

Correlation between the Stock and Futures Markets by Timescale

Chang Min Lee¹ · Hahn Shik Lee²

¹Hanwha Life Insurance Economic Research Institute

²Department of Economics, Sogang University

(Received August 22, 2012; Revised September 24, 2012; Accepted November 14, 2012)

Abstract

This paper examines the relationship between the stock and futures markets in terms of lead-lag relationship, correlation and the hedge ratio using wavelet analysis. The basic finding is that the relationship between the two markets significantly depends on the time-scale. First, there is a feedback relationship between the stock and futures markets in the long-run scale; however, weaker evidence is observed in shorter-run scales. Second, wavelet correlation between the two markets increases for a longer time scale. Third, the hedge ratio and the effectiveness of hedging strategies increase as the investment horizon gets longer. The results in this paper indicate that the stock and futures series are perfectly correlated in the long run and are tied together over long horizons.

Keywords: Correlation, causality, hedge ratio, wavelet, timescale.

1. 서론

헤지는 현재 보유하고 있거나 미래 보유할 예정인 투자자산 또는 투자 포트폴리오의 가치 하락에 대한 가격변동 위험을 없애거나 줄이는 행위를 의미한다. 가격변동에 수반되는 리스크를 관리하기 위한 헤지 시행에는 시간을 고려한 의사결정이 필요하다. 시간은 몇분 정도의 매우 짧은 기간부터 몇주 또는 몇달 정도의 긴 기간 등 다양한 기간이 존재한다. 이에 따라 금융시장에서 주식과 선물시장의 장·단기 관계를 파악하고 포트폴리오 관리를 수행하는 것은 매우 중요하다.

한편 주식과 선물시장에서 위험을 없애거나 줄이기 위해 가장 중요한 것은 최적 헤지비율을 결정하는 것이다. 최적 헤지비율을 결정하는데 있어서도 시간주기에 따른 주식과 선물의 장·단기적인 관계를 고려할 필요가 있다. 즉 장·단기 헤지비율이 유사하다면 헤지들은 최적 헤지비율 선정에 있어서 장단기 관계가 크게 중요하지 않겠지만, 장·단기 헤지비율이 크게 차이가 난다면 헤지들은 장단기 관계를 고려하여 이에 맞는 포트폴리오를 관리해야 한다.

Lee (1999)는 금융시장에서 공분산이 시간에 따라 변하며 시간에 따라 최적 헤지비율이 변하지 않는다는 전통적인 가정은 적절치 않다고 하였다. 이러한 헤지비율을 측정하기 위해 초창기 연구들은 단순히 주식을 선물가격에 회귀분석을 한 후 그 계수값을 헤지비율로 사용하였다. 시간에 따라 변화하

²Corresponding author: Professor, Department of Economics, Sogang University, Seoul 121-742, Korea.
E-mail: hahnlee@sogang.ac.kr

는 헤지비율에 관한 연구로는 자기회기 조건부이분산(GARCH) 모형, 확률적 변동성(SV; stochastic volatility) 모형을 이용한 분석이 많이 개발되었다. Kroner과 Sultan (1993), Lien과 Luo (1994), Moschini와 Myers (2002) 등은 GARCH 모형을 사용했으며, Anderson과 Sorensen (1996), Lien과 Wilson (2001) 등은 SV 모형을 사용하여 시간에 따라 변화하는 헤지비율을 추정하였다. Howard와 D'Antonio (1991), Lien과 Luo (1993, 1994), Geppert (1995), Lien과 Wilson (2001)은 다양한 방법으로 다기간 최소 위험 헤지전략에 관한 연구를 실시하였다.

최근 들어 경제학 또는 재무분야에서 소파동 분석을 사용한 연구가 크게 발전되고 많은 논문들이 발간되고 있다. Arino (1995)는 소파동 분해방법으로 시계열 자료를 추세·순환 변동과 계절·불규칙 변동으로 나누어 모형화한 후 이를 토대로 예측치를 구하는 방법을 제시하였으며, Goffe (1994)는 불안정한 경제시계열 자료에 대해 소파동 분석기법을 적용하였다. Ramsey와 Lampart (1998a)는 소파동 기법으로 통화량과 소득을 각 주기별로 분해한 후, 통화량과 소득 사이의 인과관계가 주기별로 다른 패턴을 보인다는 것을 제시하였다. Gençay 등 (2001)은 소파동 필터를 활용하여 주식자료의 움직임에 대한 분석을 시도하였다. In과 Kim (2006)은 소파동 분석을 이용하여 미국 주식과 선물시장에 대한 인과관계와 상관관계, 그리고 시간주기에 따른 헤지비율(hedge ratio) 등에 관한 분석을 실시하였다.

이와 같이 경제·재무 지표의 분석을 위해 사용되는 소파동 분석기법은 크게 네 가지 유형으로 분류할 수 있다. 첫째로 Ramsey와 Lampart (1998a)에서와 같이 일반적인 소파동 분해(discrete wavelet decomposition)를 적용하는 방법이 있고, 둘째 유형으로는 Capobianco (2003)에서와 같이 소파동의 잡음제거기법(denosing method)을 이용하는 것이다. 셋째 유형으로는 소파동 분산/공분산 분석을 활용한 Gençay 등 (2002)와 In과 Kim (2006)을 들 수 있다. 넷째 유형으로는 시계열의 장기지속성(long memory)을 분석한 McCoy와 Walden (1996), Abry 등 (1998), Tkacz (2001) 등의 연구가 있다 (소파동 기법을 적용한 경제·재무 지표의 최근 실증 연구에 대해서는 Lee (2005b) 및 여기에 인용된 참고 논문 참조).

본 연구에서는 소파동 분석을 이용하여 인과관계(lead-lag relationship), 공분산 및 상관관계, 그리고 시간주기에 따른 헤지비율 등 우리나라 주식과 선물시장의 관계를 재조명해 보았다. 첫째, 소파동 분석을 통해 데이터를 다양한 시간주기(time scale)에 따라 분해하였으며, 시간주기에 따라 데이터를 분해한 후 두 변수간의 인과관계를 살펴보았다. 투자자들은 주식과 선물거래시 시간주기에 따라 각각 다른 의사결정을 하게 된다. 즉 투자자들은 분별, 시간별, 일별, 월별, 년별로 시간주기를 구별하여 의사결정을 하고, 시간주기의 특성에 맞게 금융거래를 실시한다. 경제학자들과 재무분석가들은 이러한 다양한 시간주기에 따른 의사결정에 관심을 가지고 있었으나, 두 기간 이상 데이터를 분석할 수 있는 분석 방법의 부족으로 인해 그동안의 관련 연구가 두 기간(단기와 장기)으로 제한되어 있었다. 이전 연구들의 분석 방법 한계를 극복하고자 본 연구에서는 소파동 분석기법을 사용하여 다양한 시간주기에 따른 주식과 선물지수에 대한 직교분해를 실시하여 분석을 하였다. 특히 시간주기에 따른 금융데이터 분해는 주식과 선물시장에 대한 인과관계를 시간주기별로 도출할 수 있게 해주었다.

둘째, 소파동 분석으로 서로 다른 두개의 확률 과정에 대한 공분산을 시간주기에 따라 분해하였으며, 이에 따라 시간주기에 따라 공분산/상관관계에 대한 분석을 실시하였다. 마지막으로 소파동 분석을 통해 시간주기에 따른 헤지비율을 계산하였다. 전통적인 헤지비율 계산은 몇가지 문제점이 내포되어 있는데, GARCH 모형이나 SV 모형은 오차항에 대한 일정한 가정이 필요한데, 이에 따라 정확하지 못한 결과가 도출될 가능성이 나타난다. 소파동 분석은 시간주기에 따른 분해와 비모수적 분석을 통해 전통적 헤지비율 계산에서 나타나는 한계를 극복할 수 있다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 최소분산헤징에 대한 기초 이론을 소개하였다. 제 3절에서는 소파동의 기본개념을 간략히 정리하고, 소파동 분산 및 공분산, 상관계수 등에 대해 살펴보았다. 제

4절에서는 소과동 기법을 적용한 실증분석 결과에 대해 논의하였으며, 제 5절에서는 본 연구의 주요 결과에 대한 요약 및 결론을 제시하였다.

2. 최소분산헤징

헤징이란 현물의 미래가격이 불확실함으로써 생기는 가격변동 리스크를 줄이거나 없애기 위해 선물시장에서 현물과 반대되는 포지션을 취하는 것을 의미한다. 즉 현물보유에 따른 이익(또는 손실)이 선물거래로 발생하는 손실(또는 이익)로 상쇄될 수 있도록 선물시장에서 포지션을 취함으로써 이를 통해 미래에 가격이 어떤 방향으로 변화더라도 수익을 일정수준에서 안정시키는 것을 의미한다. 즉 투자자는 헤징을 통해 거래하고자 하는 현물의 미래가격을 현재 시점에서 고정시켜 놓을 수 있다.

