

응력-변형률 관계 정식화의 적용성(I) -평면변형률압축시험에 대한 적용성-

Application of Modelling Stress-Strain Relations (Part I) -Application to Plane Strain Compression Tests-

박 춘 식¹ Park, Choon-Sik

Abstract

FEM requires the stress-strain relationship equations for numerical analyses. However, most formulations for the stress-strain relationship published up to the present are not satisfactory enough to properly express all the levels from the small strain to the peak. Tatsuoka and Shibuya (1991) suggested a new single formulation applicable not only to a wide range of geo-materials from soft clay to soft rock, but also to a wide range of strain levels from 10^{-6} to 10^{-2} . The plain strain compression test is carried out to seven samples of research standard sand specimens and two samples of glass beads, which have been used at world-renowned research institutes. In this study, strains of the maximum principal stress (σ_1) and the minimum principal stress (σ_3) were thoroughly measured from 10^{-6} to 10^{-2} , and the result, applied to Tatsuoka and Shibuya's new formulation, coincided closely with the measured data of the stress-strain relationship from the small strain to the peak.

요 지

유한요소해석 등에 의한 수치해석에서는 정식화된 응력-변형률 관계가 필요하다. 그러나 현재까지 여러 연구자들에 의해 발표된 응력-변형률 관계의 정식화는 미소변형률 수준에서부터 피크에 이르기까지 전체를 모두 만족하지 못하게 표현하였다. Tatsuoka and Shibuya(1991)는 하나의 식으로 연약 점성토에서 연암에 이르는 광범위한 지반재료에 대해 적용 가능하며, 넓은 범위의 변형률 수준($10^{-6} \sim 10^{-2}$)에 대해 적용할 수 있는 새로운 제안식을 발표하였다. 본 연구는 세계 각국의 주요 연구기관에서 사용되고 있는 7종류의 연구용 표준사 공시체 및 2종류의 유리 구슬(Glass beads) 공시체를 이용하여 평면변형률압축시험을 실시하였다. 최대주응력방향(σ_1)의 변형률과 최소주응력방향(σ_3)의 변형률을 각각 10^{-6} 에서 10^{-2} 까지 상세히 측정하였고, 얻어진 시험 결과를 새롭게 제안된 식에 적용하였다. 그 결과 미소변형률 수준에서 피크에 이르는 응력-변형률 관계의 실측된 데이터와 매우 잘 일치하는 결과를 얻었다.

Keywords : Granular materials, Secant elastic modulus, Small strain, Stress-strain relationship, Plane strain compression test

¹ 정회원, 창원대학교 토목공학과 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil Engrg. Changwon National Univ., Tel: +82-55-213-3772, Fax: +82-55-264-7592, pcs@changwon.ac.kr, 교신저자)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2013년 6월 30일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

1. 서론

지반을 구성하는 지반재료인 흙이나 암석의 응력-변형률 관계는 구조물의 변위, 지반의 변형, 구조물 내부의 응력 계산 등에 필요하다는 것은 명백하다. 즉, 이러한 것들의 응력-변형률 관계는 다음과 같은 이유에서 정식화할 필요가 있다.

① 유한요소해석 등에 의한 수치해석에서는 정식화한 응력-변형률 관계가 필요하다. ② 정식화한 응력-변형률 관계에 사용하는 파라메타 값으로 토질의 분류가 가능하다. ③ 각각의 토질에 대하여 변형계수의 변형률 수준 의존성, 응력 수준 의존성이 정식화되어 있다면 특정의 변형률 수준이나 응력 수준에서 측정된 원위치 시험에서의 변형계수로부터 소정의 변형률 수준 혹은 응력 수준에서의 변형계수를 추정할 수 있다.

실측한 전단 시의 응력-변형률 관계를 정식화하는 경우 다음의 조건이 필요하다.

① 식은 가급적 간편해야 하며, ② 파라메타 수는 적어야 하는 동시에 그 값을 원위치시험 혹은 실내시험에서 결정할 수 있어야 한다. ③ 하나의 식으로 연약 점성토에서 연암에 이르는 광범위한 지반재료에 대해 적용 가능하여야 한다. ④ 넓은 범위의 변형률 수준(0.001%~10%)에 대해 적용할 수 있어야 한다. ⑤ 단조·반복시험 재하의 조건에서도 적용 가능하여야 한다. ⑥ 응력 경로, 배수조건, 변형률속도, 이방성, 초기 전단(초기응력상태), 과압밀이력, 반복전단이력 등의 영향을 고려할 수 있어야 한다.

그러나 많은 연구자들에 의해 제안된 기존의 정식화는 상기와 같은 조건을 모두 만족하지 못하고 있다. Tatsuoka and Shibuya(1991)는 이러한 조건들을 전부 만족하지는 못하지만 ③, ④의 조건을 만족시키는 새로운 식을 제안하였다. 그러나, Tatsuoka and Shibuya(1991)에 의해 제안된 새로운 식은 광범위한 변형률에서 수행한 평면변형률압축 조건, 다양한 모래의 종류 및 유리구슬 등에 이 식이 만족하는 지에 대한 검증은 아직 미흡한 상태이다. 본 논문은 Tatsuoka and Shibuya(1991)에 의해 제안된 식을 이용하여 미소변형률 수준에서부터 파괴 시까지의 응력-변형률 관계를 피팅하여 제안된 식이 상기와 같은 조건에도 만족하는지를 알아보았다. 세계 각국의 주요 연구기관에서 사용되고 있는 7종류의 연구용 표준사 및 2종류의 유리 구슬(Glass beads) 공시체를 사용하여 평면변형률압축시험을 실시하고, 미소변

형률에서 파괴 시까지의 응력-변형률 관계를 구하였다. 이렇게 하여 얻어진 응력-변형률 관계를 Tatsuoka and Shibuya(1991)에 의해 제안된 식에 적용하여 평면변형률압축 조건, 다양한 모래의 종류 및 유리구슬 등에 이 식이 만족하는 지에 대한 적용성을 검증하는데 그 목적이 있다.

