저매개변수 요소를 사용한 2차원 선형탄성 직접 경계요소법의 Kernel 적분법

Kernel Integration Scheme for 2D Linear Elastic Direct Boundary Element Method Using the Subparametric Element

조 준 형* 박 영 목** 우 광 성†
Jo, Jun-Hyung Park, Yeongmog Woo, Kwang-Sung

요 지

본 논문은 2차원 선형탄성 직접 경계요소법에서 저매개변수 요소를 사용할 때 Kernel의 적분방법에 대하여 논의하였다. 일반적으로 등매개변수 요소의 경우 형상함수로 통칭되는 해의 기저함수와 요소의 적분을 위해 사용되는 사상함수를 동일하게 사용한다. 그러나 본 논문에서는 사상함수의 차수를 낮게 취하여 순수기저절점을 도입하고 그때 직접 경계요소의 Kernel을 적분하기 위한 방법이 모색되었다. 일반적으로 경계요소법의 적분 Kernel의 경우 Log수치적분과 코쉬주치(Cauchy principal value) 등을 통해 해결하는데, 본 논문에서는 대수적 조작을 통해 적분값의 정확도를 높일 수 있도록 새로운 수식을 유도하였다. 본 연구에서 저매개변수 기반의 직접 경계요소에 대한 강건성과 정확도를 검증하기 위해 2차원 타원형 편미분방정식으로 표현되는 평면응력과 평면변형문제에 대해 적용하였다. 적용 예제로는 단순연결영역(simple connected region)의 대표적 문제인 캔틸레버보와 다중연결영역(multiple connected region)의 대표적인 문제인 개구부가 있는 사각평면에 대해 각각 수치해석을 수행한 결과 대폭적인 자유도의 감소에 비해 정확도 측면에는 기존의 방법과 차이가 없음을 볼 수 있었다. 본 논문에서 제시된 방법은 기저함수 고차화 저매개변수 직접 경계요소법(subparametric high order boundary element)과 이에 기초를 둔 저매개변수 고차 이중경계요소법(subparametric high order dual boundary element)의 초석이 될 수 있을 것이다.

핵심용어 : 직접 경계요소, 저매개변수, 등매개변수, Kernel, 순수기저절점, 단순연결영역, 다중연결영역, 코쉬주치, 이중경계요소법, 2차원 선형탄성

Abstract

In this study, the Kernel integration scheme for 2D linear elastic direct boundary element method has been discussed on the basis of subparametric element. Usually, the isoparametric based boundary element uses same polynomial order in the both basis function and mapping function. On the other hand, the order of mapping function is lower than the order of basis function to define displacement field when the subparametric concept is used. While the logarithmic numerical integration is generally used to calculate Kernel integration as well as Cauchy principal value approach, new formulation has been derived to improve the accuracy of numerical solution by algebraic modification. The subparametric based direct boundary element has been applied to 2D elliptical partial differential equation, especially for plane stress/strain problems, to demonstrate whether the proposed algebraic expression for integration of singular Kernel function is robust and accurate. The problems including cantilever beam and square plate with a cutout have been tested since those are typical examples of simple connected and multi connected region cases. It is noted that the number of DOFs has been drastically reduced to keep same degree of accuracy in comparison with the conventional isoparametric based BEM. It is expected that the subparametric based BEM associated with singular Kernel function integration scheme may be extended to not only subparametric high order boundary element but also subparametric high order dual boundary element.

Keywords : *direct boundary element, subparametric, isoparametric, Kernel, simple connected region, multiple connected region, Cauchy principle value, 2D linear elasticity, dual boundary element*

† 책임저자, 정회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 교수
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622
E-mail: kswoo@yu.ac.kr
* 한국전력공사 전력연구원
** 영남대학교 건설시스템공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2012년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2013년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

미분방정식의 근사해석 방법 중의 하나인 경계요소법은 그 방법이 정립된 이래로 많은 발전을 이루어 왔다. 그러나 유한요소법대비 선형방정식을 유도하는 방식과 적분을 수행하는 방법 등에서 차이를 보여 유한요소법만큼 널리 사용되고 있지는 못하다(Basu, 2003; Oden, 1982; Reddy, 1996). 특히 기본해(fundamental solution)의 유무가 경계요소법의 구현에 결정적인 영향을 미치므로 그 적용분야가 유한요소법에 비해 넓지 않은 것이 사실이며, 기본해가 존재해도 계수행렬을 구하기 위해 수행해야 하는 적분에 특이적분(singular integral)이 발생하여 계산이 쉽지 않다. 이러한 특이적분은 약특이적분(weak singular integral), 강특이적분(strong singular integral)으로 나눌 수 있는데, 경계요소법을 통해 구한 해의 정확도에 결정적인 영향을 미치게 된다. 본 논문에서는 직접 경계요소법에 대해 간단히 정리하고 저매개변수 요소(subparametric element)를 사용할 경우 경계요소법의 핵심에 해당하는 커널(Kernel) 함수의 적분법에 대해 새로운 수식을 유도하고 정확도와 강건성을 검증하는 것을 목적으로 한다.