헤징의 유용성은 불확실한 미래의 가격변동으로 인한 리스크를 줄이는 데 있다. 미래 현물가격의 가격변동 리스크를 조정하기 위해서는 선물시장에서 얼마만큼의 계약에 대한 포지션을 취해야 하는 문제에 직면한다. 이는 헤징대상 현물의 규모 대비 선물 규모의 비율로 정의되는 헤지비율(hedge ratio)을 결정하는 문제이다. 최소분산헤징 이론이란 헤징의 목적을 가격변동의 분산을 최소화하는 데 있다고 보고, 포트폴리오 이론을 적용하여 최소분산 헤지비율을 제시하는 이론이다. 먼저 최소분산 헤지비율 도출하기 위하여 사용될 기호들을 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta S &= \text{헤징대상 자산인 현물가격}(S) \text{의 변화분} \\ \Delta F &= \text{헤징대상 자산인 선물가격}(F) \text{의 변화분} \\ \sigma_s^2 &= \Delta S \text{의 분산}; \quad \sigma_f^2 = \Delta F \text{의 분산} \\ \sigma_{sf} &= \Delta S \text{와 } \Delta F \text{의 공분산}; \quad \rho_{sf} = \Delta S \text{와 } \Delta F \text{간의 상관계수} \\ h &= \text{헤지비율}\end{aligned}$$

이러한 포트폴리오 하에서 수익률 ΔHP 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta HP = \Delta S - h\Delta F. \quad (2.1)$$

투자자가 평균-분산 기대효용함수(mean-variance expected utility function)를 갖고 있다고 가정하면, 기대효용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EU(\Delta HP) = E(\Delta HP) - \gamma \text{Var}(\Delta HP), \quad (2.2)$$

여기서 γ 는 리스크 회피정도($\gamma > 0$)이다. 이러한 조건하에, 투자자의 목적은 식 (2.1)의 효용을 극대화하는 것이다.

$$\text{Underover } \max_h EU(\Delta HP) = \text{Underover } \max_h [E(\Delta S) - hE(\Delta F) - \gamma(\sigma_s^2 + h^2\sigma_f^2 - 2h\sigma_{sf})], \quad (2.3)$$

여기서 헤지는 동적 헤징전략을 취하는 것을 가정한다. 식 (2.3)으로부터 결정되는 최적헤지비율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h^* = \frac{-E(\Delta F) + 2\gamma\sigma_{sf}}{2\gamma\sigma_f^2}. \quad (2.4)$$

선물가격 변화가 마팅계일을 따르는 경우, 즉 $E(F_1) = F_0$ 가 성립하면, 식 (2.4)는 다음과 같이 표현된다.

$$h^* = \frac{\sigma_{sf}}{\sigma_f^2} \quad (2.5)$$

헤지효과성(hedging effectiveness)은 헤징을 통해 보유하고 있는 자산의 가격 변동 리스크를 얼마나 잘 회피할 수 있는가를 의미하는데, 즉 현물시장의 손실이 선물시장의 이익으로 어느 정도 보전될 수 있는가를 의미한다. 이에 따라 헤지효과성은 현물가격 수익률의 분산에서 헤지에 의해 감소되는 비율로 측정된다. 그러므로 헤지효과성은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$EH = \frac{\text{Var}(\Delta S) - \text{Var}(\Delta HP)}{\text{Var}(\Delta S)} = 1 - \frac{\text{Var}(\Delta HP)}{\text{Var}(\Delta S)} = \rho_{sf}^2, \quad (2.6)$$

여기서 ρ_{sf}^2 는 현물과 선물시장의 상관계수의 제곱을 의미한다. 식(2.6)에서 보면, 헤지효과성은 현물과 선물가격간의 상관관계에 따라 결정되는데, 상관계수가 1인 경우 헤지의 효과는 포트폴리오의 위험을 0으로 만들어준다(헤지효과성에 대한 설명은 In과 Kim (2006) 참조).

헤지비용과 헤지효과성을 계산하기 위해서는 식 (2.5), (2.6)에서 제시된 것처럼 각 변수에 대한 분산, 공분산, 상관계수 값을 알아야 한다. 다음 절에서는 소파동 분석 이론을 소개하고, 소파동을 이용하여 시간주기를 고려한 분산, 공분산, 상관계수를 도출하고자 한다.

3. 소파동 분석 이론

주식시장과 선물시장에는 다양한 투자자들이 존재하고, 투자자들이 투자의사를 결정할 때는 다양한 시간주기에 따라 의사결정을 시행한다. 그러므로 두 시장의 관계를 연구할 때는 각각 다른 시간주기에 따른 연구를 수행해야 한다. 소파동 분석은 데이터를 시간 주기에 따라 분해하여, 주식시장과 선물시장간의 인과관계, 상관관계, 헤지비용과 헤지효과성 등의 관계를 연구할 수 있도록 해준다.

3.1. 소파동의 기본 개념

소파동 분석은 1980년대 초부터 본격적인 연구가 시작되어 최근에는 경제시계열 및 재무관련 지표의 분석 등 사회과학에도 그 적용이 확대되고 있다. 소파동은 특정 시간에 한정된 작은 파동 자체를 의미하는 것으로 시계열의 시간영역뿐만 아니라 진동수영역에 대한 정보를 동시에 사용할 수 있다. 소파동은 푸리에(Fourier) 변환과 같은 맥락의 함수변환이라 할 수 있는데, 푸리에 변환과는 달리 시계열 자료의 장기적인 추세와 단기적인 변동을 동시에 효율적으로 식별할 수 있는 방법이다. 특히 소파동 분해(wavelet decomposition), 다중주기분석(MRA; multiresolution analysis), 시간·주기 분석(time-scale analysis) 등의 기법은 경제변수의 분해·예측·평활화 등에 매우 유용한 분석기법이라 할 수 있다.

소파동의 기본적인 특징을 살펴보면, 소파동은 다음과 같은 규모조정(scaling)과 구간이동(translation)을 나타내는 기본규모함수(scaling functions)에 의해 생성되는 함수를 기초로 한다.

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi \left(2^{-\frac{j}{2}} t - k \right) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right), \quad (3.1)$$

여기서 2^j 는 일련의 규모조정을 나타내는 것으로, $2^{-j/2}$ 는 기본함수 $\phi(t)$ 의 규모(norm)를 1로 유지시키는 작용을 한다. 위의 식에서 각 기본 소파동의 위치는 전이모수라고 불리는 $2^j k$ 에 따라 결정되고, 그 크기는 주기분할(frequency partitioning)에 적용되는 규모요인(scale factor) 2^j 에 의해 결정된다. 따라서 j 와 k 가 변화하면 기본함수의 정의역이 달라지게 된다. 즉 j 가 커짐에 따라 규모요인 2^j 가 증가하게 되고, 이와 함께 함수 $\phi_{j,k}(t)$ 가 짧아지면서 더 넓게 퍼지게 됨을 알 수 있다.

위 식 (3.1)과는 달리 모소파동(mother wavelet)이라 불리는 다른 유형의 함수 집합 $\psi(t)$ 을 이용하여 시계열 자료의 또 다른 중요한 특징을 분석할 수 있다. 이는 인접한 두 공간 사이의 차이를 반영하는 것

으로, 직교성(orthogonality)을 고려하여 L^2 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L^2 = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \dots \quad (3.2)$$

여기서 L^2 는 함수 $f(t)$ 의 제곱적분가능(square integrable) 함수공간을 나타내며, \oplus 는 직교합(orthogonal sum)을 나타낸다.

이러한 관계는 다중주기분석을 통해 시계열 자료의 미세한 부분에 대한 정보를 단계적으로 제거함으로써 각 단계에서의 대략적 패턴에 대해 체계적으로 정도가 낮은 근사값(coarser approximation)을 도출할 수 있다는 것을 보여준다. 또한 이러한 관계로부터 $W_0 \subset V_1$ 등의 관계를 도출할 수 있는데, 이는 소파동을 각각 다음 단계의 부모파동(farther wavelet)에 의해 생성되는 공간 내에 속하는 것으로 해석할 수 있음을 의미한다.

부모파동 $\psi(t)$ 은 식(3.1)과 동일한 형태의 기본규모함수의 형태를 갖는다.

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi \left(2^{-\frac{j}{2}} t - k \right) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right). \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 j 가 작은 경우, 즉 낮은 주기 수준(low resolution level)에서는 신호의 완만한 부분(smooth components)을 추출해 낼 수 있는 반면, 큰 값의 j 에 해당되는 높은 주기(high resolution) 수준에서는 신호의 변화 부분(variable components)을 추출해 낼 수 있다.

식 (3.2)을 이용하여 임의의 시계열 자료 $f(t)$ 를 다음과 같이 규모함수(scaling function)와 소파동에 의한 확장식으로 전개할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k) \psi_{j,k}(t), \quad (3.4)$$

여기서 첫째 항은 $f(t)$ 의 저주기(또는 낮은 수준)에서의 근사식을 나타내고, 둘째 항은 j 가 증가함에 따라 점점 더 고주기(또는 정도 높은 부분)가 단계적으로 추가됨을 나타낸다 (소파동의 기본 개념에 대해서는 Lee (2005a), Lee (2005b) 참조).

이산형소파동변환(DWT; discrete wavelet transform)은 이산신호 f_1, \dots, f_n 에 대한 소파동 시리즈의 근사값 계수를 계산한다. DWT는 벡터 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)'$ 를 소파동 계수값 벡터 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ 로 보여주는데, 벡터 w 는 식 (3.4)의 소파동 근사 시리즈 계수 $s(k)$ 와 $d(j,k)$ 를 포함하고 있다.