2. 사용된 시료, 실험장치 및 방법

세계 각국의 주요 연구기관에서 사용되고 있는 7종류의 연구용 표준사 공시체(일본:Toyoura sand, Silica sand, 영국:Silver Leughton Buzzard sand(이하 S.L.B sand), 독일:Karsruhe sand, 미국:Monterey sand, 이탈리아:Ticino sand, 프랑스:Hostun sand) 및 2종류의 유리 구슬(Glass beads) 공시체를 공중낙하법에 의해 제작하고, 등방압 밀시켜 미소변형률 측정장치를 사용한 평면변형률압축 시험을 실시하였다. 시험 시는 멤브레인의 관입에 의한 오차와 변위를 외부에서 측정함으로써 생기는 오차(bedding error) 등의 영향을 제거하여 측정된 최대주응력방향의 변형률과 최소주응력방향의 변형률을 각각 0.0001%에서 10%까지 넓은 범위에 걸친 응력-변형률 관계를 얻었다.

본 연구에 사용한 모든 시료의 입경가적곡선을 Fig. 1에, 그 물리적 성질을 Table 1에 나타내었다. 또, 실험장치의 전체도를 Fig. 2에 표시하였다. 변형률수준 10^{-6} 에서 10^{-2} 까지의 변형률을 상세히 측정하기 위하여 공시체 측면위는 양 측면에서 국소 측면위 측정 장치(Local Deformation Transducer : LDT, Fig. 2의 ⑩)를 사용하였고, 공시체 측면의 수평변위는 측방변위 측정 장치(Lateral Deformation Measuring System : LDMS, Fig. 2의 ⑪)를 사용하였다(상세한 사항은 문헌 (1), (3), (6),

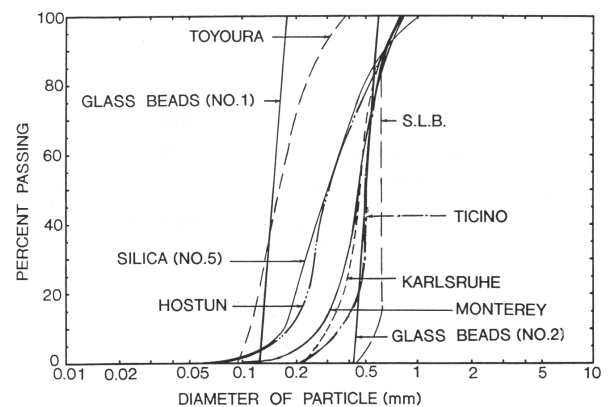


Fig. 1. Particle-size distribution curve

Table 1. Physical properties

Sand Name (Origin)	D ₅₀ (mm)	U _c	Grain Shape ¹	φ (°)	σ ₃ (kPa)	e _{max} / e _{min}	e _{0.05}	G _s
Hostun (France)	0.31	1.94	Sub-angular	47.4	80	0.95/ 0.55	0.620	2.65
Toyoura (Japan)	0.162	1.46	Sub-angular	46.3 48.7	80	0.977/ 0.605	0.660	2.64
Silica No.5 (Japan)	0.30	2.11	Sub-angular	43.1	80	0.849/ 0.520	0.650	2.69
Ticino (Italy)	0.502	1.33	Sub-round	47.9	80	0.96/ 0.59	0.660	2.68
Monterey (USA)	0.44	1.74	Sub-round	47.5	80	0.86/ 0.55	0.610	2.64
Silver Leighton Buzzard (UK)	0.62	1.11	Sub-round	45.8 47.7	80	0.79/ 0.49	0.520	2.66
Karlsruhe (Germany)	0.45	1.65	Sub-round	43.8	80	0.87/ 0.54	0.620	2.65

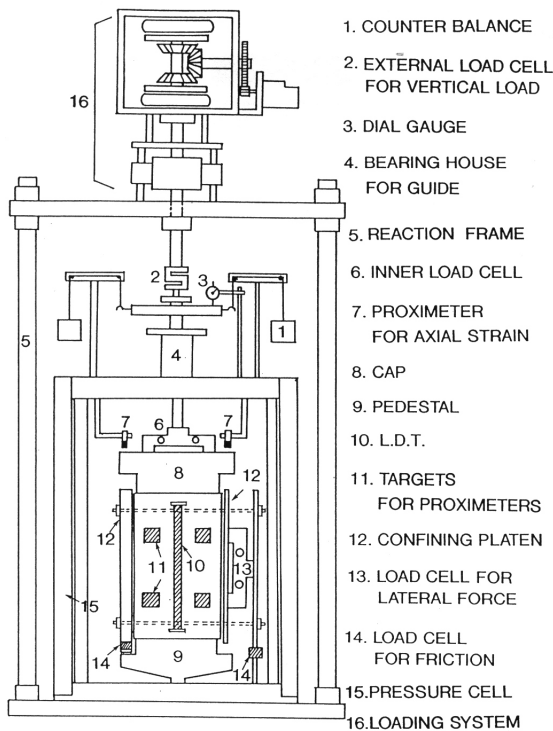


Fig. 2. Experimental equipment

(7), (8)을 참조). 공시체는 높이 H=20cm, 폭(σ₃ 방향의 길이) W=8cm, 길이(σ₂ 방향의 길이) L= 16cm로 하였고, 상하 단면과 구속판에 접하는 측면은 모래와 단면마찰 경감층의 직접전단시험결과(Park and Jang, 1998)를 토대로 한 단면마찰 경감층(lubrication layer)을 사용하였다.

