템은 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\dot{x} = A(x)x + Bu \quad (2)$$

여기에서 $x = [x_1, x_2]^T$ 이고 시스템 행렬 $A(x), B$ 는 다음처럼 정의 된다.

$$A(x) = \begin{bmatrix} -k_1 x_2 - k_2 & -k_3 \\ -k_4 & -k_1 x_2 - k_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

본 논문에서는 다음의 LQ 성능 지수를 고려할 것이다.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + r u^2] dt \quad (4)$$

여기에서 $Q > 0$ 는 2×2 행렬이고 $r > 0$ 이다. 그러면 이전의 SDRE 접근법 [7]에 의해 위의 LQ 성능지수는 다음의 비선형 제어기에 의해 최소화됨을 보일 수 있다.

$$u = -K(x)x = -\frac{1}{r} B^T P(x)x \quad (5)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 9. 27., 수정: 2012. 10. 8., 채택확정: 2012. 10. 25.

최한호: 동국대학교 전자전기공학부(hhchoi@dongguk.edu)

※ 이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2012R1A1A2001439).

여기에서 $P(x)$ 는 2×2 행렬로 다음의 SDRE를 만족시키는 양한정 해 행렬이다.

$$P(x)A(x) + * - \frac{1}{r}P(x)BB^TP(x) = -Q \quad (6)$$

그리고 $*$ 는 행렬의 대칭성으로부터 유추될 수 있는 행렬 블록값을 의미한다. 결국 주어진 시스템 (1)에 대하여 제어기 (5)가 안정을 보장함을 보이고 SDRE (6)을 풀기 위한 알고리즘을 제안하는 것으로 우리의 문제를 설정할 수 있다.

III. 제어기의 존재와 안정도 해석

식 (3)에 주어진 행렬들 $A(x), B$ 에 대하여 다음의 제어가능성 행렬(controllability matrix)을 구할 수 있다.

$$C_M = [B, A(x)B] = \begin{bmatrix} 1 & -k_1x_2 - k_2 \\ 0 & -k_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

위에 주어진 식 (7)은 $\text{Rank}(C_M) = 2$ 가 임의의 x 에 대하여 성립함을 의미한다. 한편 식 (3)에 주어진 행렬 $A(x)$ 에 대하여 다음의 관측가능성 행렬(observability matrix)을 구할 수 있다.

$$O_M = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Q 가 양한정행렬이므로 위에 주어진 식 (8)은 임의의 x 에 대하여 $\text{Rank}(O_M) = 2$ 가 성립함을 의미한다. 주어진 시스템은 모든 x 에 대하여 (A, B) 는 제어가능하고 (Q, A) 는 관측가능하므로 이전 결과 [7]에 의해 SDRE (6)의 해가 항상 존재함을 알 수 있다. 그리고 다음의 안정도 정리를 얻을 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)과 비선형 최적 제어기 (5)의 폐회로 제어 시스템은 점근적으로 안정하다.

증명: [7]에 주어진 방법에 기반하면 안정성을 쉽게 증명할 수 있다. $A(x)$ 는 다음처럼 상수행렬 A_0 와 섭동 행렬 $\Delta A(x)$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$A(x) = A_0 + \Delta A(x) \quad (9)$$

여기에서

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_2 & -k_3 \\ -k_4 & -k_5 \end{bmatrix}, \quad \Delta A(x) = \begin{bmatrix} -k_1x_2 & 0 \\ 0 & -k_1x_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

다음의 리카치 방정식을 고려하자.

$$P_0A_0 + * - \frac{1}{r}P_0BB^TP_0 = -Q \quad (11)$$

위의 리카치 방정식에서 (A_0, B, \sqrt{Q}) 가 안정가능하며 관측가능하기 때문에 최적제어 이론으로부터 우리는 (11)식은 유일한 양한정 해행렬이 존재하며 $A_0 - \frac{1}{r}BB^TP_0$ 는 항상 안정함을 알 수 있다. (6)에 주어진 SDRE의 해 $P(x)$ 는 다음처럼 상수행렬 P_0 와 상태에 의존하는 행렬 $\Delta P(x)$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$P(x) = P_0 + \Delta P(x) \quad (12)$$

마찬가지로 상태에 의존하는 이득 행렬 $K(x)$ 도 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$K(x) = K_0 + \Delta K(x) \quad (13)$$