한편 본 연구에서는 DWT 분석방법 대신에 MODWT(maximum overlap DWT)를 사용하였다. 이산형소파동변환은 2^n 개의 자료에 적합한 변환으로 시계열의 길이가 이와 다를 경우 자료의 양 끝에 대한 연장이 필요하다. 또한 이산형소파동변환으로 경제시계열을 변환할 경우, 해당 자료를 분석하기 시작하는 시점에 따라 그 결과가 달라지는 문제가 있다. MODWT는 이 문제를 완화할 수 있는 접근 방법으로, MODWT는 DWT와는 달리 2^n 개의 자료가 아닌 경우에도 분석이 가능하다. MODWT MRA 계수는 영위상필터(zero-phase filters)와 관련되어 있어, 소파동 근사시리즈 계수 $s(k)$ 및 $d(j,k)$ 가 원시계열 자료수와 일치한다. 즉 각 분해주기(scale)에 있는 계수의 수가 일정하여 시계열 분해에서 유용하게 적용될 수 있다. DWT와 MODWT 모두 시계열 자료의 분산에 대한 분석을 할 수 있으나, MODWT로 추정된 소파동 분산이 DWT 분산 추정량에 비해 접근적 효율성을 갖는다. 단 MODWT는 DWT와는 달리 직교성이 없으며, 계산속도가 DWT보다 느리다는 단점이 있다.

3.2. 소파동 분산, 공분산, 상관계수 추정

소파동 계수는 특정 주기에서의 변화를 의미한다. 그러므로 확률과정에 MODWT를 적용하면 주기에 따른 분해를 수행할 수 있다. Percival과 Walden (2000)은 일반적인 변동성 개념을 특정 주기에서의 변동성 측정에 적용하여 소파동 분산의 개념을 소개했다. In과 Kim (2006)은 소파동을 이용한 시간주기에서의 분산, 공분산, 상관계수 추정에 관한 실증분석을 시도하였다. 만약 주식과 선물 수익률이 시간에 독립이라고 가정하면, 이들에 대한 소파동 분산을 정의할 수 있다. 소파동 분산은 주기 $\lambda_j \equiv 2^{j-1}$ 에서의 MODWT 계수값을 이용하여 측정한다.

$$\tilde{v}_l^2(\lambda_j) \equiv \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \left(\tilde{d}_{j,t}^l \right)^2, \quad (l = X, Y), \quad (3.5)$$

여기서 $\tilde{d}_{j,t}^l$ 는 변수 l 의 주기 λ_j 의 MODWT 소파동 계수이고, $\tilde{N}_j = N - L_j + 1$ 는 경계조건의 영향을 받지 않는 계수의 수, $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ 은 주기 λ_j 소파동 필터의 길이이다.

소파동 공분산 또한 소파동 분산처럼 시간주기에 따라 분해를 할 수 있다. 특정 시간주기에서 소파동 공분산은 두 확률변수 사이의 공분산에 대한 기여도(contribution)를 의미한다 (Lindsay 등, 1996). 주기 λ_j 에서의 소파동 공분산은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Cov}_{XY}(\lambda_j) \equiv \frac{1}{\tilde{N}_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{d}_{j,t}^X \tilde{d}_{j,t}^Y, \quad (3.6)$$

소파동 공분산을 이용하여 소파동 상관계수를 계산할 수 있는데, 상관계수는 $\{X_t, Y_t\}$ 에 대한 소파동 공분산과 $\{X_t\}, \{Y_t\}$ 의 소파동 분산에 의해 구할 수 있다. 소파동 상관계수는 식 (3.5), 식 (3.6)을 사용해서 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\rho}_{XY}(\lambda_j) \equiv \frac{\text{Cov}_{XY}(\lambda_j)}{\tilde{v}_X(\lambda_j) \tilde{v}_Y(\lambda_j)}. \quad (3.7)$$

일반적인 두 변수에 대한 상관계수처럼 이와 같이 정의되는 소파동 상관계수에 대해서도 $|\tilde{\rho}_{XY}(\lambda_j)| < 1$ 의 조건이 성립한다.

두 시리츠의 소파동 분산, 공분산이 주어진 상황에서, 주기 λ_j 에서의 헤지비율은 식 (3.5)와 식 (3.6)을 사용해서 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$h_j^w = \frac{\text{Cov}_{sf}(\lambda_j)}{\tilde{v}_f^2(\lambda_j)}, \quad (3.8)$$

여기서 h_j^w 는 다주기(multi-scale) 헤지비율이며, 이는 소파동 주기에 따라 다양하게 나타난다.

4. 기본통계와 실증분석 결과

본 연구에서는 KOSPI 200 지수와 KOSPI 200 선물지수를 사용하여 실증분석을 실시하였다. 각 데이터는 일별 종가를 기준으로 사용하였고, 한국거래소에서 다운받았다. 각 변수는 로그 차분한 퍼센트 수익률($[\log P_t - \log P_{t-1}] * 100$) 개념으로 데이터를 변환하여 사용하였다. 특히 KOSPI 200 선물지수는 근월물에 거래가 집중되므로 근월물에 대한 계속적인 만기이전(roll over)을 가정하여, 근월물 지수로 표본을 구성하였다. 일부 연구에서는 만기일의 거래 부족 등의 이유로 만기 도달전에 차근월물 자료를 사용하기도 하였으나, 본 연구에서는 만기일 이후에 새로운 근월물 지수를 사용하였다(KOSPI 200

Table 4.1. Data description

변수(변수명)	KOSPI 200(dlkospi), KOSPI 200 선물(dlfkospi)
분석기간	전체기간: 2003/1/2~2012/6/29
	기간1: 2003/1/2~2008/9/12
	기간2: 2008/9/16~2012/6/29
특징	일별 종가 데이터를 사용하여 분석함. 각 변수는 로그 차분 후에 100을 곱한 수익률 자료를 나타냄. 선물은 근월물을 사용하였는데, 선물 만기 도달 후 차근월물 데이터를 사용함.

Table 4.2. Basic statistics

	전체기간		기간1		기간2	
	dlkospi	dlfkospi	dlkospi	dlfkospi	dlkospi	dlfkospi
평균	0.047	0.047	0.061	0.062	0.033	0.031
분산	2.468	2.760	2.055	2.377	3.047	3.302
왜도(Skewness)	-0.397	-0.401	-0.300	-0.292	-0.430	-0.471
첨도(Kurtosis)	7.728	7.093	4.393	4.710	9.498	8.618
ρ	0.014	-0.025	0.015	-0.026	0.022	-0.017
$LB(15)$ for R_t	19.32 (0.199)	25.08 (0.049)	25.02 (0.050)	28.69 (0.018)	8.33 (0.910)	11.25 (0.735)
ρ^2	0.167	0.152	0.038	0.072	0.194	0.176
$LB(15)$ for R_t^2	1552.50 (0.000)	1831.60 (0.000)	359.14 (0.000)	353.22 (0.000)	750.25 (0.000)	984.99 (0.000)
관측치 수	2360	2360	1411	1411	948	948

선물지수의 거래금액을 살펴본 결과, 만기일까지는 근월물 자료의 거래금액이 더 큰 것으로 나타났기 때문이다. 분석기간은 2003년 1월 2일부터 2012년 6월 29일까지이며, 전체 자료 수는 2361개, 로그차분한 수익률 자료 수는 2360개이다. 또한 2008년 글로벌 경제위기 이전과 이후의 차이를 살펴보기 위해 기간을 리먼브라더스 사태가 발생한 2008년 9월 15일을 기준으로 기간을 분리해서 분석하였다. 즉 전체기간 이외에 2003년 1월 2일부터 2008년 9월 12일까지를 기간1, 2008년 9월 16일부터 2012년 6월 29일까지를 기간2로 구분하여 분석하였다.

Table 4.2에는 주식과 선물지수 수익률에 대한 기초 통계량을 제시하였다. 모든 샘플 기간에서 표본 평균은 양의 값을 가졌는데, 기간2보다는 기간1에서의 수익률의 평균값이 큰 것으로 나타났다. 즉 리먼브러더스 사태이후 주식과 선물시장에서의 수익률이 이전 기간에 비해 평균적으로 낮게 나타났다. 한편 주식과 선물의 수익률을 비교하였을 때, 모든 기간에서 주식과 선물 수익률의 평균값이 비슷하게 나타났다. 즉 주식과 선물 어떤 금융상품에 투자하였더라도 위의 기간에서는 평균적으로 수익률에 큰 차이가 없었다는 것을 보여주었다.