저매개변수 요소(우광성, 2006; 2009; 조준형, 2011)는 근사해석에서 해의 기저를 이루는 기저함수(basis function)의 차수에 비해 해석영역을 사상(mapping)하기 위해 도입되는 함수의 차수가 낮은 것을 의미한다. 이 요소는 향후 진행될 저매개변수 고차경계요소(subparametric high order boundary element)를 구성하는데 기본적인 틀을 제공할 것으로 생각된다(우광성 등, 2009). 저매개변수 요소의 이론은 매우 간단하나, 아직까지 본격적으로 사용되지는 않고 있으며, 상자형 암거(box culvert) 등 형상이 사각형모양으로 간단하고 외부가 반무한 지반 등으로 둘러 쌓여있는 경우 필요한 계산량을 줄일 수 있는 대안이 될 수 있다. 참고로 직접 경계요소법에서는 고매개변수(superparametric) 요소도 사용되는데 특히 상수요소는 해의 기저함수를 상수로 가정하고, 해석영역의 기하형상을 표현하기 위해 필요한 최소 사상함수를 1차로 사용할 경우 매우 자연스럽게 고매개변수 요소화되어 나타난다. 만일 해석영역을 1차함수로 가정하지 않고 상수로 가정한다면 해석영역불연속(domain discontinuity) 및 닫힌영역(closed domain)등의 문제가 발생한다. 아울러 고매개변수 요소기반의 직접 경계요소의 경우, 해의 기저함수가 상수로 가정된 경우에 한하여, 유한요소법에서 해의 미분값이 요소경계에서 불연속현상을 보이는 것과 비슷하게 변위값과 응력값 모두 요소경계에서 불연속으로 나타난다.

2. 직접 경계요소법

2.1 Maxwell-Betti Reciprocal Work Theorem

정적탄성문제에서 Maxwell-Betti의 상반정리는 직접 경계요소법의 기초를 이루고 있는데, 그 의미는 "선형탄성물체에 두 개의 다른 하중상태의 물체력과 표면력이 작용한다면, 첫 번째 하중부과상태의 하중들이 두 번째 하중부과상태에 의한 상응변위를 따라 움직일 때 하는 일은 두 번째 하중부과상태의 하중들이 첫 번째 하중부과상태에 의한 상응변위를 따라 움직일 때 하는 일과 같음"을 나타내고 있다.

$$\sigma_{ij}\,\epsilon^{*}_{ij} = \sigma^{*}_{ij}\,\epsilon_{ij} \tag{1}$$

2.2 직접 경계요소의 적분식

Maxwell-Betti의 상반정리와 식 (2)의 Lamé-Navier 방정식에 Dirac delta 함수 형태의 하중이 적용되었을 때 구해진 해를 대입하여 최종적으로 Somigliana Identity를 도출한다. 특히 3차원에서 무한영역에 해당하는 해석해를 Kelvin 해라고 부르며, Somigliana Identity는 직접 경계요소법에서 선형방정식을 추출할 수 있는 적분형태의 방정식으로 유한요소법의 약형식(weak form)에 해당한다고 할 수 있다(김문겸, 1995). 식 (3)은 내부 소스 포인트(source point)를 경계로 위치시키는 극한화 과정을 통해 최종적으로 도출된 경계적분방정식을 나타내고 있다. 식 (3)에서 C_{ij}는 경계의 형상에 따라 결정되는 계수로서 부드러운 경계일 경우 $\delta_{ij}1/2$를, 내부점일 경우 δ_{ij}이다. 또한 p는 소스 포인트이며 Q는 필드 포인트(field point)를 의미한다.

$$(\lambda+\mu)u_{j,ij}+\mu u_{i,jj}+b_i=0 \tag{2}$$

$$C_{ij}(p)u_i(p)+\int_{\Gamma} T_{ij}(p,Q)\,u_j(Q)\,d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p,Q)\,t_j(Q)\,d\Gamma(Q) \tag{3}$$

3. 저매개변수 요소를 이용한 경계적분식의 이산화

3.1 Kernel 함수의 적분과 선형사상함수에 의한 사상

본 논문에서 구현하고자 하는 직접 경계요소는 해를 근사하는 기저함수의 경우 2차를, 영역을 모사하는 사상함수는 1차로 가정하였다. 아울러 본 연구에 사용된 함수는 모두 Lagrange 함수로, 유한요소법에서 사용한 함수와 같으며 2

차원 문제를 다루고 있으나, 경계요소법의 특성상 1차원에 해당하는 함수를 사용하고 있다. 해를 근사하는 기저함수가 2차일 경우 영역을 모사하는 사상함수도 2차를 사용하여 동일한 형태와 차수의 함수를 사용하는 것이 일반적이기는 하나 미미하게나마 계산량의 증가를 동반하게 되며, 경우에 따라서 간단한 직선경계를 해석하게 될 경우 약간의 울림현상을 동반하게 된다. 이런 경우 0으로 처리되어야 할 값들이 아주 작은 값들로 존재하게 되고 적분값에 영향을 주어 최종적으로 구한 해의 성질에 좋지 않은 영향을 미치게 된다.

