

# 4계 상미분방정식에 의한 변단면 Timoshenko 보의 자유진동

## Free Vibrations of Tapered Timoshenko Beam by using 4th Order Ordinary Differential Equation

이 병 구\*      박 광 규\*\*      이 태 은†  
Lee, Byoung-Koo   Park, Kwang-Kyou   Lee, Tae-Eun

### 요 지

이 연구는 회전관성과 전단변형을 동시에 고려한 변단면 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 변단면 보의 단면은 폭이 포물선 함수로 변화하는 변화폭 직사각형 단면으로 채택하였다. 이러한 보의 자유진동을 지배하는 수직변위에 대한 4계 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 지점을 고려하였다. 진동형은 변위의 진동형뿐만 아니라 합응력의 진동형도 산출하여 그림에 나타내었다. 휨 회전각과 전단변형에 의한 수직변위 및 전단면 회전각의 구성비율을 산정하였다.

**핵심용어** : 4계 상미분방정식, 자유진동, 변단면 보, Timoshenko 보, 회전관성, 전단변형, 진동형, 고유진동수

### Abstract

This paper deals with free vibrations of the tapered Timoshenko beam in which both the rotatory inertia and shear deformation are included. The cross section of the tapered beam is chosen as the rectangular cross section whose depth is constant but breadth is varied with the parabolic function. The fourth order ordinary differential equation with respect the vertical deflection governing free vibrations of such beam is derived based on the Timoshenko beam theory. This governing equation is solved for determining the natural frequencies corresponding with their mode shapes. In the numerical examples, three end constraints of the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped ends are considered. The effects of various beam parameters on natural frequencies are extensively discussed. The mode shapes of both the deflections and stress resultants are presented, in which the composing rates due to bending rotation and shear deformation are determined.

**Keywords** : fourth order differential equation, free vibration, tapered beam, Timoshenko beam, rotatory inertia, shear deformation, mode shape, natural frequency

## 1. 서 론

보는 대부분의 구조물에서 가장 기본적인 단위구조로 이용되고 있어 다양한 조건을 갖는 보의 동적 거동, 특히 자유진동 특성에 관한 많은 연구가 활발히 이루어지고 있다.

보의 자유진동해석 이론은 회전관성과 전단변형의 고려 유무에 따라 구분할 수 있다. 즉, 회전관성과 전단변형의 영향을 모두 무시한 Euler-Bernoulli 보 이론과 이들을 모두 고려한 Timoshenko 보 이론으로 크게 나눌 수 있다. 일반적

으로 자유진동해석 시 세장비가 큰 보나 저차모드의 해석에서는 이들 두 이론의 결과가 거의 차이를 보이지 않아 비교적 수식전개가 용이한 Euler-Bernoulli 보 이론을 적용하여도 무방하다. 그러나 세장비가 비교적 작은 보나 고차 모드까지 해석이 요구되는 경우 또는 sandwich 보의 경우에는 회전관성과 전단변형의 고려 유무에 따라 그 결과가 비교적 크게 달라지며, 이 경우에는 Timoshenko 보 이론을 적용하는 것이 보다 정확한 해를 얻을 수 있다.

Timoshenko 보의 동적특성 해석에 관한 최근의 연구를

† 책임저자 · 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 연구교수  
Tel: 063-850-6718 ; Fax: 063-857-7204  
E-mail: telee@wku.ac.kr

\* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\* 정희원, 대전대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2012년 8월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2012년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

살펴보면 다음과 같다.

Bercin 등(1997)은 워핑을 고려한 등단면 캔틸레버 보의 고유진동수 방정식을 유도하고, 회전관성, 전단변형 및 워핑이 고유진동수 및 진동형에 미치는 영향을 분석하였다. Takahashi (1999)는 종동력이 작용하는 균열을 갖는 Timoshenko 보의 진동 및 안정에 관한 연구를 수행하였다. Zhou(2000)는 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 정현형 분포하중이 작용하는 다경간 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구를 수행하였다. Zhong 등(2002)은 Hamilton 이론에 의하여 단순지지 Timoshenko보의 비선형 동적미분방정식을 유도하고 이를 미분구적법으로 해석하였다. Yardimoglu 등(2003)은 유효요소모형을 이용하여 기(既) 비틀림력이 작용하는 Timoshenko 보의 자유진동해석을 수행하고 그 결과를 선행연구와 비교하였다. Li 등(2004)은 동적변환행렬을 이용하여 축하중이 작용하는 박벽 Timoshenko 보의 휨-비틀림 연성진동에 관한 연구를 수행하였다. Loya 등(2006)은 신장스프링과 회전스프링으로 모형화된 균열을 갖는 단순지지 Timoshenko 보의 휨 진동에 관한 연구를 수행하였다. Viola 등(2007)은 동적강성도법을 이용하여 축하중이 작용하고 균열을 갖는 등단면 Timoshenko 보의 자유진동해석을 실시하였다. Sapountzakis 등(2009)은 경계요소법을 이용하여 축하중과 횡하중이 동시에 작용하는 등단면 Timoshenko 보의 비선형 동적해석을 실시하였다. Li 등(2009)은 동적강성행렬을 이용하여 3차 전단변형이론을 바탕으로 한 적층복합보의 자유진동해석을 실시하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구는 여러 연구자에 의해 활발히 수행되고 있다. 그러나 대부분의 연구가 비교적 이론전개가 용이한 등단면을 대상으로 하고 있어 그 결과의 이용에 제한적인 요소가 있다. 구조물의 설계에서 변단면의 사용은 자중감소, 내하력 증진 등의 효과뿐만 아니라 외관의 아름다움, 재료비 절감 등의 측면에서도 유리하기 때문에 그 이용이 날로 증가하고 있다.