전체기간에서의 KOSPI 200 수익률의 분산은 2.468이고, KOSPI 200 선물지수 수익률의 분산은 2.760으로 선물지수 수익률의 분산이 큰 것으로 나타났다. 또한 기간1, 기간2에서도 마찬가지로 선물지수 수익률의 분산이 주식 수익률의 분산보다 큰 것으로 나타났다. 즉 모든 기간에서 선물지수 수익률의 분산이 주가지수 수익률의 분산보다 크게 나타나 선물가격의 변동성이 큰 것으로 분석되었다. 또한 기간에 상관없이 왜도(skewness)는 음의 값을 가졌으며, 첨도(kurtosis)는 양의 큰 값을 가졌다. 왜도가 음의 값을 가진다는 것은 왼쪽으로 긴 꼬리를 가지는 분포라는 의미이며, 첨도가 3이상의 큰 값을 가져 위로 뾰족한 분포를 가지는 특성이 있음을 알 수 있다. 다만 기간1보다는 기간2에서의 첨도값이 훨씬 크게 나타났는데, 이는 기간2에서의 변동성이 큰 것과 일맥상통한다고 할 수 있다. Ljung-Box 값

Table 4.3. Granger causality test by timescale

	원자료	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	
전체 기간	$F \rightarrow S$	0.087	3.354**	43.406*	1.425	16.316*	19.353*	256.620*	88.867*	2.604
	Prob	0.768	0.067	0.000	0.233	0.000	0.000	0.000	0.000	0.107
기간1	$S \rightarrow F$	26.789*	10.405*	25.407*	0.074	12.898*	18.824*	248.080*	86.769*	2.535
	Prob	0.000	0.001	0.000	0.786	0.000	0.000	0.000	0.000	0.112
기간1	$F \rightarrow S$	6.005*	8.135*	33.782*	16.017*	17.839*	4.580*	111.100*	110.190*	231.170*
	Prob	0.014	0.004	0.000	0.000	0.000	0.033	0.000	0.000	0.000
기간1	$S \rightarrow F$	4.735*	1.683	20.729*	10.245*	16.331*	4.466*	105.920*	107.860*	230.820*
	Prob	0.030	0.195	0.000	0.001	0.000	0.035	0.000	0.000	0.000
기간2	$F \rightarrow S$	3.051**	26.440*	19.962*	1.900	0.271	21.703*	632.800*	33.063*	16.168*
	Prob	0.081	0.000	0.000	0.169	0.603	0.000	0.000	0.000	0.000
기간2	$S \rightarrow F$	24.576*	33.693*	12.544*	3.777**	0.878	21.007*	620.120*	32.904*	16.047*
	Prob	0.000	0.000	0.000	0.052	0.349	0.000	0.000	0.000	0.000

Note 1) $F \rightarrow S$ indicates causality from futures market to stock market, and vice versa for $S \rightarrow F$.

2) * and ** indicate that the null hypothesis of no causality is rejected at 5% and 10%, respectively.

3) One lagged variable is included in the model.

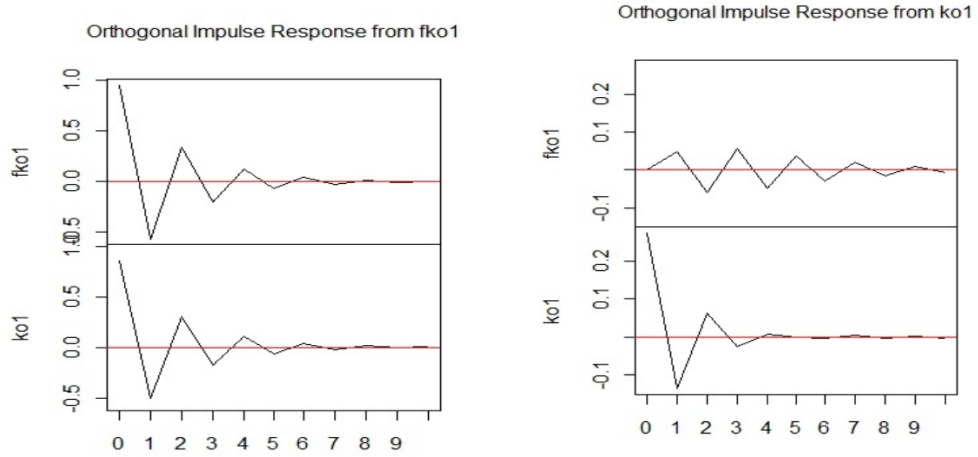
은 주식과 선물의 수익률에서 일부 유의성(5% 유의수준)이 없는 경우도 나타났으나, 수익률의 제곱 시리츠에서는 모두 유의한 것으로 나타났다. 주식과 선물수익률의 1차 자기상관(ρ)은 전체기간에서 각각 0.014, -0.025로 나타났으며, 수익률 제곱에 대한 1차 자기상관(ρ^2)은 각각 0.167, 0.152로 추정되었다.

4.1. 인과관계 분석

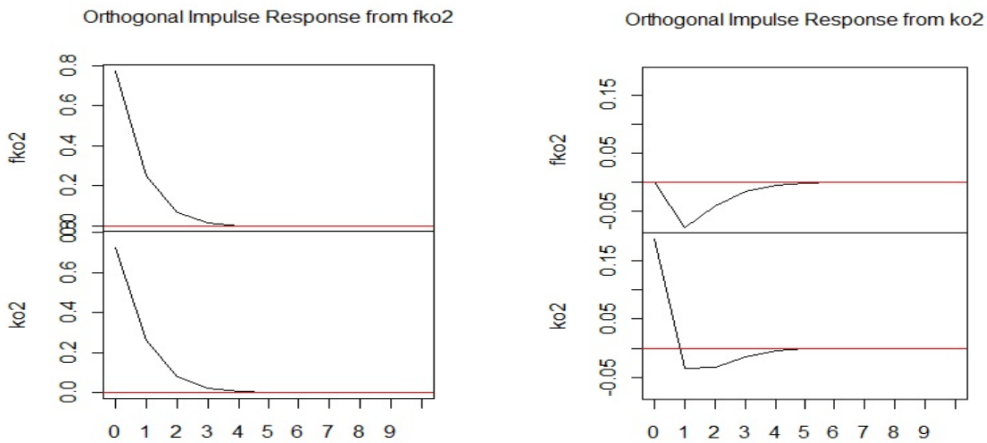
본 연구에서는 소파동 기법을 사용하여 시간주기에 따라 변하는 주가와 선물지수 사이의 인과관계, 상관관계, 헤지비율 등을 분석하였다. 이를 위해 Daubechies의 LA8(least asymmetric wavelet filter of length 8)을 기반으로 한 MODWT 분석을 실행하였으며, 데이터는 레벨 8까지 분해하였다. 주식과 선물 수익률에 대한 전체기간에서의 MODWT MRA 결과는 부록에 제시하였다. 원자료에서는 가장 큰 수익률의 시점이 2008년 10월 30일이며, 2008년 10월 충격은 시간 주기가 증가함에 따라 점차적으로 작아지는 것을 알 수 있다. 이는 단기적인 충격이 장기적인 주가와 선물시장의 수익률에 미치는 영향이 점차적으로 작아지는 것을 의미한다. 또한 시간주기가 증가함에 따라, 즉 d1에서 d8로 증가함에 따라, 소파동 계수가 완만한 움직임을 갖는 것을 볼 수 있는데, 이는 시장에서의 단기적인 잡음(noise)이 시간 주기가 증가함에 따라 사라진다는 것으로 해석된다. 이 결과는 주가와 선물가격간의 관계가 장기에 뚜렷하게 관측됨을 의미한다. 이러한 소파동 MRA 분석은 전통적인 접근법으로는 포착할 수 없는 정보를 제공해준다.

먼저 그랜저 인과관계 검정(Granger causality test)을 적용하여 시간주기별로 두 변수 사이의 인과관계를 살펴보았다. 인과관계 검정결과를 제시한 Table 4.3을 보면, 주가지수와 선물지수 사이에는 장기적으로 상호인과관계가 존재하였으나, 단기와 증기에서는 인과관계가 없는 경우도 나타남을 알 수 있다 (전체기간에서 보면, d3 주기에서 선물과 주가지수간의 인과관계가 없는 것으로 나타났다. d1 주기에서는 선물에서 주식으로 90% 신뢰구간에서 인과관계가 있는 것으로 나타났으나, 장기인 d8 주기에서는 인과관계가 나타나지 않았다. 기간1에서는 d1의 주식에서 선물로의 인과관계가 없는 것을 제외하고 모든 주기에서 상호인과관계가 나타났다. 기간2에서는 d3, d4 주기에서 인과관계가 약한 것으로 나타났다.).

d1



d2



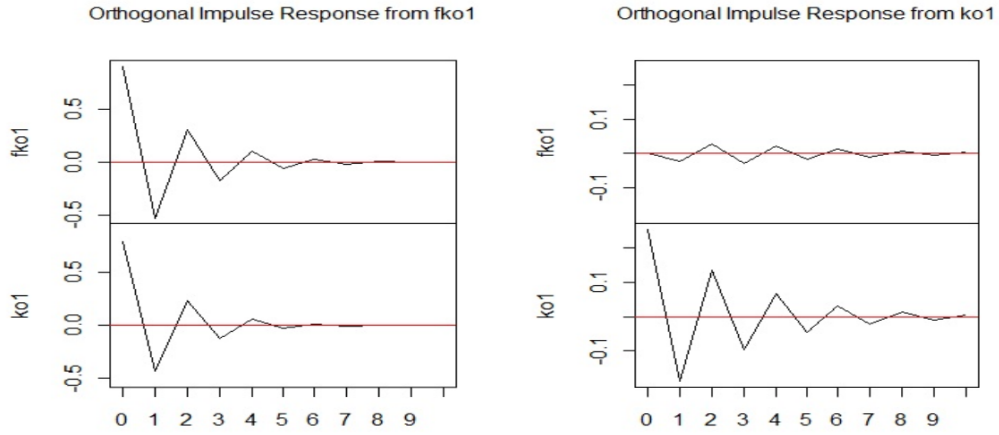
Note 1) fko and ko indicate the wavelet decomposition data of the KOSPI 200 futures index and of the KOSPI 200 index, respectively. For instance, fko1 is the wavelet decomposition data of the KOSPI 200 futures index in the d1 scale, ko1 is the wavelet decomposition data of the KOSPI 200 index in the d1 scale.

2) The results on d1 and d2 scales are reported here. Similar results are obtained for other scales.