여기에서 $K_0, \Delta K(x)$ 는 다음처럼 정의된다.

$$K_0 = \frac{1}{r}B^TP_0, \quad \Delta K(x) = \frac{1}{r}B^T\Delta P(x) \quad (14)$$

위에 주어진 (9), (12), (13), (14) 식들을 사용해서 폐회로 제어 시스템은 다음처럼 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = (A_0 - BK_0)x + g(x) \quad (15)$$

여기에서 $g(x)$ 는 섭동성분으로 다음처럼 정의된다.

$$g(x) = h(x)x, \quad h(x) = \Delta A(x) - B\Delta K(x)$$

상태값의 절대값 $\|x\|$ 가 0으로 접근함에 따라 $\Delta A(x), \Delta P(x), \Delta K(x)$ 값들도 0으로 수렴하므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} h(x) = 0, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (16)$$

$\|x\|$ 가 0이 되면 폐회로 제어 시스템 동역학 (15)식도 다음의 안정한 사불변 선형 시스템으로 단순화될 수 있음을 쉽게 알 수 있다.

$$\dot{x} = (A_0 - BK_0)x = (A_0 - \frac{1}{r}BB^TP_0)x \quad (17)$$

위에 주어진 (16)식은 주어진 양수 ϵ 에 대하여 다음을 만족시키는 양수 δ 의 존재가능성을 보장한다.

$$\|g(x)\| \leq \epsilon\|x\|, \quad \forall \|x\| \leq \delta$$

초기조건이 $\|x(0)\| \leq \delta_0 \leq \delta$ 를 만족시킨다고 가정하면 (15)의 해 $x(t)$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\|x(t)\| \leq \|e^{(A_0 - BK_0)t}\| \cdot \|x(0)\| + \epsilon \int_0^t \|e^{(A_0 - BK_0)(t-\tau)}\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau$$

그리고 $A_0 - BK_0$ 는 안정하므로 Bellman-Gronwall 보조정리를 이용하여 적절한 양수 θ, η 에 대하여 다음 부등식이 만족됨을 보일 수 있다.

$$\|x(t)\| \leq \theta e^{-(\eta-\theta)t} \|x(0)\|$$

결국 $\epsilon < \theta/\eta, \delta_0 \leq \delta/\theta$ 를 만족시키도록 ϵ, δ_0 를 설정하고 초기조건을 $\|x(0)\| \leq \delta_0$ 으로 하면 해는 $\|x(t)\| \leq \delta$ 를 만족시키며 시간이 무한대로 가면 해 $x(t)$ 가 지수함수적으로 0에 수렴하게 됨을 알 수 있다. Q.E.D.

IV. 제어기 설계 알고리즘

식 (9)에 주어진 섭동 행렬 $\Delta A(x)$ 는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\Delta A(x) = Fx_2 \quad (18)$$

여기에서 F 는 상수행렬로 다음처럼 주어진다.

$$F = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} = -k_1 I \quad (19)$$

이전 결과 [7]을 참조해서 임시변수 γ 를 도입하여 $A(x) = A_0 + \gamma x_2 F = A_0 - k_1 \gamma x_2 I$ 로 표현하자. SDRE (6)의 해를 Taylor급수 형태로 임시변수 γ 를 활용하여 다음처럼 표현할 수 있다.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_2^i P_i \quad (20)$$

여기에서 P_i 는 상수의 대칭행렬이다. (18)-(20)을 SDRE (6)에 대입하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_2^i P_i \right) (A_0 - \gamma x_2 k_1 I) + * - \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_2^i P_i \right) B B^T \left(\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_2^i P_i \right) = -Q$$

γx_2 의 같은 승수들끼리 모아 정리해서 비교를 통해 P_i 를 구하는 다음과 같은 반복적인 알고리즘을 구할 수 있다.

$$P_0 A_0 + * - \frac{1}{r} P_0 B B^T P_0 + Q = 0 \quad (21)$$

$$P_1 \left(A_0 - \frac{1}{r} B B^T P_0 \right) - k_1 P_0 + * = 0 \quad (22)$$

⋮

$$P_i \left(A_0 - \frac{1}{r} B B^T P_0 \right) - k_1 P_{i-1} + * - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{i-1} P_j B B^T P_{i-j} = 0 \quad (23)$$