공시체는 부압 5.0kPa하에서 공중낙하법으로 제작하였고, 이때의 간극비를 e_{0.05}로 나타내었다. 소정의 부압

을 가한 후 정규압밀시킨 후 LDT, 구속판, LDMS를 장치하였다. 그 후 배수상태에서 변형률 제어법(측변위 0.25mm/min)으로 전단하였다. 공시체내에 전단층이 발생하면 LDMS로는 공시체의 평균 측방변형률을 정확히 구할 수가 없기 때문에 파괴후의 어떤 변형률수준 이상이 되면 체적변형률 ε_v치는 일정하다고 가정하여 최소 주응력방향의 변형률 ε₃를 역산하였다.

3. 쌍곡선 관계

비선형성이 강한 일반적인 흙의 응력-변형률 관계의 정식화는 쌍곡선 관계(Kondner, 1963)를 이용하는 경우가 많다. 그 이유로는 다음과 같다.

- ① 쌍곡선 관계는 그 물리적 의미가 명확한 초기 변형계수와 피크 강도를 파라메타로 하는 비교적 간단한 형태를 가지고 있다.
- ② 파라메타의 결정이 단순하다.
- ③ 파라메타를 적절히 선택하여 응력-변형률 관계의 정식화가 가능하다. 간명하고 범용성이 높은 쌍곡선관계의 적용성을 우선 검토하고, 수정 쌍곡선 관계를 검토하면 다음과 같다.

3.1 쌍곡선 관계의 구조

Kondner(1963)는 초기 전단이 없는 경우의 단조재하 삼축압축시험에서의 응력-변형률 관계를 식 (1)로 표현하였다.

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 = \gamma / (a + b \cdot \gamma) \quad (1)$$

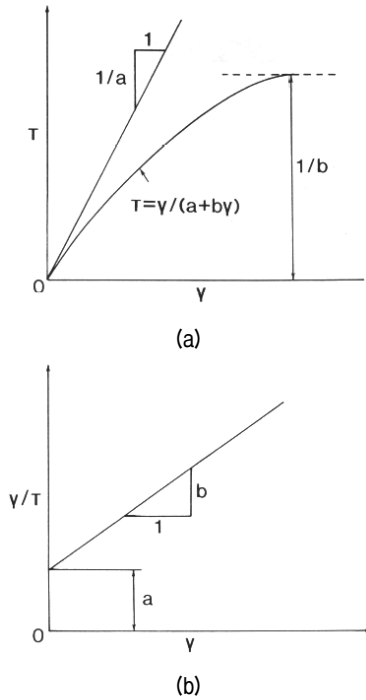


Fig. 3. Parameter a and b in hyperbolic relationship

파라메타 b는 식 (2)와 같다(Fig. 3(a) 참조), 즉, 피크 시의 전단강도에 보정계수 k를 곱한 역수이다. 여기서 k는 보정계수이다. 식 (1)은 유한의 전단변형률 값에서 피크강도에 이르므로 k는 1.0 이상이 아니면 데이터와 피팅되지 않는다. 한편, 파라메타 a는 다음 식 (3)에서 얻을 수 있다.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \frac{1}{b} = k \cdot [(\sigma_1 - \sigma_3) / 2]_f \quad (2)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} (d\tau / d\gamma) = \frac{1}{a} \quad (3)$$

Kondner(1963)는 식 (1)을 식 (4)로 변형시킬 수 있으므로 Fig. 3(b)와 같이 데이터를 직선 근사하여 파라메타 a와 b값을 얻는 방법을 제안하였다. 그러나 이와 같이 피팅에 의해 얻어진 파라메타 a와 b값을 이용한 쌍곡선 관계식 (1)에 의한 할선변형률계수 값은 미소변형률에서 실측 데이터보다도 작게 평가 된다는 것은 이미 지적되어 있다. 이것은 1/a 값은 G_{max} 보다 작고, 1/a는 G_{max} 을 과소평가한다는 것을 의미한다.

$$\frac{\gamma}{(\sigma_1 - \sigma_3) / 2} = a + b \cdot \gamma \quad (4)$$

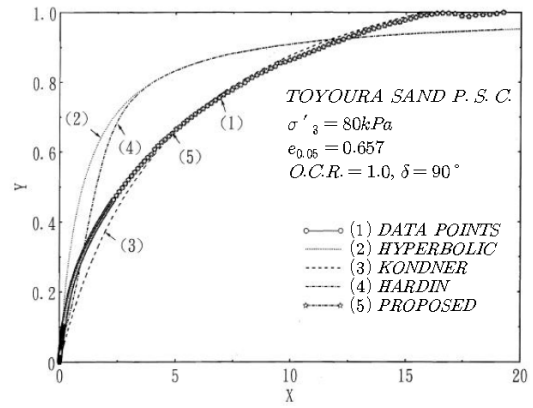


Fig. 4. Fitting of stress-strain relationship at total strain (Toyoura sand)

3.2 원형 쌍곡선 관계

최소주응력(구속압)이 일정한 평면변형률압축시험, 삼축압축시험에서의 응력-변형률 관계를 $a=1/G_{max}$, $b=1/\tau_{max}$ 으로 한 쌍곡선관계를 나타내면 식 (5)와 같다.

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \frac{\gamma}{1/G_{max} + \gamma/\tau_{max}} \quad (5)$$

어떤 응력상태에 있는 지반요소에 대해 최대전단응력 τ_{max} 은 각종의 조건에 대해 비교적 안정하고, 지반조사 혹은 토질조사로 결정할 수가 있다. 또한 기존의 연구에 의하면 초기 할선전단강성률 G_{max} 은 동적재하와 정적재하 조건에서 거의 동일하며, 응력 경로, 배수조건, 변형률속도, 이방성, 초기 전단(초기응력상태), 과압 밀이력, 반복전단이력 등의 영향은 비교적 작다(Tatsuoka and Shibuya, 1991). 식 (5)를 정규화하여 표현하면 다음과 같다.

$$Y = \frac{X}{1+X} = 1 - \frac{1}{1+X} \quad (6)$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_{sec}}{G_{max}} = \frac{1}{1+X} = 1 - Y \quad (7)$$

$$\frac{X}{Y} = 1 + X, \quad \frac{1}{Y} = \frac{1}{X} + 1 \quad (8)$$

여기서 $Y = \tau / \tau_{max}$: 정규화한 응력,
 $X = \gamma / (\gamma)_r$: 정규화한 변형률,
 $(\gamma)_r = \tau_{max} / G_{max}$: 기준변형률이다.