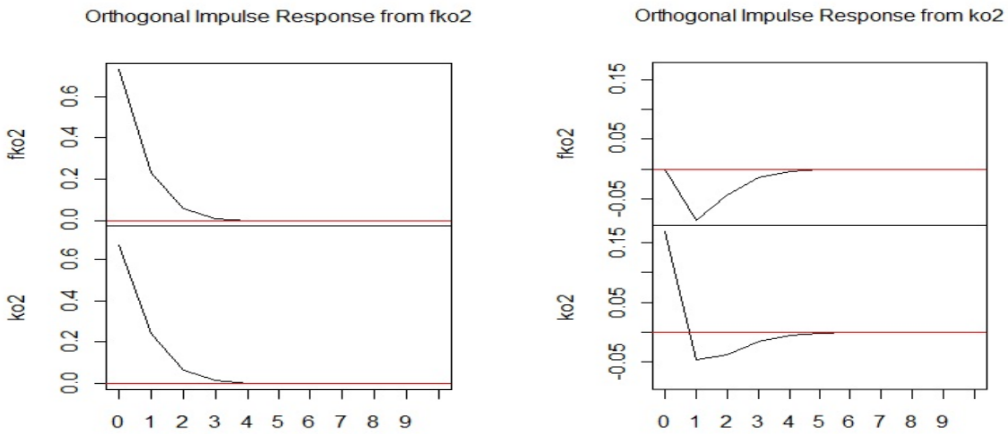
Figure 4.1. Impulse response analysis (whole period)

이러한 분석 결과는 시간주기에 따라 다른 결과를 보였던 Ramsey와 Lampart (1998a, 1998b)의 결과와는 유사한 결과를 보였다. 반면 In과 Kim (2006)에서는 선물과 주식시장의 분석에서 모든 주기에서 상호인과관계가 성립한다는 결과가 제시되어 본 연구와는 다소 다른 결과를 보였다. 일부 단기와 중기 주기에서 선물지수와 주가지수 간의 인과관계가 존재하지는 않았지만, 결국 장기적으로는 상호인과관계가 성립하여 장기적으로 두 시장은 효율적이라고 할 수 있다. 즉 장기적으로 주식시장과 선물시장에 도

d1



d2



Note: See notes to Figure 4.1.

Figure 4.2. Impulse response analysis (period 1)

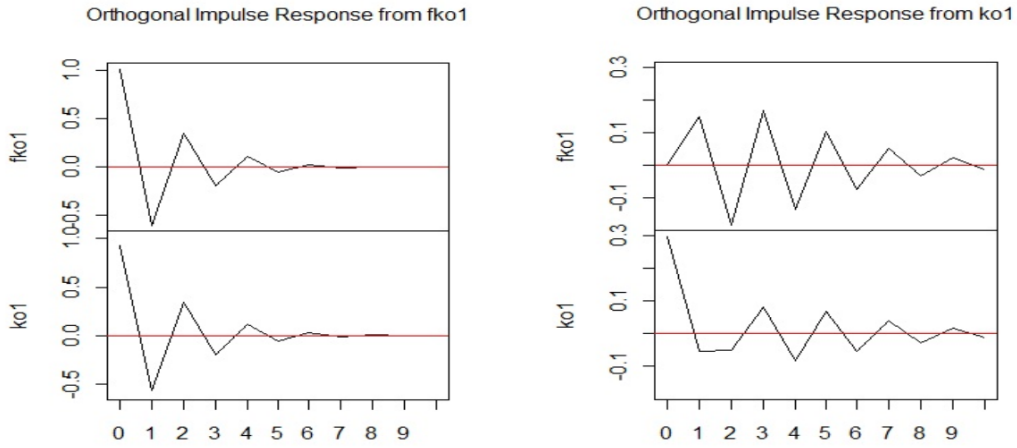
달한 정보가 두 시장 모두에 반영되어 이익추구 행위가 어렵다는 것을 의미한다.

벡터자기회귀(VAR)모형은 단일 시계열에 대한 AR 모형의 구조를 다변수에 적용한 모형으로, 시계열 사이의 동태적인 관계분석에 유용한 모형이다. VAR 모형은 아래의 구조로 표현된다.

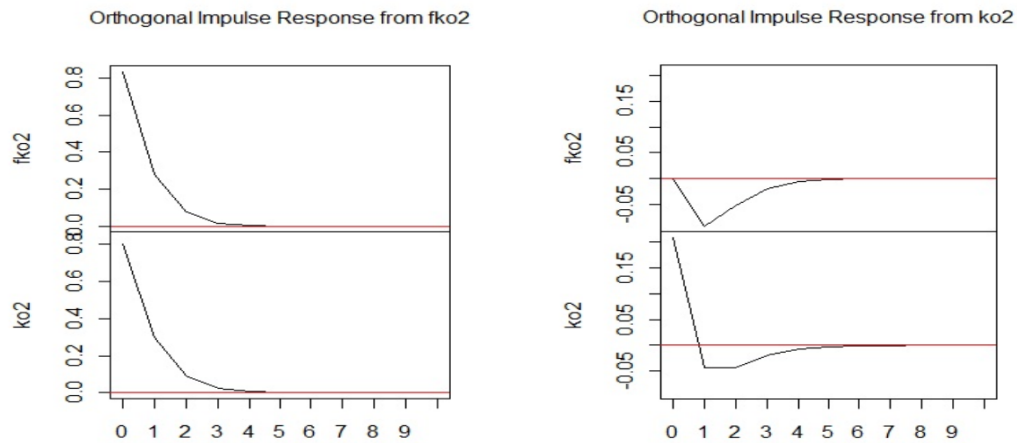
$$x_t = \mu + A_1x_{t-1} + \epsilon_t \tag{4.1}$$

여기서 $x_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $\epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$ 이다. 충격반응분석은 VAR 모형의 계수에 대한 정보를 이용하여 모형에 포함된 여러 변수 중 하나의 변수에 충격이 나타났을 때 시간이 경과함에 따라 다른 구성변수에 어떤 영향을 미치는가를 측정하는 것이다.

d1



d2



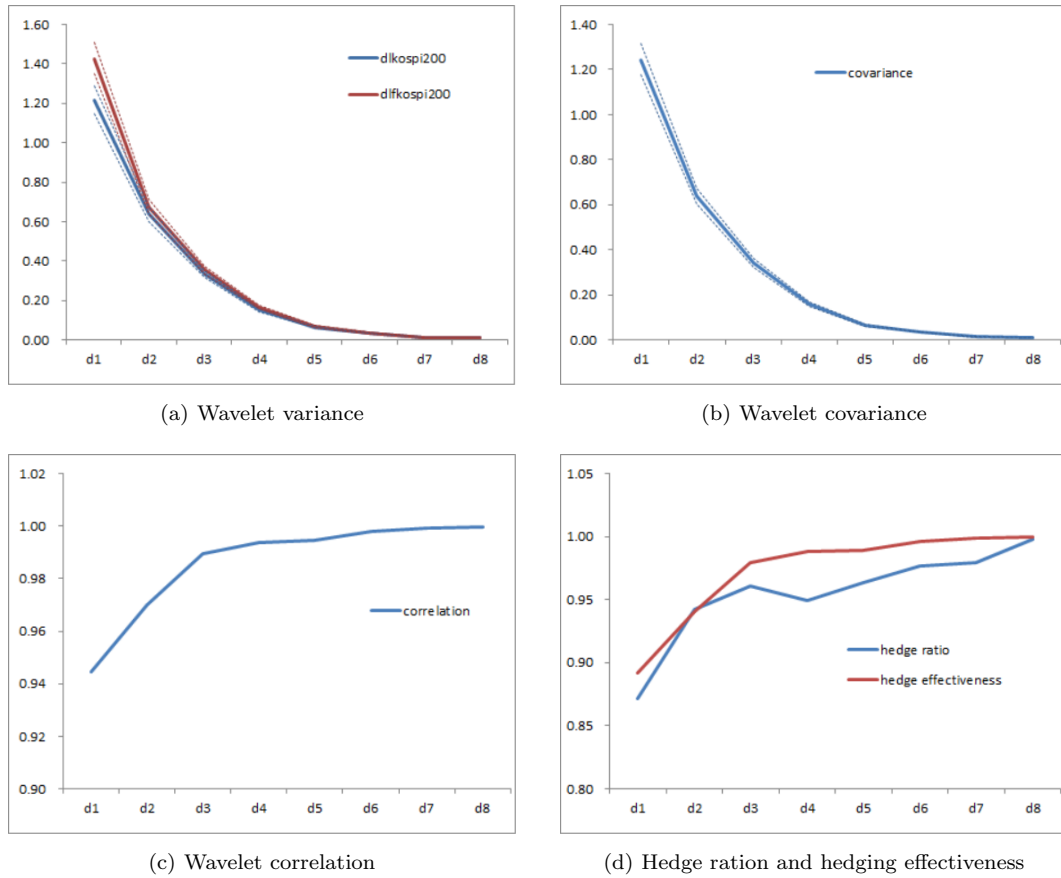
Note: See notes to Figure 4.1.

Figure 4.3. Impulse response analysis (period 2)

KOSPI 200 지수와 KOSPI 200 선물 지수에 대한 충격반응분석 결과는 다음 Figure 4.1~Figure 4.3에 제시되었다. 모든 주기에서 선물지수의 충격은 주가지수에 1기에 양의 충격을 주는 것으로 나타났다. 이는 선물지수와 주가지수가 같은 방향으로 움직인다는 것을 의미한다.