선형사상(linear mapping)을 이용하는 직접 경계요소를 구현하기 위해서는 선형사상을 이용한 특이 적분값의 계산이 매우 중요하다. 식 (3)의 우변에 나타나있는 $U_{ij}(p,Q)$는 log함수가 포함되어 있는데, 로그내부의 변수는 $1/r$, r로 소스 포인트에서 문제가 정의된 경계까지의 거리의 역수 또는 거리이다. 따라서 이 r 값이 0 또는 ∞가 된다면 log 내부값이 $\pm\infty$로 계산되며 특이적분이 발생하게 된다. 이 특이적분은 적분값은 존재하나 피적분함수값에 $\pm\infty$가 존재하는 경우로 가우스적분에 의해 계산될 수 없으며, 로그가 피적분함수일 경우 log 수치적분법을 사용하여 적분한다. 특히 적분을 계산할 때 피적분함수를 그대로 적분을 할 경우 적분값이 부정확하므로 다시 특이적분 부분과 정상적분 부분으로 분할하는 과정을 거치게 된다(Becker, 1992; Beer, 2001). 이 분할의 과정이 없으면 log 수치적분을 이용하더라도 여전히 식 (4)의 G_{ij} 값은 부정확하게 계산된다. 이와 같이 $U_{ij}(p,Q)$의 내부에 존재하는 특이성은 약특이(weak singular)라 한다. 반면에 $T_{ij}(p,Q)$의 내부에 존재하는 강특이(strong singular)의 경우는 강체이동을 고려한 대각항 계산공식을 이용하거나, 코쉬의 주치(Cauchy principal value)를 통해 해결한다(Masserey, 2005; Alexander, 2005).

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\,u_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\,t_j \tag{4}$$

$$\begin{cases} N_1^m = -\dfrac{1}{2}(\xi-1) \\ N_2^m = \quad \dfrac{1}{2}(\xi+1) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \psi_1^b = \dfrac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ \psi_2^b = 1-\xi^2 \\ \psi_3^b = \dfrac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{cases} \tag{6}$$

식 (5)의 N_i^m는 사상을 위한 함수이며, 식 (6)의 ψ_i^b는 해의 기저함수이다. 본 논문에서 사상함수와 해의 기저함수를 다르게 사용하므로 다른 기호를 이용하여 나타내었다.

$$T_{ij}(p,Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\begin{pmatrix} [(1-2\nu)\delta_{ij}+2r_{,i}r_{,j}]r_{,n} \\ -(1-2\nu)(r_{,i}n_{,j}-r_{,j}n_{,i}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$U_{ij}(p,Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{(3-4\nu)\ln\frac{1}{r}\delta_{ij}+r_{,i}r_{,j}\right\} \tag{8}$$

3.2 저매개변수 요소의 H, G 구성방법

식 (5)와 같이 선형 사상함수를 사용할 경우 식 (5)의 사상함수와 해의 식 (6)의 기저함수를 대표하는 절점이 각각 2개와 3개가 되므로, 가운데 절점은 해와 관련은 있으나 사상과는 무관한 절점(nodeless node)이 된다. 따라서 이 절점을 순수기저절점(pure basis node)이라 하고 이 절점에 대해서도 방정식의 개수를 맞추기 위해 소스 포인트로 인정하고 모든 경계영역에 대하여 적분을 수행한다. 대체로 이런 경우 유한요소법에서는 위치가 정해지지 않고 함수전체에 곱해지는 함수자유도인 모우드(mode)를 도입하여 계산하는 것이 일반적인 기법이다(우광성, 2006; 조준형, 2011). 그러나 경계요소법의 특성상 Kernel함수에 물리적인 거리가 변수로 들어가 있으므로 이를 만족시키기 위해 반드시 위치가 결정된 자유도, 즉 물리적 절점이 필요하다(우광성, 2009). 따라서 이 절점을 모우드라고 정의할 수 없으므로 순수기저절점이라고 정의하였다. 본 논문에서는 이 순수기저절점의 위치를 Lagrange 형상함수의 3개중 가운데에 해당하는 함수의 대표절점 위치인 가운데로 선정했다. 왜냐하면 기저함수값이 해당절점위치에서 1(단위값)이 된다면, 선형방정식에서 도출되는 해당절점의 미지수 값을 추가적인 보간계산없이 직접적인 해로 인정될 수 있기 때문이다. 그러나 반드시 1의 위치에서 절점을 결정해야 하는 법칙은 없으며, 임의의 위치에 절점의 물리적 위치를 결정해도 무방하다. 이 경우 절점위치에서 물리적 값 즉 변위, 응력 등을 알아내기 위해 추가적 보간 계산을 한 번 더 수행해야 한다. 이러한 사상함수와 해의 기저함수차이에 따른 절점차이로 인한 계산과정의 변화가 저매개변수 요소와 등매개변수 요소의 가장 큰 차이점 이라고 할 수 있다.

식 (14,17,20)은 식 (5)를 이용하여 소스 포인트 p에서 적분대상인 요소의 거리를 계산하는 식으로 각 소스포인트는 식 (6)로 나타낸 기저함수의 대표절점에 해당하는 하는 것으로 시작, 가운데, 끝의 3군데이고, 따라서 식의 개수는 3개가 된다. 아울러 각 소스포인트에서 해당요소의 거리를 계산하는 식은 수치적분을 수행하므로 가우스 적분점과 소스포인트의 거리를 계산하는 식이 된다. 식 (14,17,20)은 각 사상함수를 어떻게 결정하느냐에 따라 항상 다르게 계산되어야 하는 식으로 본 논문에서는 새롭게 유도하였다.