본 연구에서 사용한 7종류의 모래와 2종류의 유리구슬(Glass beads) 공시체에 대해 구속압 $\sigma_3=80kPa$ 를 가하여 평면변형률압축시험을 실시한 데이터를 이 원형쌍곡선관계로 피팅한 것이 Fig. 4~Fig. 7의 Hyperbolic이다. Fig. 4는 피크 시의 변형률까지 정규화한 응력-변형률 관계를 대표적으로 나타낸 것이고, Fig. 5는 미소변형률 수준에서 정규화한 응력-변형률 관계를 대표적으로 나타낸 것이다. Fig. 6은 할선변형계수의 변형률 수준 의존성을, Fig. 7은 할선변형계수의 응력 수준 의존성을 대표적인 결과만 나타내었다. 실측 데이터와 비교하여 원형쌍곡선관계의 특징을 검토하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

① 원형쌍곡선관계에서 피크 시는 무한대의 축변형률($Y=1, X \rightarrow \infty$)로 나타낼 수 있는 것처럼 보이지만 본 연구에서 사용한 시료는 $X=20 \sim 80$ 정도에서 피크에 도달하였다. Fig. 4 및 Fig. 5에서 알 수 있듯이 어느 입상체의 경우에서도 쌍곡선관계는 전단 초기에는 실측 데이터보다 큰 값을 나타내나 피크에 가까울수록 실측 데이터보다 작은 값을 나타낸다. 이것은 원형쌍곡선의 큰 결점 중의 하나이다. 따라서 이러한 결점을 보완하기 위해 각 연구자들에 의해 각종의 수정 쌍곡선관계식이 제안되었다. Fig. 6은 할선변형계수의 변형률 수준 의존성을 나타내었다. Fig. 6으로부터 전체 데이터는 $X=10$ 까지는 쌍곡선관계보다 작은 값을 나타내는 것을 알 수 있다. Fig. 7은 할선변형계수의 응력 수준 의존성을 나타내었다. Fig. 7로부터 할선변형계수는 응력 수준의 증가에 따라 직선관계에서 아래에 나타나지만, 본 연구의 평면변형률압축시험에서 얻어진 데이터는 초기 응력 수준에서는 급격히 저하하는 것을 알 수 있다. 그러나 응력 수준 약 0.5를 초과하면 그 저하율이 현저히 감소하는 것을 알 수 있다.

상기와 같이 검토한 결과 쌍곡선관계는 식이 간명하다는 점에서는 우수하지만 실측 데이터를 그대로 피팅하는 것은 불가능하다는 것이 분명해졌다. 이것은 미소변형률에서 피크까지의 일관적이며 정확한 변형계수의 측정 결과의 축적, 단조재하시험과 반복재하시험 결과의 대비, 다양한 토질재료에의 적용성 등에 사용이 불가능하다는 것을 의미한다. 특히 최근에 정확한 실험 데이터가 축적됨에 따라 미소변형률에서 피크까지의 일관적인 응력-변형률관계를 쌍곡선관계식으로 표현할 수 없다(Tatsuoka and Shibuya, 1991; Shibuya et al., 1991(b)).

이하 Tatsuoka and Shibuya(1991)는 원형쌍곡선관계

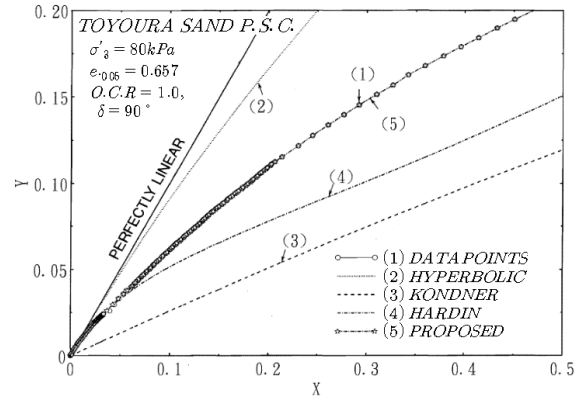


Fig. 5. Fitting of stress-strain relationship at small strain (Toyoura sand)

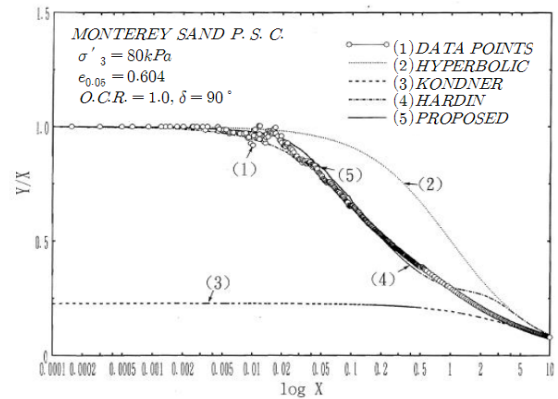


Fig. 6. Fitting of secant elastic modulus of strain-dependence (Monterey sand)