4.2. 상관관계 분석

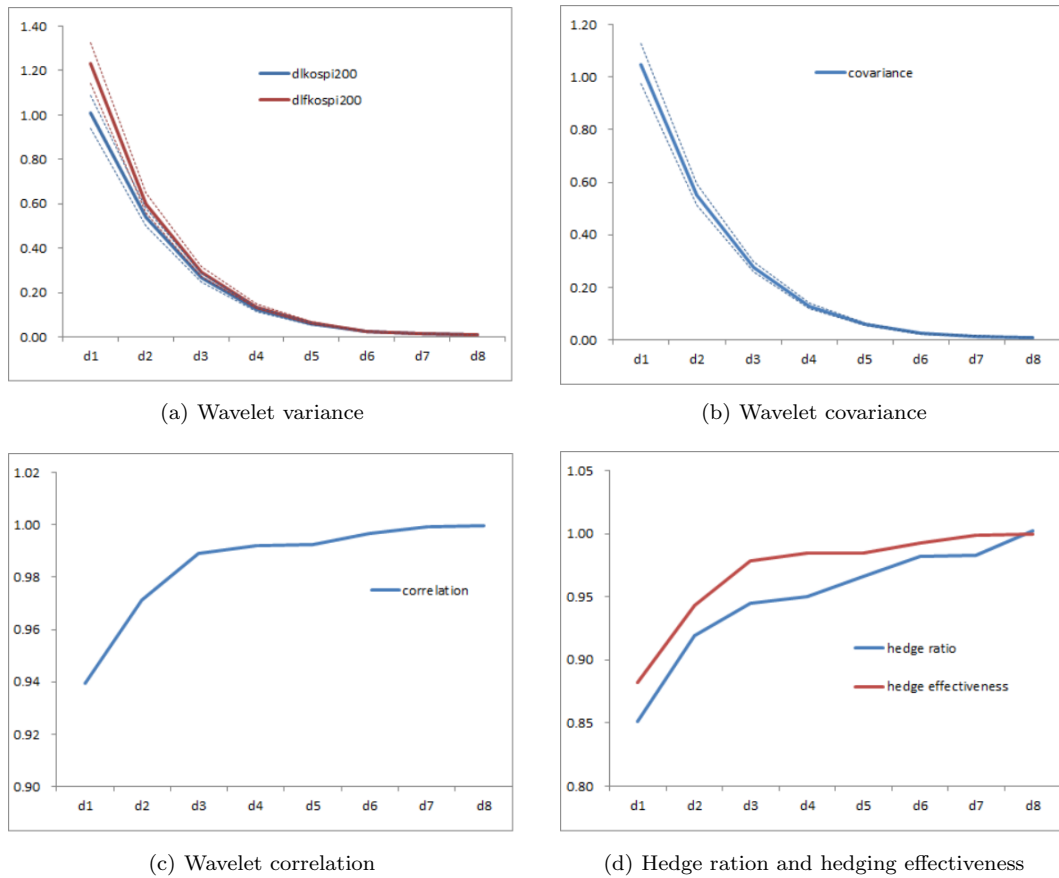
여기에서는 다양한 시간주기에 따른 상관관계를 도출하고자 한다. 이를 위해 먼저 주식과 선물지수 수익률에 대한 분산을 살펴볼 필요가 있는데, 소파동 변환의 중요한 특성 중 하나는 어떤 확률변수의 분산을 시간주기에 따라 분해할 수 있다는 것이다.



- Note 1) dlkosp200 and dlfkosp200 indicate the returns of the KOSPI 200 index and of KOSPI 200 futures index, respectively.
- 2) The dotted lines show the 95% confidence intervals for the estimates of variance and covariance.
- 3) Here d_j indicates the timescale between 2^{j-1} and 2^j days.

Figure 4.4. Wavelet variance, covariance, correlation, hedge ratio and hedging effectiveness (whole period)

Figure 4.4의 좌측상단에는 전체기간에서의 두 시계열에 대한 소파동 분산과 이에 대한 95% 신뢰구간을 표시하였다. 주식과 선물 수익률의 분산은 소파동 주기가 증가함에 따라 감소하는 특성을 나타내고 있다. 주식과 선물 수익률 모두 저주기(d1)에서의 분산이 가장 큰 값을 기록하였다. 여기서 특정 시간 주기에서의 소파동 분산은 전체분산에 대한 기여도를 의미하는데, 주식과 선물 수익률 원자료의 분산은 각각 2.468, 2.760이며, d1에서 계산된 분산은 각각 원자료 분산의 49%, 52% 수준을 보였다. 여기서 주목할 것은 선물시장의 분산이 주식시장의 분산보다 크게 나타나 선물시장의 변동성이 크다는 점인데, 이는 기존 연구와 유사한 결과를 나타낸다. Lee (1999)는 GARCH 모형을 사용하여 선물시장이 주식시장보다 변동성이 크다는 것을 발견했으며, 소파동 분석기법을 사용한 In과 Kim (2006)은 본 연구와 유사한 결과를 제시하였다. 기간1과 기간2에서도 모두 선물 수익률의 분산이 주식보다 대부분의 시간주기에서 큰 값을 보였다. 한편 원자료의 분산은 기간1보다 기간2에서 크게 나타났었는데, 소파동 분산에도



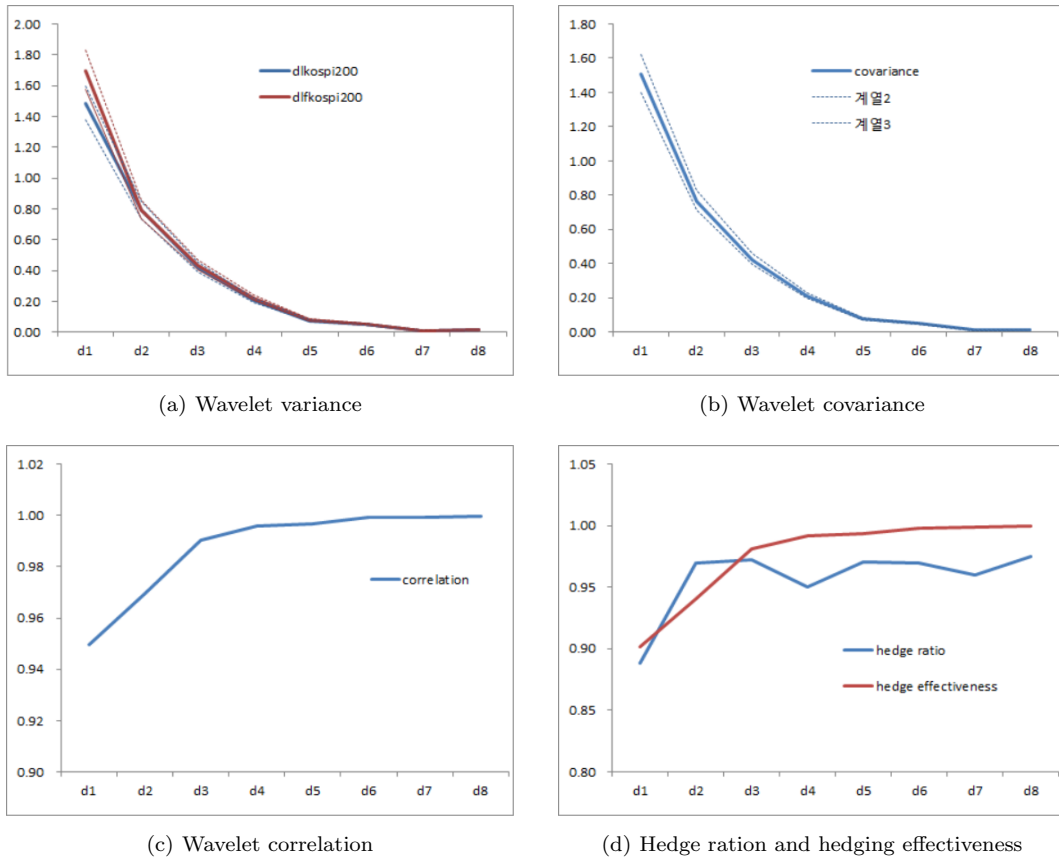
Note: See notes to Figure 4.4.

Figure 4.5. Wavelet variance, covariance, correlation, hedge ratio and hedging effectiveness (period 1)

마찬가지로 기간2가 기간1보다 더 크게 추정되었다.

두 변수의 상호 관련성을 알아보기 위해서는 분산 이외에 공분산을 추정할 필요가 있다. Figure 4.4의 우측상단은 전체기간에서의 주식과 선물시장에서 MODWT를 적용한 소파동 공분산 결과를 나타낸다. 이를 보면 소파동 공분산은 시간주기가 증가함에 따라 감소하는 것으로 분석되었다. 원자료의 공분산은 2.512이며, 소파동 분석을 통해 계산된 d1, d2, d3 주기에서의 공분산은 원자료 공분산의 각각 49%, 25%, 14%로 추정되었다. 여기에 나타난 주식과 선물시장의 공분산이 시간주기가 증가함에 따라 감소하는 관계를 보이지만, 공분산은 측정단위에 따라 그 크기가 달라지므로 이를 직접 비교하는 것은 의미가 없다. 각 주기별 공분산을 분산으로 나눠서 표준화한 상관계수를 도출해야 각 시간주기에 따른 상호 영향을 비교할 수 있다.