(21)은 주어진 쌍 (A_0, B) 에 대한 리카치 방정식임을 알 수 있다. 또한 (22)와 (23)은 일군의 리아푸노프 방정식임을 알 수 있다. 이전 결과 [7]에 의해 (A_0, B, \sqrt{Q}) 가 안정가능하며 관측가능하기 때문에 위의 반복적인 알고리즘은 SDRE (6)의 해로 수렴됨을 보장받을 수 있다. 위의 수식 (21)-(23)은 $P(x)$ 를 한 개의 리카치 방정식과 여러개의 상수 리아푸노프 방정식을 풀어 구한 상수 행렬들 P_i 를 사용해서 근사화할 수 있음을 뜻한다. 결국 (5)를 근사화한 준최적 제어기는 다음처럼 주어진다.

$$u = u_N = -\frac{1}{r} B^T \sum_{i=0}^N x_2^i P_i x = -\sum_{i=0}^N x_2^i K_i x \quad (24)$$

여기에서 $K_i = \frac{1}{r} B^T P_i$ 이며 P_i 는 (21)-(23)을 통해 계산된 해행렬들이며, N 은 미리 계산된 일군의 방정식들의 개수를 의미한다.

만약 $N=0$ 으로 하면 (24)의 제어 입력은 다음처럼 단순화된다.

$$u = u_0 = -\frac{1}{r} B^T P_0 x = -K_0 x \quad (25)$$

여기에서 P_0 은 리카치 방정식 (28)의 해이다. 위의 제어기

(25)는 다음과 같은 $x=0$ 부근에서 교통 모델 비선형 방정식 (1)을 선형화해서 얻어지는 선형 시불변 시스템에 대하여 LQ 성능지수 (4)를 최소화하는 최적제어기임에 유의해야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_2 x_1 - k_3 x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -k_4 x_1 - k_5 x_2 \end{aligned}$$

V. 수치적 예

상수 $k_i, i=1, \dots, 5$ 들이 다음처럼 주어지는 시스템 (1)을 고려하자.

$$k_1 = 2, k_2 = 160, k_3 = 160, k_4 = 399.92, k_5 = 533.3$$

$Q = I, r = 0.001$ 로 하여 앞에서 구해진 알고리즘을 통해 다음과 같은 이득 행렬들을 구할 수 있다.

$$K_0 = [13.0801, -4.1967]$$

$$K_1 = [-0.4590, 0.3419]$$

$$K_2 = [0.0173, -0.0141]$$

위의 이득을 보면 K_0, K_1 이 K_2 보다 훨씬 큰 값들을 갖는 것을 알 수 있다. 그러므로 $N=1$ 으로 하여 다음의 비선형 준최적 제어기를 구할 수 있다.

$$u = u_{N=1} = -13.0801x_1 + 4.1967x_2 + 0.4590x_1x_2 - 0.3419x_2^2 \quad (26)$$

그림 1은 초기조건을 $x_1(0) = 20, x_2(0) = -20$ 으로 하고 비선형제어기 (26)을 적용했을 때 시뮬레이션 결과를 보여준다. 만약 $N=0$ 으로 하면 다음의 선형 최적제어기를 얻을 수 있다.

$$u = u_{N=0} = -13.0801x_1 + 4.1967x_2 \quad (27)$$

위의 제어기는 다음의 선형화된 시스템에 대하여 성능지수 $J = \int_0^{\infty} (x^T x + 0.001u^2) dt$ 를 최소화하는 최적제어기로 [2-5]에 소개되었던 제어 방법의 일종으로 간주될 수 있음에 유의해야 한다.

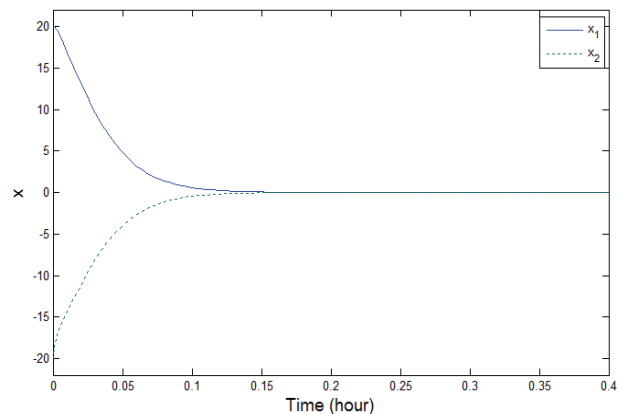


그림 1. 비선형제어기 (26)에 의한 결과.
Fig. 1. Results by nonlinear controller (26).