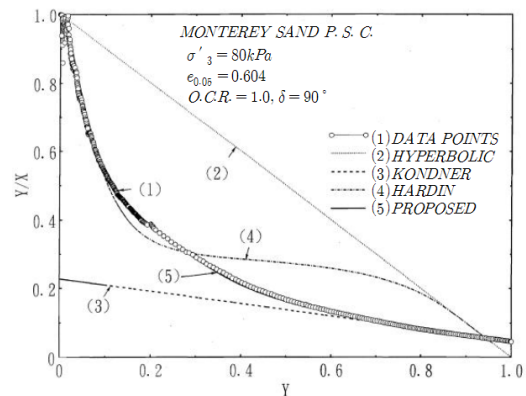


Fig. 7. Fitting of secant elastic modulus of stress-dependence (Monterey sand)

식 (6)~식 (8)을 수정하여 측정된 응력-변형률관계와 일치시키기 위한 몇 가지의 방법을 검토하였다.

$$Y = \frac{X}{1/C_1 + X/C_2} \quad (9)$$

$$Y - Y_e = \frac{X - X_e}{1/C_1 + (X - X_e)/C_2} \quad (10)$$

상기 식에서 C_1, C_2 는 정수의 경우와 변수의 경우가 있다. 또한 식 (9)는 선형탄성범위를 고려한 경우의 식이며, X_e, Y_e 는 각각 탄성한계 응력과 변형률을 나타낸다.

3.3 보정계수를 도입하는 방법

3.3.1 대변형률 수준에 대한 방법($X/Y \sim X$ 법)

식 (6)에서 $X \rightarrow \infty$ 에서 $Y=1$ 로 되지만 실제의 지반에서는 파괴에 가까워지면 물성이 급격히 변화하여 접선 변형계수 dy/dx 가 급속히 감소하고, 파괴 시의 변형률 X_f 에서($Y=1.0, dy/dx=0$) 피크 응력상태로 된다. 이것에 착안하여 Kondner(1963)는 피크강도 Y_{max} 이 1.0 이상이지만 $Y=1$ 에서 그 사용을 중지하는 방법을 사용하였다. 즉, 1.0 이상의 보정계수 $(C_2)_L$ 를 도입한 다음 식을 제안하였다.

$$Y = \frac{X}{1 + X / (C_2)_L} \quad (11)$$

$$\frac{X}{Y} = 1 + \frac{X}{(C_2)_L} \quad (12)$$

이 경우 파괴 시의 변형률은 $X_f = 1 / \{1 - 1 / (C_2)_L\}$ 에서 유한하지만 $Y=1.0$ 에서 $dy/dx=0$ 으로 되지 않는다는 문제점이 있다. 한편 식 (12)의 (X/Y) 축과의 절편은 1.0이 되지만, X 가 작은 때의 데이터는 그 직선 아래에 위치하여 $X=0$ 에서의 실제 데이터의 (X/Y) 절편은 식 (12)가 나타내는 값인 1.0이 되지만 데이터에 피팅된 직선의 (X/Y) 축 절편은 1.0보다 훨씬 크게 된다. 이 문제에 대처하기 위해 Kondner의 방법에서는 또 다른 하나의 보정계수 $(C_1)_L$ 를 도입할 필요가 있다. 즉, $(C_1)_L = 1 / (a \times G_{max})$ 는 강성률에 관련된 보정 파라미터이며, $(C_2)_L = 1 / (b \times \tau_{max})$ 는 강도에 관련된 보정 파라미터이다. 이 보정계수 $(C_1)_L, (C_2)_L$ 를 식 (6)에 대입한 것이 식 (13)이다.

$$Y = \frac{X}{1 / (C_1)_L + X / (C_2)_L} \quad (13)$$

이러한 파라메타 $(C_1)_L, (C_2)_L$ 는 $X/Y \sim X$ 관계의 직선

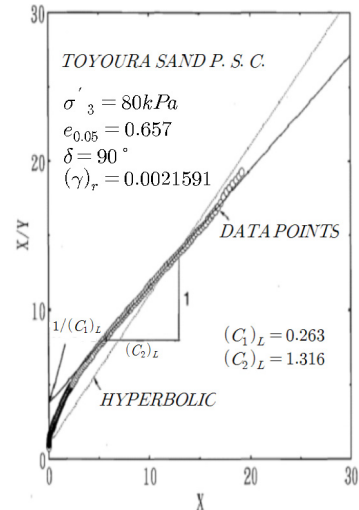


Fig. 8. $X/Y \sim X$ relationship of kondner (Toyoura sand)

부의 회귀에서 구할 수 있다. Fig. 8은 평면변형률압축 시험의 실측 데이터로부터 $X/Y \sim X$ 관계를 대표적으로 나타내었다. $(C_1)_L$ 값은 모래의 경우 약 0.09~0.26이며, 유리 구슬의 경우는 모래보다 약간 큰 값인 약 0.25~0.31로 나타났다. 한편, $(C_2)_L$ 값은 모래의 경우 약 1.13~1.34이며, 유리 구슬의 경우는 모래보다 약간 작은 값인 약 1.06~1.15였다. 다시 말하면 피팅에 사용한 강도 $(\tau_{max})_{fit}$ 는 $(C_2)_L \times \tau_{max}$ 으로 되며, 강도 τ_{max} 을 과대평가하게 된다. 또한 피팅에 사용한 강성률 $(G_{max})_{fit}$ 는 $(C_1)_L \times G_{max}$ 으로 되며, 강성률 G_{max} 을 과소평가하게 된다는 것을 의미한다.

이와 같이 구한 파라메타 $(C_1)_L, (C_2)_L$ 를 식 (13)에 대입하여 각 시료의 실측 데이터에 피팅한 것이 Fig. 4~Fig. 7의 Kondner로 나타낸 곡선이다. 실측데이터와 비교하면 다음과 같은 사항을 알 수 있다

① Fig. 4 및 Fig. 5에서 알 수 있듯이 대변형률 수준에서는 원형쌍곡선 관계에 의한 피팅보다 실측 데이터에 가깝게 있지만, 전단초기부분의 변형률 수준에서는 실측 데이터보다 아래 방향으로 떨어져 간다. ② Fig. 6의 변형률에 대한 할선변형계수의 관계에서는 미소변형률 수준에서의 변형계수를 매우 과소평가하고 있다. ③ Fig. 7의 응력에 대한 할선변형계수의 관계에서는 실측 데이터는 곡선이지만 이 방법에 의한 피팅은 파괴에 가까운 부분만 직선근사 할 수 있다.