식 (9)에 식 (14,17,20)을 대입하면 각각 식 (10,11,12)를 얻을 수 있는데 식 (10,11,12)에서 앞쪽 항은 log 수치적분을 이용하여 계산하며, 뒤쪽 항은 먼저 유도한 식 (14, 17,20)을 적용하고 일반적인 가우스 수치적분을 이용하여 계산한다.

$$\ln\left[\frac{1}{r(p,Q)}\right]=\ln\left[\frac{1}{\eta\sqrt{f_x(\xi)^2+f_y(\xi)^2}}\right] \tag{9}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)-\frac{1}{2}\ln\left[f_x(\xi)^2+f_y(\xi)^2\right]$$

$$U_{xx}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)\right] \tag{10}$$
$$+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(3-4\nu)S+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$U_{xy}=U_{yx}=\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \tag{11}$$

$$U_{yy}=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)\right] \tag{12}$$
$$+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(3-4\nu)S+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$S=-\frac{1}{2}\ln\left[f_x^2+f_y^2\right] \tag{13}$$

$$r_1^2(p,Q)=\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m x_i-x_1\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m y_i-y_1\right]^2 \tag{14}$$
$$=\left\{-\frac{1}{2}(\xi+1)\right\}^2\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right\}\geq 0$$

$$\eta=\frac{1}{2}(\xi+1):\quad \xi\in[-1,1]\rightarrow\eta\in[0,1] \tag{15}$$

$$f_x^2=(x_1-x_2)^2;\ f_y^2=(y_1-y_2)^2 \tag{16}$$

$$r_2^2(p,Q)=\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m x_i-x_2\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m y_i-y_2\right]^2 \tag{17}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}(\xi-1)\right\}^2\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right\}\geq 0$$

$$\eta=\frac{1}{2}(\xi-1):\quad \xi\in[-1,1]\rightarrow\eta\in[0,1] \tag{18}$$

$$f_x^2=(x_1-x_2)^2;\ f_y^2=(y_1-y_2)^2 \tag{19}$$

$$r_c^2(p,Q)=\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m x_i-x_c\right]^2+\left[\sum_{i=1}^{2}N_i^m y_i-y_c\right]^2 \tag{20}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2\left\{(-x_1+x_2)^2+(-y_1+y_2)\right\}^2\geq 0$$

$$\eta=\xi:\quad \xi\in[-1,1]\rightarrow\eta\in[-1,1] \tag{21}$$
$$\rightarrow\eta\in[-1,0]\cup[0,1]$$

$$f_x^2=(-x_1+x_2)^2;\ f_y^2=(-y_1+y_2)^2 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}C_{xx}\ C_{xy}\\ C_{yx}\ C_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x(p)\\ u_y(p)\end{bmatrix} \tag{23}$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}T_{xx}\ T_{xy}\\ T_{yx}\ T_{yy}\end{bmatrix}\psi_k(\xi)J(\xi)\,d\xi\begin{bmatrix}u_x(Q)\\ u_y(Q)\end{bmatrix}$$
$$=\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}U_{xx}\ U_{xy}\\ U_{yx}\ U_{yy}\end{bmatrix}\psi_k(\xi)J(\xi)\,d\xi\begin{bmatrix}t_x(Q)\\ t_y(Q)\end{bmatrix}$$

M : 전체 요소수

$$J(\xi)=\frac{d\Gamma}{d\xi}=\sqrt{\left[\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right]^2+\left[\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right]^2} \tag{24}$$

$$x(\xi)=\sum_{i=1}^{2}N_i^m x_i \tag{25}$$

$$y(\xi)=\sum_{i=1}^{2}N_i^m y_i \tag{26}$$

$$[H]_{ij}=-\sum_{\substack{j=i\\ j\neq i}}^{n}[H]_{ij};\ \text{for } i,j=1,2,3,\ldots,n \tag{27}$$

i, j : the row and column counters

n : the total number of nodes

$[H]$: diagonal sub-matrix

log 수치적분을 이용할 경우 $\xi\in[-1,1]$좌표를 다시 $\eta\in[0,1]$로 사상해야 한다. 이때 사상에 필요한 식은(14,17,20)의 내부에 자연스럽게 나타나는데, 이는 매우 놀라운 일이며 다시 식 (15,18,21)으로 분리하여 정리할 수 있다. 특히 식 (21)의 경우는 요소구간[-1,1]을 양쪽으로 나누어 $\eta\in[-1,0]$, $\eta\in[0,1]$을 각각 따로 두 번에 걸쳐 적분한다.

식 (23)은 ξ 좌표계에 대해 이산화된 경계요소방정식을 나타내고 있으며, 식 (23)이 절점 당 한 개씩 생성되면서 모든 미지수에 대한 선형방정식인 식 (4)를 구성하게 된다. 끝으로 대각행렬의 요소는 보통의 경계요소법에서 사용하는 일반적인 방법인 식 (27)을 이용하여 계산된다. 이식은 강체거동을 통해 유도되며, 식 (7)의 $T_{ij}(p,Q)$로 나타나는 트랙션 Kernel 내부의 강특이적분계산을 피할 수 있는 유용한 식이다. 식 (27)에서 i,j는 행과 열의 번호이며, n은 전체절점의 수이다(Becker, 1992).

3.3 등매개변수 요소와 저매개변수 요소의 차이점

앞서 언급한 것과 같이 등매개변수 요소는 사상함수와 기저함수를 같은 함수로 두고 계산을 하는 경우이며, 저매개변수 요소는 사상함수의 차수를 기저함수에 비해 낮게 설정하여 계산하는 방식이다. 사실 사상함수와 기저함수를 같게 두는 것은 편의에 의한 것으로 두 함수가 같아야 할 이유는 없으며, 또한 같은 계열의 함수를 사용해야 할 이유도 없다. 예를 들자면, 사상함수를 Lagrange 계열로 사용하고, 기저함

수는 원래 미분방정식의 해를 잘 모사할 수 있는 다른 함수를 사용할 수 도 있다(우광성, 2009; Basu, 2003).