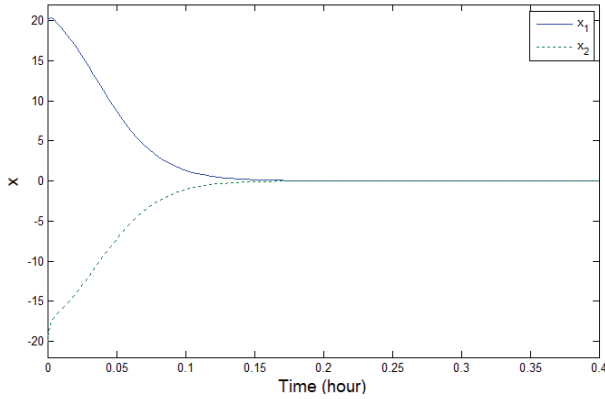


그림 2. 선형제어기 (27)에 의한 결과.

Fig. 2. Results by linear controller (27).

표 1. 수치적인 비교.

Table 1. Numerical comparison.

	비선형제어기(26)	선형 제어기(27)
$\int_0^{0.4} \ x(t)\ dt$	0.8681	1.1341
$\int_0^{0.4} t\ x(t)\ dt$	0.0233	0.0355
$\int_0^{0.4} \ x(t)\ ^2 dt$	13.4283	19.0915

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -160x_1 - 160x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -399.92x_1 - 533.3x_2 \end{aligned}$$

그림 2는 선형제어기 (27)에 의한 시뮬레이션 결과를 보여준다. 표 1은 수치적인 결과값들을 정리해 비교해 놓은 것이다. 표에서 보듯이 제안된 비선형 제어기가 절대 오차 적분 (IAE)에서 23.5%, 제곱 오차 적분 (ISE)에서 34.4%, 시간 가중 절대 오차 적분 (ITWAE)에서 29.7% 개선된 결과를 보임을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 진입로 신호등 제어를 위한 최적 제어기 설계 문제에 대하여 다루었다. SDRE를 사용하여 최적 비선형 제어기를 매개변수화하였다. SDRE를 풀어서 제어기 이득을 얻기 위한 간단한 알고리즘을 제안하였다. 마지막으로 수치적인 예를 통해 효용성을 보였다.

참고문헌

- [1] 2007 Traffic Congestion Costs: Estimatoion and Trend Analysis (in Korean), The Korean Transport Institute Report, 2008.
- [2] M. Papageorgiou, C. Duakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, and Y. Wang, "Review of road traffic control strategies," *Proc. of the IEEE*, vol. 91, no. 12, pp. 2043-2067, 2003
- [3] M. Papageorgiou and A. Kotsialos, "Freeway ramp metering: An overview," *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 271-281, 2002.

- [4] B. Sridhar, S. R. Grabbe, and A. Mukherjee, "Modeling and optimization in traffic flow management," *Proc. of the IEEE*, vol. 96, no. 12, pp. 2060-2080, 2008.
- [5] R. R. Kohan, R. Becerril, and A. G. Aghdam, "Decentralized nonlinear traffic control-I: variable structure linearizing control," *Proc. of the 43rd IEEE conference on Decision and Control*, vol. 69, pp. 14-17, Dec. 2004.
- [6] J.-H. Yang, S.-Y. Lee, S.-Y. Kim, Y. S. Lee, and O.-K. Kwon, "Optimal posture control for unmanned bicycle," *Journal of Institute of Control, Robotics and System (in Korean)*, vol. 17, no. 10, pp. 1006-1013, 2011.
- [7] H. T. Bank, B. M. Lewis, and H. T. Tran, "Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach," *Computational Optimization and Applications*, vol. 37, no. 2, pp. 177-218, 2007.
- [8] T. D. Do, H. H. Choi, and J. W. Jung, "SDRE-based near optimal control system design for PM synchronous motor," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 59, no. 11, pp. 4063-4074, 2012.
- [9] S. Kim and S. Kwon, "SDRE based nonlinear optimal control of a two-wheeled balancing robot," *Journal of Institute of Control, Robotics and System (in Korean)*, vol. 17, no. 10, pp. 1037-1043, 2011.

최한호

제어·로봇·시스템학회 논문지, 제16권 제12호 참조.