즉, 이 방법은 파괴에 가까울수록 실측 데이터와 일치하지만, 미소변형률 수준과 작은 응력 수준에서는 실측 데이터와 전혀 일치하고 있지 않다.

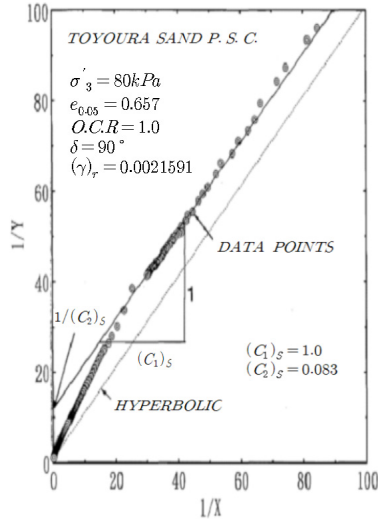


Fig. 9. 1/Y ~ 1/X relationship of kondner (Toyoura sand)

3.3.2 미소변형률 수준에 대한 방법(1/Y ~ 1/X법)

이 방법은 대변형률 시의 타당성은 무시하고 미소변형률 시의 응력-변형률 관계를 피팅할 수 있도록 강성률과 피크강도를 보정하여 사용하는 방법이다. 식 (13)은 식 (14)와 같이 바꿀 수 있다.

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{X} \cdot \frac{1}{(C_1)_s} + \frac{1}{(C_2)_s} \quad (14)$$

이러한 파라메타 $(C_1)_s$, $(C_2)_s$ 는 1/Y ~ 1/X관계의 직선부의 회귀에서 구할 수 있다. Fig. 9는 평면변형률압축 시험의 실측 데이터로부터 1/Y ~ 1/X관계를 대표적으로 나타내었다. $(C_1)_s$ 값은 어느 입상체에서도 1.0에 가까운 값을 나타내었다. 한편, $(C_2)_s$ 값은 1.0보다 작은 약 0.1 ~ 0.5이었다. 피팅에 사용한 강도 $(\tau_{max})_{fit}$ 는 $(C_2)_s \times \tau_{max}$ 으로 되며, 강도 τ_{max} 을 과소평가하게 된다.

3.3.3 Hardin과 Drnevich의 방법

Hardin과 Drnevich(1972)에 의하면 광범위한 종류의 토질을 반복 공진주 전단시험에서 얻은 미소변형률 수준에서 1%정도까지의 응력-변형률 관계는 다음과 같은 쌍곡선으로 표현할 수 있다.

$$Y/X = 1 / (1 + \gamma_h) \quad (15)$$

여기서 $Y/X = G_{eq}/G_{max}$,

$$\gamma_h = x / \{1 + a \times \exp(-b \times X)\}$$

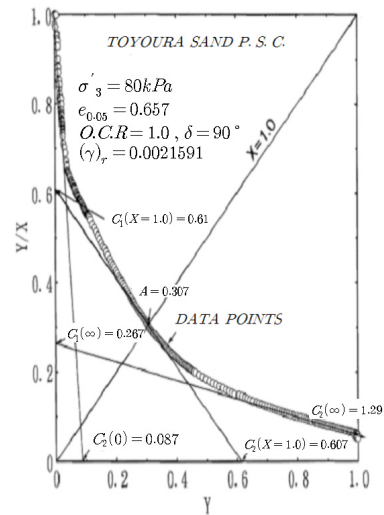


Fig. 10. Y/X ~ Y relationship of hardin and drnevich (Toyoura sand)

이 식은 $C_1=1.0$, $C_2=1/\{1+a \times \exp(-b \times x)\}$ 라고 하면 식 (9)와 동일하게 된다. 이 방법의 특징은 쌍곡선관계와는 달리 파라메타 C_2 가 X의 함수로 되어 있다는 것이다. Tatsuoka and Shibuya(1991)는 Hardin과 Drnevich가 구한 식 (15)에서의 a, b를 사용하여 이 식의 관계를 Toyoura sand에 피팅하면 원형쌍곡선보다도 실측 데이터에서 멀어진다는 것을 나타내었다. 또한 보다 합리적인 방법으로 a, b를 구해 피팅 해보았지만 실측 데이터의 초기 부분만이 적합하였다고 하였다. 본 연구에서는 a, b값을 Tatsuoka and Shibuya(1991)가 사용한 방법과 같이 각 시료의 데이터에 피팅하여 그 결과를 검토하였다. Fig. 10에 Toyoura sand 시료의 Y/X ~ Y 관계를 나타내었다. Figure 중 점 A는 실측 데이터와 X=1.0 선이 교차하는 점이다. 식 (15)가 이 점을 통과할 때 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$Y(X=1.0) = 1.0 / (2.0 + a) \cdot \exp(-b) \quad (16)$$

이 $Y(X=1.0)$ 값은 실측 데이터로부터 구해진다. 예를 들면 Fig. 10의 Toyoura sand의 경우 $Y(X=1.0)$ 값은 0.307이다. 한편 초기 직선부분은 $Y/X = 1/\{1+X/C_2(0)\}$ 로 나타내어진다. 이 식에서 $C_2(0)$ 는 식 (15)에서 $1/(1+a)$ 과 동일하다. a, b는 각각 10.19, 2.12였다. 이와 같이 하여 구한 값을 사용하여 식 (16)을 각 시료의 구속압 $\sigma_3=80kPa$ 하에서 평면변형률압축시험을 실시하여 구한 데이터에 피팅한 것이 Fig. 4~Fig. 7의 Hardin이라고 나타난 곡선이다. 실측 데이터와 비교 검토하면 다음과 같