저매개변수 요소의 차이점을 언급하면 첫 번째로 사상함수 N_i^m와 해의 기저함수 ψ_i^b의 절점차이로 인한 계산과정의 변화가 저매개변수 요소와 등매개변수 요소의 가장 큰 차이점이라고 할 수 있다. 즉 사상함수의 차수가 낮을 경우 해의 기저함수의 절점수보다 적은 절점수를 가지므로 Jacobian을 계산할 때 등매개변수의 계산방식과는 다른 별도의 계산과정을 거쳐야 한다. 그로 인해 식 (14,17,20)에 해당하는 특이값을 분리하고 계산하기 위해 소스포인트와 필드포인트 간의 거리인 r값을 계산하는 수식을 새롭게 유도하여야 한다(Harari, 1997). 두 번째로 직선경계를 계산할 경우 불필요한 사상함수 계산을 배제할 수 있으므로 계산량의 감소와 계산정확도를 높일 수 있다. 그 외 사용해야 하는 적분점의 개수에 대해서는 기저함수의 차수에 지배를 받으므로 이에 있어서는 차이가 없고, 외형적으로 보이는 이산화 방정식인 식 (23)의 형태도 차이가 없다(Ameen, 2001).

4. 해석예제

앞서 Kernel 함수를 적분하기 위하여 제시한 r식의 정확도를 검증하기 위해 다음과 같은 예제를 해석하였다. 변위와 응력의 상세한 검토는 생략했으며, 제시한 r식을 이용한 적분이 최종적으로 해에 미치는 영향을 검토하는 것을 주목적으로 하였다.

4.1 단순연결영역(Simply Connected Region)

해석예제로서 닫힌 영역이며 단순연결영역의 대표적인 형태인 외팔보를 해석했다. 왼쪽은 모두 고정단으로 처리하였고, 오른쪽 자유단부에 등분포하중 1N/mm을 아랫방향으로 작용하도록 했다. 재료상수는 $E=1000\text{N/mm}^2$, $\nu=0.25$로 설정하였다. 해의 기저함수로는 2차를 사용하였고, 사상함수로는 2차와 1차를 사용하여 비교하였다. 해석영역은 높이가 10m에 달하여 깊은 보의 형태라고 할 수 있으며, 선형탄성 2차원 평형방정식에 대한 평면응력 해와 비교를 하였다. 그림 1은 해석영역의 제원을 나타내고 있으며, 그림 2는 저매개변수 경계요소를 이용한 해석영영분할과 그에 따른 절점번호상황을 보여주고 있다. 특히 그림 1과 2에서 크게 표시된 절점은 해의 기저함수와 사상함수를 동시에 포함한 절점이며 작게 표시된 점은 해의 기저함수만을 포함한 절점이다.

그림 3의 그래프에서 보여주는 것과 같이 사상함수의 변화에 따라 해석결과에 차이가 없는 것을 알 수 있다. 정해와

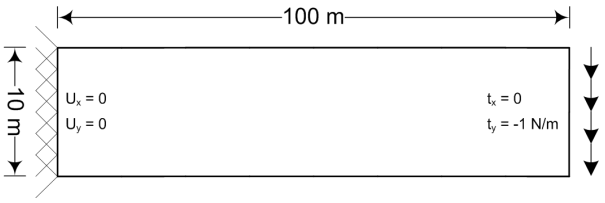

그림 1 해석에 사용된 외팔보의 제원과 경계조건

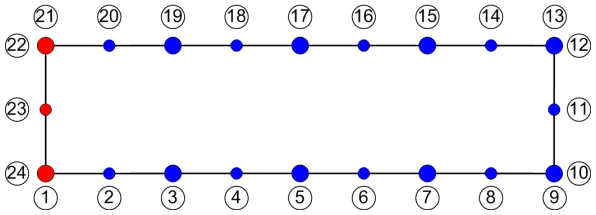

그림 2 저매개변수 경계요소에 의한 해석영역분할 (10요소 24절점) ● : 일반절점 ● : 순수기저절점

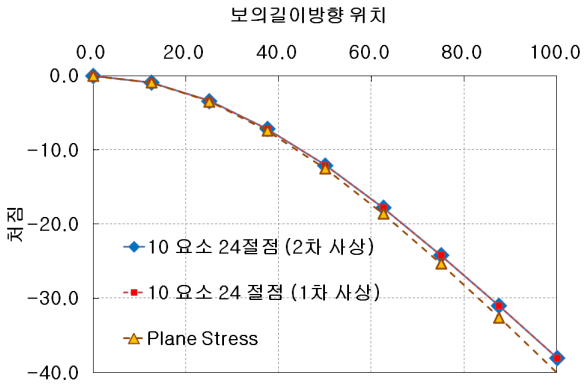

그림 3 2차 사상함수와 1차 사상함수에 대한 처짐비교

비교에서 약간의 차이를 나타내나 사상함수의 변화에 따라 발생한 오차량은 아니며, 요소수가 증가되면 줄어 들것으로 판단된다. 그림 3에서 판단하건데, 직접 경계요소법을 이용하여 직선으로 구성된 단순한 영역의 문제를 해석할 경우 해의 기저함수가 같다면 저매개변수를 사용하는 것이 적은 계산량으로 높은 정확도의 해를 얻을 수 있다는 사실을 확인할 수 있다. 또는 해석영역의 형상이 직선으로 구성된다면 해의 기저함수만을 고차로 할 경우 그 품질을 높일 수 있다는 의미로도 해석할 수 있다. 본 예제의 경우 형상이 간단하여 울림현상 등은 동반되지 않았다.