Figure 4.4의 좌측하단은 전체기간에서 주식과 선물시장에서의 소파동 상관계수를 나타낸 것이다. 모든 시간주기에서 (+)의 높은 상관관계가 도출되었다. 모든 주기에서 상관계수는 0.94 이상의 매우 높은 값으로 추정되었으며, 시간주기 전체를 평균(d1~d8 평균)했을 때는 0.986을 나타냈다. 전체 주기의 평균 값은 원자료의 상관계수 값 0.962보다 높게 나타났다. 또한 시간주기가 증가함에 따라 상관계수도 증가



Note: See notes to Figure 4.4.

Figure 4.6. Wavelet variance, covariance, correlation, hedge ratio and hedging effectiveness (period 2)

하는 것으로 나타났는데, 이는 주식시장과 선물시장의 상호관련성이 매우 높아 근본적으로 거의 동일한 움직임을 나타낸다는 것을 의미한다. 기간1, 기간2에서 모두 상관관계는 1로 수렴하면서 0.94 이상의 높은 값으로 추정되었다. 원자료를 보면 기간2에서의 변동성이 더 크게 관측되는데, 기간2에 대한 소파동 분산 및 공분산 추정치가 기간1에 비해 더 크게 도출되었다. 그러나 표준화된 상관계수는 기간에 따른 차이를 보이지 않아, 기간에 상관없이 주식시장과 선물시장의 상호관련성이 높은 것을 알 수 있다.

4.3. 헤지비율 추정

여기에서는 다주기 헤지비율(multiscale hedge ratio)을 추정해 보았다. 다주기 헤지비율은 소파동 분석을 통해서 도출된 분산, 공분산 결과에 기본을 두고 있다. Lien과 Luo (1993, 1994)에서 언급한 것처럼, 헤지는 다기간에 걸쳐서 헤지 계획을 세우는데, 이에 따라 한 기간 헤지비율보다는 다기간 헤지비율을 살펴보는 것이 바람직하다.

Figure 4.4의 우측하단은 다양한 시간 주기에 따른 헤지비율과 헤지효과성을 보여주고 있다. 여기서 주목할 것은 소파동 헤지비율은 비모수적 방법을 통해서 추정되었기 때문에 GARCH 모형이나 SV 모형

처럼 오차항의 분포에 대한 특별한 가정이 필요없다는 것이다. Figure 4.4를 보면 전체기간에서의 헤지 비율은 시간주기가 증가함에 따라 증가세를 유지하고 있으나, 그 증가 속도는 점차적으로 감소하는 것을 알 수 있다. 장기적으로 헤지비율은 1로 수렴하는 것으로 나타났으며, 헤지효과성 역시 시간주기가 증가함에 따라 1에 수렴하고 있다. 직관적으로 볼 때, 장기에는 주식과 선물 가격의 비율이 같아지기 때문에 헤지효과성이 1에 도달한다. 이러한 결과는 장기에는 주식과 선물 가격은 완전한 상관관계가 있다는 Geppert (1995)의 주장과 일치하며, Low 등 (2002), In과 Kim (2006) 등의 실증분석 결과와도 유사한 것으로 분석된다. 전체적으로 시간주기에 따라 헤지비율이 완만하게 증가하는 모습을 보였는데, 기간2에서는 d2, d3에서의 헤지비율이 오히려 중장기보다 높은 현상을 나타냈다. 이는 경제위기의 영향으로 불확실성이 증가함에 따라 장기적인 헤지보다는 단기적인 헤지를 더 많이 추구했음을 의미하는 것으로 분석된다.

5. 결론

소파동 분석의 가장 큰 장점은 전통적인 단기와 장기의 구분에서 벗어나 다양한 시간주기로 시계열을 분석할 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 소파동 기법을 이용하여 시간주기에 따른 주식과 선물시장간의 인과관계, 상관관계, 헤지 비율 등에 대한 실증분석을 시도하였다. 인과관계는 그랜저 인과관계 검정을 통해 실시하였으며, 상관관계는 소파동의 시간주기 분석을 적용하여 분산, 공분산 및 상관계수를 추정하였고, 이와 같이 도출된 소파동 분산과 공분산으로부터 헤지비율을 도출하였다.

시간주기에 따른 주식과 선물 수익률 사이의 인과관계 분석 결과, 장기에서는 두 변수사이에 상호인과관계가 있으나 단기와 중기에서는 인과관계가 없는 경우가 일부 발견되는 것으로 나타났다. 이 결과는 단기와 중기에는 두 시장이 항상 효율적인 관계를 유지하지는 않지만, 장기적으로는 결국 두 시장이 상호 인과관계를 보이면서 효율적으로 작동함을 의미하는 것으로 해석된다. 즉 주식시장과 선물시장에 도달한 정보는 장기적으로 두 시장 모두에 반영되어 어느 한 시장에서 재정거래를 통한 이익을 기대하기 어렵다는 것을 의미한다. 또한 충격반응분석 결과 선물지수 충격이 주가지수에 1기에는 양의 충격을 주는 것으로 나타나 두 지수가 같은 방향으로 움직이는 것을 보여주었다.

주식과 선물 수익률의 분산을 보면, 선물시장의 분산이 주식시장의 분산보다 크게 추정되어 선물시장이 변동성이 큰 것으로 나타났다. 두 시장 사이의 상관관계는 모든 시간주기에서 (+)의 높은 상관계수를 보였다. 특히 주식시장과 선물시장의 수익률에 대한 분산은 소파동 주기가 증가함에 따라 감소하는데 반해, 두 시장 사이의 상관계수는 시간주기가 증가함에 따라 증가하는 패턴을 나타냈다. 이는 주식시장과 선물시장의 상호관련성이 매우 높아 장기적으로는 거의 동일한 움직임을 보이는 것으로 해석된다.

헤지 비율은 시간주기가 증가함에 따라 변화속도는 약간 감소하면서 점차 상승하여 장기적으로 1에 수렴하는 패턴을 보였다. 또한 헤지 효과성 역시 1에 도달하는 것으로 나타나, 장기에는 주식과 선물가격이 완전한 상관관계를 갖는 것으로 해석된다. 이러한 결과는 일본 자료를 이용한 Low 등 (2002)이나 미국 시장에 대해 분석한 In과 Kim (2006) 등의 결과와 일치하는 것으로 판단된다.

인과관계, 상관관계, 헤지 비율 등을 기간별로 구분하여 분석한 결과도 전체기간과 비슷한 것으로 나타났다. 다만 국제적 금융위기가 있었던 기간이 그 이전 기간보다 더 큰 변동성을 보였으며, 이 기간 중에 헤지 행위도 장기적 헤지보다 단기적인 헤지가 증가했던 것으로 분석되었다.

본 연구에서 주식과 선물시장 사이의 관계를 시간주기에 따라 분석한 결과에 의하면, 단기와 중기에는 주식과 선물시장간의 인과관계나 상관관계가 다소 약하게 추정됐으나 장기적으로는 완전한 상관관계가 존재하는 것으로 나타났다. 이는 주식시장과 선물시장에 도달한 정보가 장기적으로 두 시장 모두에 반영되어, 재정거래를 통한 이익을 기대하기 어려운 시장 효율성이 작동함을 의미한다.