Table 2. Parameters

sand	σ_3 (kPa)	τ_{max} (kPa)	G_{max} (kPa)	X_e	C_1 ($X=X_e$)	C_1 ($X=\infty$)	C_2 ($X=X_e$)	C_2 ($X=\infty$)	α	β	$(\gamma)_r$
Toyoura	0.80	2.7278	960	0.007	1.0	0.270	0.178	1.306	0.709	0.978	0.00215910
S.L.B.	0.80	1.8070	1840	0.032	1.0	0.127	0.527	1.086	3.887	17.394	0.00098204
Silica	0.80	1.7312	1100	0.012	1.0	0.120	0.112	1.284	0.559	1.894	0.00157380
Karsruhe	0.80	1.7958	1800	0.012	1.0	0.095	0.102	1.214	0.701	1.689	0.00099770
Monterey	0.80	2.2949	1500	0.017	1.0	0.240	0.171	1.241	0.645	1.073	0.00153001
Ticino	0.80	2.3409	1180	0.006	1.0	0.140	0.102	1.273	0.541	1.532	0.00198380
Hostun	0.80	2.2741	1020	0.011	1.0	0.230	0.106	1.232	0.566	0.839	0.00222950
G.B.1	0.80	1.1284	1320	0.026	1.0	0.240	0.283	1.161	1.058	1.277	0.00085480
G.B.2	0.80	1.1140	1600	0.034	1.0	0.337	0.490	1.074	1.724	1.307	0.00069620

은 사항을 알 수 있다.

① Fig. 4 및 Fig. 5에서 알 수 있듯이 전단초기부분은 다른 방법보다 실측 데이터에 근접해 있지만 피크 부근에 이르러서는 원형쌍곡선과 같이 실측 데이터로부터 멀어져 간다. ② Fig. 6의 변형률에 대한 할선변형계수의 관계에서도 소변형률 수준에서만 적합하다고 할 수 있다. ③ Fig. 7의 응력에 대한 할선변형계수의 관계에서는 다른 방법들과 달리 초기 부분에서는 실측 데이터와 유사하게 나타났다. 그러나 응력 수준이 증가함에 따라 변형계수를 과대 평가하고, 응력 수준이 더 크게 되어 피크에 가까워지면 변형계수를 과소평가한다.

4. 새로운 식의 제안(Tatsuoka and Shibuya, 1991)

지금까지 각 입상체의 미소변형률 수준에서부터 피크에 이르는 대변형률까지의 응력-변형률 관계를 원형쌍곡선관계와 보정계수를 도입한 방법에 대하여 검토하였지만 어떠한 방법을 사용하더라도 실측 데이터를 표현하는 것은 불가능하다는 것이 확인되었다. Tatsuoka and Shibuya(1991)는 광범위한 변형률수준, 단조재하와 반복재하, 각종의 토질재료에 대해서 적용할 수 있는 응력-변형률 관계의 정식화를 제안하였다. 제안된 식을 기술하면 다음과 같다. 식 (9), 식 (10)에서 파라미터 $C_1(X)$, $C_2(X)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$C_1(X) = \frac{C_1(X = X_e) + C_1(X = \infty)}{2} + \frac{C_1(X = X_e) - C_1(X = \infty)}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{[\alpha / (X - X_e)]^m + 1}\right] \quad (17)$$

$$C_2(X) = \frac{C_2(X = X_e) + C_2(X = \infty)}{2} + \frac{C_2(X = X_e) - C_2(X = \infty)}{2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{[\beta / (X - X_e)]^n + 1}\right] \quad (18)$$

$C_1(X=X_e)$ 은 1.0이며, 파라미터 $C_1(X=\infty)$, $C_2(X=X_e)$, $C_2(X=\infty)$, α , β 는 다음과 같이 결정된다. m , n 은 1.0이다. Fig. 10에 나타난 $Y/X \sim X$ 관계에서 $C_2(X=X_e)$ 는 초기 부분 직선 근사선 Y 축과의 교차점 값이다. $C_1(X=\infty)$, $C_2(X=\infty)$ 는 큰 응력 수준에서의 직선 근사선이 각각 Y/X 축과 X 축과의 교차점 값이다. 이 값은 Kondner의 피팅 방법에서 구한 C_1 , C_2 와 동일하다. A점은 실측 데이터와 $X=1.0$ 선과의 교차점이다. α , β 는 이 A점에서 실측 데이터에의 접선을 그어 그 선이 Y/X 축과 Y 축에 각각 교차하는 점을 $C_1(X=1.0)$, $C_2(X=1.0)$ 으로 하여 이 값들과 $X=1.0$ 을 식 (17) 및 식 (18)에 대입하여 구한다. Fig. 10에서 proposed 라고 표시한 곡선이 위와 같은 과정으로 구한 파라미터 값을 사용하여 $Y \sim X$ 관계(대변형률 수준), $Y \sim X$ 관계(소변형률 수준), $Y/X \sim \log X$ 관계, $Y/X \sim Y$ 관계를 각 입상체의 시험 결과에 나타난 것이다. Table 2는 본 연구에서 수행된 평면변형률압축시험의 실측 데이터를 이러한 방법으로 피팅을 실시하고 이러한 것들로부터 얻어진 파라미터 값을 정리한 것이다. 실측 데이터와 비교 검토하면 다음과 같다.