4.2 다중연결영역(Multiple Connected Region)

해석예제로서 닫힌 영역이며 다중연결영역의 대표적인 형태인 외부 경계와 가운데 구멍이 존재하는 영역을 해석하였다. 본 영역은 상자형 암거(box culvert) 형태를 나타내고 있으며 내부 빈영역은 요소번호를 시계방향으로 입력하였다.

경계조건은 그림 4에서 보는 바와 같이 변형형상을 확실

히 확인하기 위해 좌변고정을 선택하였고, 우변에는 등분포하중 1N/mm를 오른쪽방향으로 적용했다. 재료상수는 앞선 예제와 동일하게 $E=1000\text{N/mm}^2$, $\nu=0.25$로 설정하였고, 해의 기저함수로는 2차를 사용하였고, 사상함수로는 1차를 사용하였다. 하중조건은 제안된 저매개변수 요소의 적분방법이 타당한지에 대한 검증차원에서 변형형상이 확연하게 나타나는 조건을 선택하였다.

앞선 예제에서 밝힌바와 같이 그림 5에서 크게 표시된 절점은 해의 기저함수와 사상함수를 동시에 포함한 절점이며 작게 표시된 점은 해의 기저함수만을 포함한 절점이다.

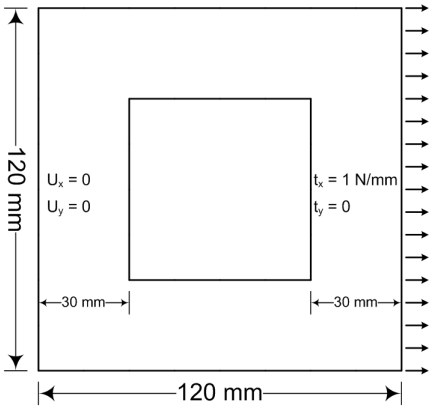

그림 4 개구부를 갖는 판의 제원과 경계조건

표 1 해석모델에 따른 변수의 사용개수

해석모델 No. (BEM 저매개변수)	요소	절점	순자유도
1	8	24	42
2	16	40	66
3	24	56	94
4	32	72	122

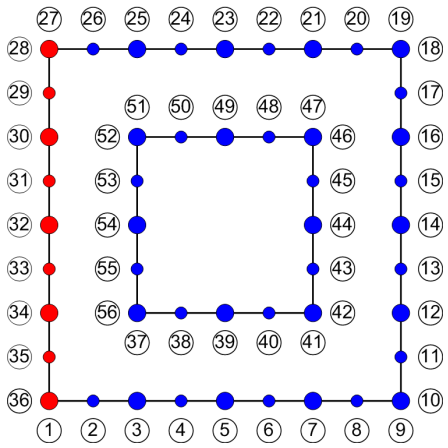

그림 5 저매개변수 경계요소에 의한 해석영역분할 (해석모델 No. 3)
● : 일반절점 •: 순수기저절점

표 2 주요절점 위치에서의 변위값(해석모델 No. 3)

Node No.	저매개변수 BEM (24요소 56절점)		FEM (108요소, 144절점)	
	u_x^B	u_y^B	u_x^B	u_y^B
10	0.14822	-0.05093	0.14876	-0.05110
14	0.37962	0.00000	0.37487	0.00000
18	0.14822	0.05093	0.14876	0.05110
42	0.23187	0.05898	0.23120	0.05745
44	0.36721	0.00000	0.36280	0.00000
46	0.23187	-0.05898	0.23120	-0.05745

본 방법의 수렴상황을 알아보기 위해 표 1에 나타낸 바와 같이 단계적인 세분화 모델에 대하여 해석을 수행하였다. 표 2에서는 해석모델 3번의 결과와 FEM값을 비교해 본 논문에서 유도된 저매개변수요소 적분식의 옳음을 판단해 보았다. 그 결과 적분식은 올바르게 유도되었으며 정확도에 있어서도 문제가 없다고 판단할 수 있다.

또한, 전체적 변형형상이 제대로 된 지에 대해서 그림 6과 같이 변형도를 그려보았다. 그림 6에서 볼 수 있는 바와 같이 변형형상은 우변에 하중이 작용하였을 경우를 잘 나타내고 있으며, 중앙부의 축소현상도 잘 나타나는 것을 볼 수 있다.

다음으로 저매개변수요소의 수렴정도를 보이기 위해 표 1에서 나타낸 바와 같이 몇 단계별 해석을 수행하고 수렴곡선을 나타내어 보았다.

비교의 기준값을 얻기 위해 FEM해석값을 사용했고 선형 및 등간격으로 분할하였으며 각 4가지의 모델 이용하여 해석을 수행하였다. 아울러 비교의 기준값을 결정하기 위해 응력집중이 일어나는 σ_{xx}의 해석값을 나타내보았다. 그림 7에서 두 해석에 사용된 순자유도수의 차이가 심하여 Log축척을 통해 나타내었고, 그래프에서 표식점 앞쪽 값은 자유도, 뒤쪽 값은 해석값을 나타내고 있다.