부록

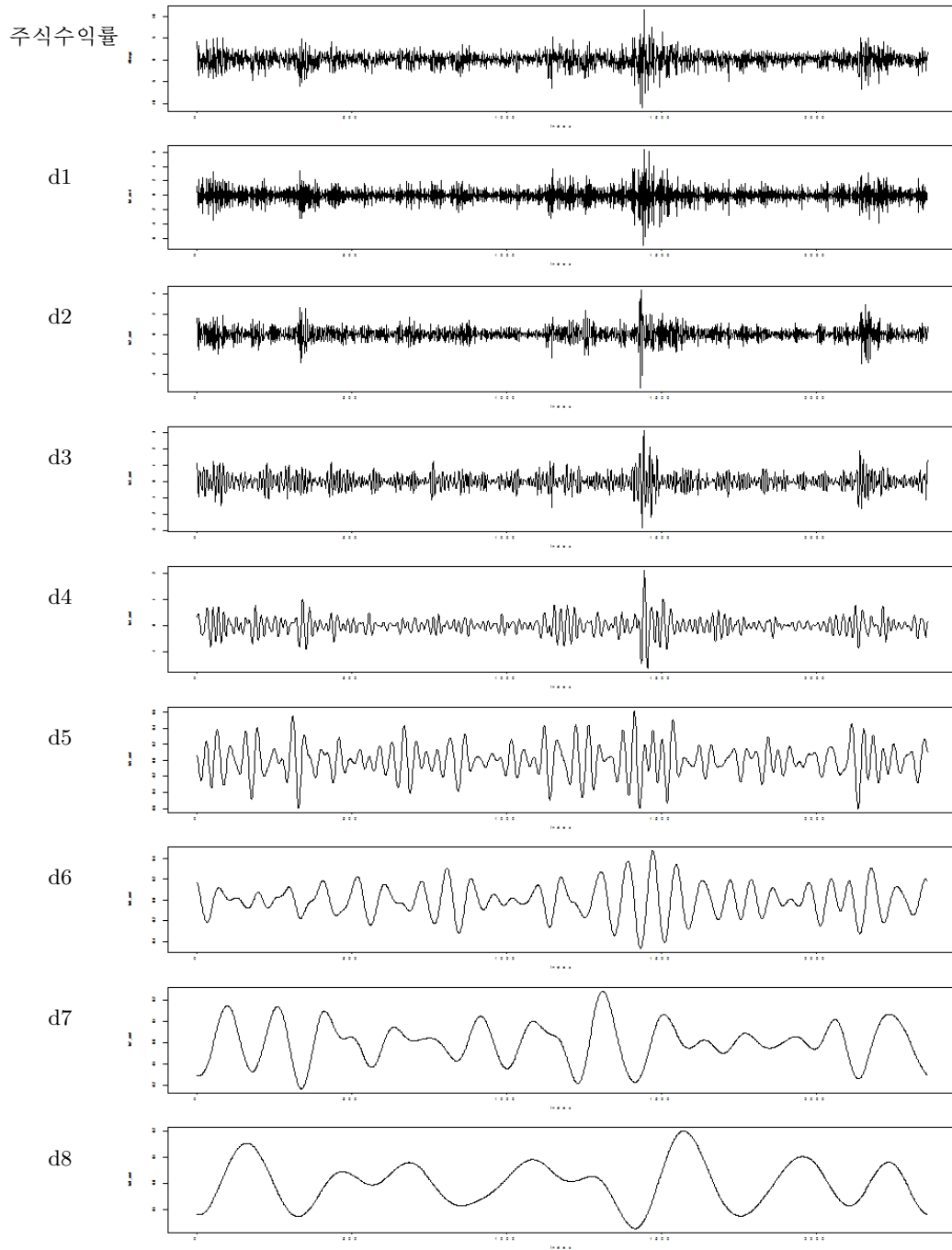


Figure A.1. The MODWT MRA analysis of the stock return (whole period)

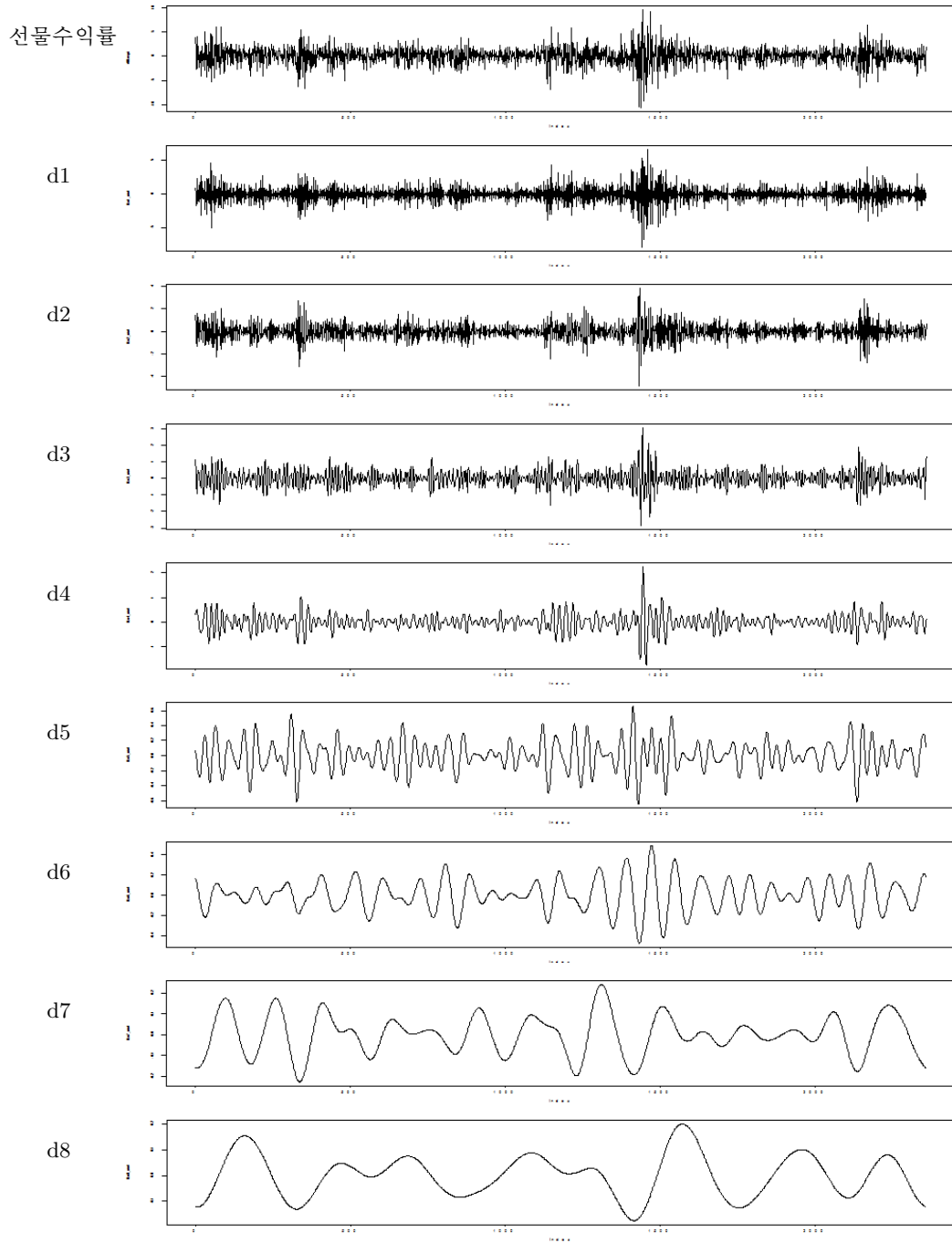


Figure A.2. The MODWT MRA analysis of the futures return (whole period)

References

- Lee, G. H. (2005a). The economic time series decomposition and forecasting using wavelet, *Korea Statistical Society*, 2005, 25–30.
- Lee, H. S. (2005b). Wavelet methods for estimating econometric models, *Sogang Economic Papers*, **34**, 163–193.
- Abry, P. A., Veitch, D. and Flandrin, P. (1998). Long range dependence: Revisiting aggregation with wavelets, *Journal of Time Series Analysis*, **19**, 253–266.
- Anderson, T. G. and Sorensen, B. E. (1996). GMM estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo Study, *Journal of Business and Economic Statistics*, **14**, 328–352.
- Arino, M. A. (1995). Time Series Forecast via Wavelets: An Application to Car Sales in the Spanish Market, Discussion Paper, 95–30 (Duke University).
- Capobianco, E. (2003). Empirical volatility analysis : Feature detection and signal extraction with function dictionaries, *Physica A*, **319**, 495–518
- Gençay, R., Selçuk, F. and Wıcher, B. (2001). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press, San Diego.
- Gençay, R., Selçuk, F. and Wıcher, B. (2002). Systematic risk and time scales, *Quantitative Finance*, **3**, 108–116.
- Geppert, J. M. (1995). A statistical model for the relationship between futures contract hedging effectiveness and investment horizon length, *Journal of Futures Markets*, **15**, 507–536.
- Goffe, W. L. (1994). *Wavelets on Macroeconomics: An Introduction*, in: *Computational Techniques for Econometrics and Economic Analysis*, D. Belsley (Ed.), 137–149, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Howard, C. T. and D’Antonio, L. J. (1991). Multiperiod hedging using futures: A risk minimization approach in the presence of autocorrelation, *Journal of Futures Markets*, **11**, 697–710.
- In, F. and Kim, S. (2006). The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and the futures markets: A new approach using wavelet analysis, *Journal of Business*, **79**, 799–820.
- Kroner, K. F. and Sultan, J. (1993). Time-varying distribution and dynamic hedging with foreign currency futures, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **28**, 535–551.
- Lee, G. G. J. (1999). Contemporary and long-run correlations: A covariance component model and studies on the S&P 500 cash and futures markets, *Journal of Futures Markets*, **19**, 877–894.
- Lien, D. and Luo, X. (1993). Estimating multiperiod hedge ratios in cointegrated markets, *Journal of Futures Markets*, **13**, 909–920.
- Lien, D. and Luo, X. (1994). Multiperiod hedging in the presence of conditional heteroskedasticity, *Journal of Futures Markets*, **14**, 927–955.
- Lien, D. and Wilson, B. K. (2001). Multiperiod hedging in the presence of stochastic volatility, *International Review of Financial Analysis*, **10**, 395–406.
- Lindsay, R. W., Percival, D. B. and Rothrock, D. A. (1996). The discrete wavelet transform and the scale analysis of the surface properties of sea ice, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **34**, 771–787.
- Low, A., Muthuswamy, J., Sakar, S. and Terry, E. (2002). Multiperiod hedging with futures contracts, *Journal of Futures Markets*, **22**, 1179–1203.
- McCoy, E. J. and Walden, A. T. (1996). Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory process, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **5**, 1–31.
- Moschini, G. and Myers, R. J. (2002). Testing for constant hedge ratios in commodity markets: A multivariate GARCH approach, *Journal of Empirical Finance*, **9**, 589–603.
- Percival, D. B. and Walden, A. T. (2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ramsey, J. B. and Lampart, C. (1998a). Decomposition of economic relationships by timescale using wavelets: Money and income, *Macroeconomic Dynamics*, **2**, 49–71.
- Ramsey, J. B. and Lampart, C. (1998b). The decomposition of economic relationships by timescale using wavelets: Expenditure and income, *Studies in Nonlinear Dynamics and Economics*, **3**, 23–42.

- Tkacz, G. (2001). Estimating the fractional order of integration of interest rates using a wavelet OLS estimator, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **5**, 1–14.