① Fig. 4 및 Fig. 5에서 알 수 있듯이 미소변형률 수준에서 피크까지 실측 데이터와 매우 일치함을 알 수 있다. ② Fig. 6의 변형률에 대한 할선변형계수의 관계, Fig. 7의 응력에 대한 할선변형계수의 관계에서도 실측 데이터와 매우 일치함을 알 수 있다. 따라서 본 연구를 통해 평면변형률압축조건, 다양한 모래의 종류 및 유리

구슬 등에도 Tatsuoka and Shibuya(1991)가 제안한 식이 매우 유용하게 적용될 수 있다고 판단된다.

5. 결론

본 연구에서는 세계 각국의 주요 연구기관에서 사용되고 있는 7종류의 연구용 표준사 공시체 및 2종류의 유리 구슬(Glass beads) 공시체를 공중낙하법에 의해 제작하고, 등방압밀시켜 미소변형률 측정장치를 사용한 평면변형률압축시험을 실시하였다. 실험 결과 얻어진 미소변형률에서 파괴 시까지의 응력-변형률 관계를 기존의 원형쌍곡선관계식, Kondner의 수정쌍곡선관계식, Hardin과 Drnevich의 제안식과 Tatsuoka and Shibuya(1991)에 의해 제안된 새로운 식에 적용하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 파라메타가 변형률 수준 및 응력 수준에 의존하지 않고 일정한 쌍곡선관계는 전단 초기에는 실측 데이터보다 큰 값을 나타내나 피크에 가까울수록 실측 데이터보다 작은 값을 나타내었다. 따라서 미소변형률 수준에서 피크까지의 광범위한 응력-변형률 관계 전체를 쌍곡선관계로 모델화 시키는 것은 불가능하다.
- (2) Kondner 방법은 대변형률 수준에서는 원형쌍곡선 관계에 의한 피팅보다 실측 데이터에 가깝게 있지만, 전단초기부분의 변형률 수준에서는 실측 데이터보다 아래 방향으로 떨어져 간다. 한편, 변형률에 대한 할선변형률계수의 관계에서는 미소변형률 수준에서의 변형률계수를 매우 과소평가하고 있으며, 응력에 대한 할선변형률계수의 관계에서는 실측 데이터는 곡선이지만 이 방법에 의한 피팅은 파괴에 가까운 부분만 직선근사 할 수 있다.
- (3) Hardin 방법은 전단초기부분은 다른 방법보다 실측 데이터에 근접해 있지만 피크 부근에 이르러서는 원형쌍곡선과 같이 실측 데이터로부터 떨어져 간다. 한편, 변형률에 대한 할선변형률계수의 관계에서도 소변형률 수준에서만 적합하다고 할 수 있으며, 응력에 대한 할선변형률계수의 관계에서는 다른 방법들과

달리 초기 부분에서는 실측 데이터와 유사하게 나타났다. 그러나 응력 수준이 증가함에 따라 변형률계수를 과대평가하고, 응력 수준이 더 크게 되어 피크에 가까워지면 변형률계수를 과소평가한다.

- (4) 쌍곡선, Kondner, Hardin 방법 중 전체적으로 Kondner 방법이 실측 데이터와 가장 유사하게 피팅되었으나, 이 또한 미소변형률 수준에서는 실측 데이터를 재현하지 못한다.
- (5) Tatsuoka and Shibuya에 의해 새롭게 제안된 응력-변형률 관계의 정식화를 사용하여 본 연구에서 수행한 평면변형률압축시험 데이터에 피팅한 결과 미소변형률 수준에서 피크까지 실측 데이터와 매우 잘 일치하였다. 따라서 향후 평면변형률압축 조건하의 매우 다양한 입상체의 수치해석 시에도 Tatsuoka and Shibuya에 의해 제안된 식이 매우 유용하게 적용될 수 있는 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. Goto, S., Tatsuoka, F., Shibuya, S., Kim, Y. S., and Sato, T. (1991), "A Simple Gauge for Local Small Strain Measurements in the Laboratory," *Soils and Foundations*, Vol.31, No.1, pp.169-180.
2. Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972), "A Study on the Hyperbolic Model for Nonlinear Stress-Strain Relations of Geo-Materials", *Journal of SMF Div., ASCE*, Vol.98, No.SM7, pp.667-692.
3. Kondner, R. B. (1963), "Hyperbolic Stress-Strain Response : Cohesive Soils", *Journal of SMF Div., ASCE*, Vol.89, No.SM1, pp.115-143.
4. Park, C. S. and Jang, J. W. (1998), "Lubrication of Specimen Ends for Granular Materials in Element Tests", *Journal of Korean Society of Civil Engineers*, Vol.18, No.3, pp.689-698.
5. Park, C. S., Dong, J., Abe, F., Shibuya, S., and Tatsuoka, F. (1990), "Small Strain Behaviour of Sands in Plane Strain Compression-Part II," *SEISAN-KENKYU*, Vol.42, No.10, pp.590-593.
6. Park, C. S., Tatsuoka, F., Jang, J. W., and Chung, C. K. (1994), "Small Strain Measurements of Sands in Plane Strain Compression", *Journal of the Korean Geotechnical Society*, Vol.10, No.1, pp.27-45.
7. Sibuya, S., Park, C. S., Abe, F., and Tatsuoka, F. (1991), "Small Strain Behaviour of Sands in Plane Strain Compression-Part I", *SEISAN-KENKYU*, Vol.42, No.9, pp.561-564.
8. Sibuya, S., Tatsuoka, F., Abe, F., Kim, Y. S., and Park, C. S. (1991), "Non-Linearity in Stress-Strain Relations of a Wide Range of Geotechnical Engineering Materials-Part I", *SEISAN-KENKYU*, Vol. 43, No.2, pp.129-132.
9. Tatsuoka, F. and Shibuya, S. (1991), "Modelling of Non-Linear Stress-Strain Relations of Soils and Rocks-Part I", *SEISAN-KENKYU*, Vol.43, No.9, pp.23-26.

(접수일자 2011. 8. 24, 심사완료일 2012. 11. 27)