왼쪽 곡선에 해당하는 저매개변수 BEM 해석모델 No. 3

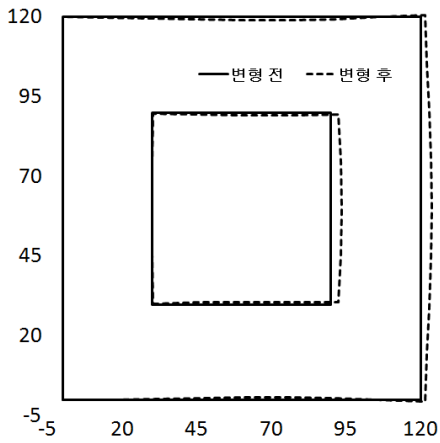

그림 6 변형전과 변형후 형상비교(해석모델 No. 3, 1차 사상)

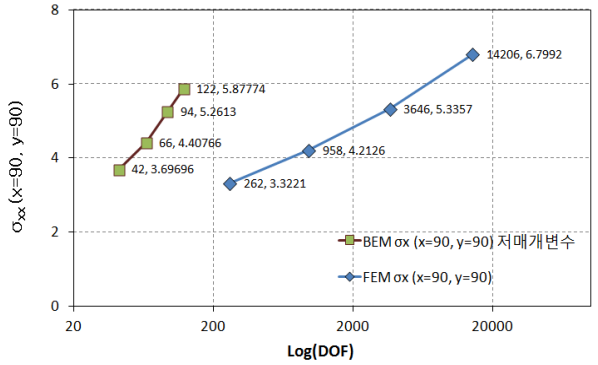

그림 7 설정된 FEM 기준값의 정확도 검증을 위한 FEM 해석과 BEM해석의 Log 축척에서 해석값 비교(자유도, 응력값)

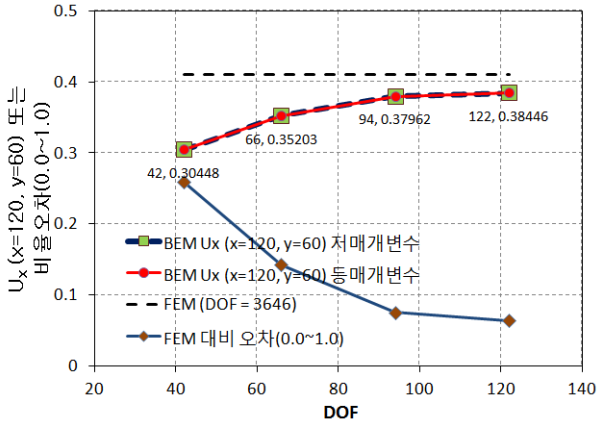

그림 8 절점 14번(모델 No. 3)위치 u_x 수렴상황

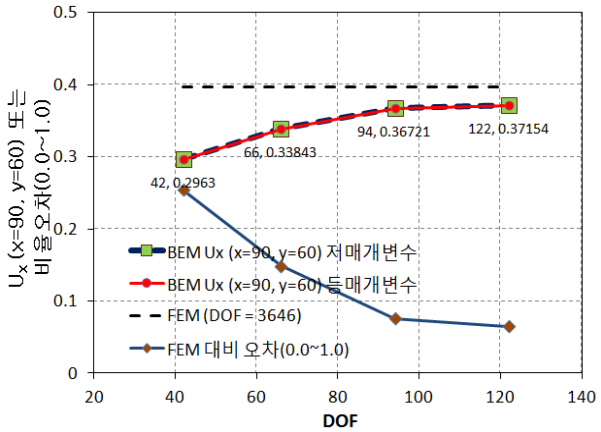

그림 9 절점 44(모델 No. 3)위치 u_x 수렴상황

의 5.2613의 해석값은 선형비례식으로 계산할 경우 FEM의 약 3468개의 순자유도에 해당하는 값이므로 실제해석을 수행한 3646개의 순자유도에 해당하는 FEM 해석값을 기준값으로 정하였다.

그림 8의 경우 그림 5에서 절점 14의 u_x에 대한 수렴상황을 나타내었다. 그림 7,8,9에서 □로 표시된 부분은 표 1에 나타난 바와 같이 각 BEM을 이용한 해석모델을 나타내

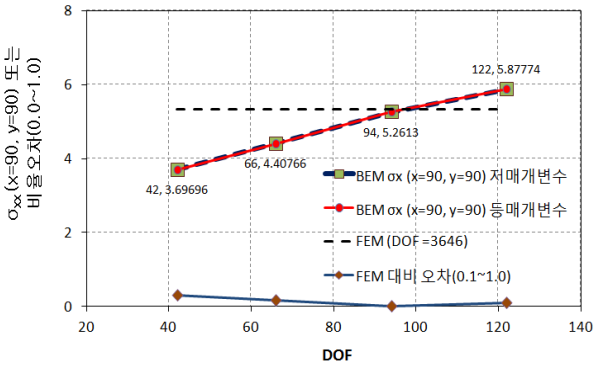

그림 10 절점 41(모델 No. 3)위치 σ_{xx}의 수렴상황

며, 표식 앞의 숫자는 순자유도를 뒤의 숫자는 해석값을 나타내고 있다. 절점 14번의 u_x는 기준값으로 설정된 FEM해석값에 비해서 적은 자유도에서 빠른 수렴정도를 나타내고 있다. 또한 오차곡선도 아래로 빠르게 감소하고 있는 것을 볼 수 있다. 그림 8에서 저매개변수 값은 등매개변수가 수렴해가는 량 만큼 잘 따라가고 있는 것을 볼 수 있다. 그림 9의 경우 그림 5에서 절점 44의 u_x에 대한 수렴상황을 나타내었다.

마지막으로, 응력집중이 일어나는 부분에 대하여 응력값을 그림 10으로 나타내보았다. 이 부분은 응력집중현상으로 인해 부분적으로 항복영역이 발생하기 때문에 설정된 기준값이 매우 정확하다고 하기는 어려우나 자유도 사용수에 따른 해의 수렴정도를 비교할 수 있는 척도로 사용될 수 있을 것으로 판단된다. 그림 10에서 보는 바와 기준값의 자유도는 3646으로 저매개변수 경계요소 해석모델 4번에 비해서도 29.9배나 큰 값이며, 해석모델 3번에 대해서는 38.8배나 큰값이다. 또한 FEM 강성도 행렬의 경우 크기가 3646^2 (=13,293,316)이며, 그에 반해 BEM의 계수 행렬의 크기는 122^2(=14,884)이므로 두 값은 893배의 차이를 보이게 된다. 그에 비해 해석값의 수렴상황은 저매개변수 BEM의 경우 빠르게 증가하여 해석모델 3에서 기준값으로 사용한 FEM 값과 비슷한 값을 보여주고 있다. 따라서 본 논문에서 사용한 방법이 수렴속도가 빠른 것을 알 수 있으며 저매개변수 BEM과 등매개변수 BEM에도 차이가 없는 것을 볼 수 있다. 또한 그림 10의 아래쪽 그래프에 나타낸 오차량도 감소하는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 간략하게 직접 경계요소법에 대한 내용을 알아보았고, 저매개변수 경계요소의 구현과 그 구현에서 결정적인 역할을 하는 선형함수사상, 적분방법과 그에 의한 해

의 성질변화에 대해 살펴보았다.

아울러 해의 기저함수로 2차 함수를 영역의 사상 및 적분시 자코비안(Jacobian)값 계산에는 1차 함수를 사용하여 직접 경계요소법을 구성하여 보았다. 그 결과, 해의 기저함수와 영역의 사상함수를 동일한 차수로 취하는 등매개변수(isoparametric)요소에 비해 정확도면에서 차이가 없음을 알 수 있었고 저매개변수를 사용할 경우 Kernel 함수를 적분하기 위해 유도한 r식이 제대로 작동하는 것을 검증할 수 있었다. 또한 기준값으로 설정한 FEM과 비교에서도 빠른 수렴을 보여주었다. 본 연구는 추후 진행될 저매개변수 고차경계요소(subparametric high order boundary element)를 구성하는데 기본적인 틀을 제공하는데 의의를 찾을 수 있다.

경계요소법은 유한요소법과 다르게 기본해에 관한 수학적인 내용이 많이 포함된 방법이므로 정확한 결과를 도출하지만, 이쉽게도 해석해를 사용한다는 단점으로 인해 그 적용범위가 유한요소법만큼 광범위하지 않다.

본 연구에서 틀을 마련한 저매개변수 선형탄성 직접 경계요소는 특히 재료비선형해석, 동적해석, 파괴역학분야, 무한영역을 해석해야 하는 지반분야에서 정확한 결과를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김문겸, 장정범 (1995) 유한요소와 경계요소의 조합에 의한 지하구조체의 정해석 및 역해석, 대한토목학회 논문집, 15(6), pp.1746~1753.

우광성, 장영민, 이동우, 이상윤 (2010) 응력특이를 갖는 축방향 부재의 웨이블렛 급수해석, 한국전산구조공학회 논문집, 제23권, 제1호, pp.1~8.

우광성, 조준형 (2009) p-수렴 경계요소법에 의한 L-형 영역을 갖는 2차원 포텐셜 문제해석, 한국전산구조공학회 논문집, 22(1), pp.117~124.

우광성, 조준형, 이동진 (2006) 적응적 p-Version 유한요소법에서 정규 크리깅에 의한 응력복구기법, 대한토목학회 논문집, 26(4A), pp.677~687.

조준형, 우광성, 신영식 (2011) 4계 타원형 미분 방정식을 위한 웨이브렛 급수해석, 한국전산구조공학회 논문집, 24(4), pp.355~364.

Alexander, H.D., Cheng, D.T. (2005) Heritage and Early History of the Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, pp.268~302.

Ameen, M. (2001) Boundary Element Analysis : Theory and Programming, Narosa Publishing House.

Basu, P.K., Jorge, A.B., Badri, S., Lin, J. (2003) Higher-Order Modeling of Continua by Finite-Element, Boundary-Element, Meshless, and Wavelet Methods, *Computers and Mathematics with Applications*, 46, pp.15~33.

Becker, A.A. (1992) The Boundary Element Method in Engineering A complete course, McGraw-Hill, UK.

Beer, G. (2001) Programming the Boundary Element Method: An Introduction for Engineers, Wiley.

Harari, I., Shalom, R., Barbone, P. (1997) Higher-order Boundary Infinite Elements, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 164, pp.107~119.

Masserey, A., Rappaz, J., Rozsnyo, R., Swierkosz, M. (2005) Numerical Integration of the Three-dimension Green Kernel for an Electromagnetic Problem, *Journal of Computational Physics*, 205, pp.48~71.

Oden, J.T. (1982) Finite Element Method 1. Introduction, Prentics-Hall, USA.

Oden, J.T. (1982) Finite Element Method 2. Second Course, Prentics-Hall, USA.

Reddy, J.N. (1996) An introduction to the Finite Element Method(2nd Edition) McGraw-Hill

Woo, K.S. (1989) High Precision Analysis of Plates and Cylindrical Shells in the Presence of Singularities by p-Version of F.E.M., Ph.D. Dissertation, Vanderbilt Univ.

● 논문접수일 2012년 5월 18일
● 논문심사일
1차 2012년 5월 29일
2차 2012년 7월 2일
● 게재확정일 2012년 7월 31일