이 연구에서는 변단면 Timoshenko 보의 자유진동에 대한 미분방정식을 유도하고, 고유진동수 및 진동형을 산출하여 그 특성을 고찰하는데 목적이 있다. 해석대상보의 단면은 직사각형 단면으로 포물선 함수에 따라 폭이 변화하는 변화폭 변단면을 채택하였다. 수치해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 보에 대하여 변수연구를 실시하였으며, 회전관성 및 전단변형이 무차원 고유진동수와 동적변위에 미치는 영향을 고찰하였다.

## 2. 변단면 보

그림 1은 부재길이가  $l$ 인 변단면 부재의 변화제원을 표현

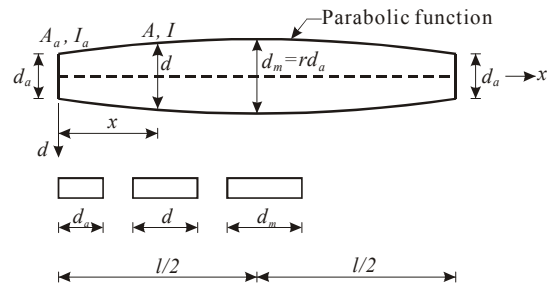


그림 1 변화폭 직사각형 단면의 형상함수

하는 단면형상과 형상함수를 나타낸다. 단면형상과 형상함수는 임의형상 및 임의함수가 모두 가능하다. 이 연구에서는 변단면 Timoshenko 보의 자유진동 이론을 전개하기 위하여 단면형상을 변화폭 직사각형 단면으로, 형상함수는 포물선으로 채택하였다. 즉, 이 그림에서와 같이 직사각형 단면의 높이  $h$ 는 일정하고, 부재 축  $x$ 에서 변화폭  $d$ 는 포물선 식인 형상함수  $F$ 에 따라서 변화한다. 부재양단  $x=0$  및  $x=l$ 에서  $d=d_a$ 이고, 부재중앙  $x=l/2$ 에서  $d=d_m$ 이다.  $A_a, I_a$ 는 부재양단에서 단면적 및 단면 2차모멘트이고,  $A, I$ 는  $x$ 에서 단면적 및 단면 2차모멘트이다.

변화폭  $d$ 의 형상함수  $F$ 를 결정하기 위하여 다음 식과 같이 단면비  $r$ 을  $d_a$ 에 대한  $d_m$ 의 비로 정의한다.

$$r = \frac{d_m}{d_a} \quad (1)$$

단면비  $r$ 을 이용하면 부재 축  $x$ 에서 변화폭  $d$ 는 형상함수  $F$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d = d_a F \quad (2)$$

형상함수  $F$ 는  $(0, d_a), (l/2, d_m), (l, d_a)$ 의 3좌표를 통과하므로 다음과 같은 포물선 식을 얻을 수 있다.

$$F = -4(r-1)\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)+1 \quad (3)$$

이 연구에서 변단면은 변화폭 직사각형 단면이므로  $x$ 에서 단면적  $A$  및 단면 2차모멘트  $I$ 는 다음과 같이  $F$ 로 표현할 수 있다.

$$A = hd = hd_a F = A_a F \quad (4)$$

$$I = \frac{h^3 d}{12} = \frac{h^3 d_a}{12} F = I_a F \quad (5)$$

식 (4), (5)에서  $A_a = hd_a$ 이고,  $I_a = h^3 d_a / 12$ 이다.

### 3. 수학적 모형

#### 3.1 Timoshenko 보 이론

그림 2는 자유진동하는 보의 수직변위  $y_x$ 의 진동형을 나타낸다. 보의 양단은 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다.

이 그림에서  $\Psi_x (= dy/dx)$ 는 자유진동 변위에 의하여 단면에 발생하는 전(全)단면 회전각(total rotation)을 나타내고,  $\theta_x$ 는 휨 회전각(bending rotation),  $\gamma_x$ 는 전단변형(shear deformation)을 나타낸다. 이 그림에서와 같이  $\Psi_x$ 는  $\theta_x$ 와  $\gamma_x$ 로 구성된다.

자유진동의 동적 수직변위  $y_{x,t}$ , 동적 휨 회전각  $\theta_{x,t}$ , 동적 전단변형  $\gamma_{x,t}$ 는 다음과 같이 조화진동식으로 나타낼 수 있다.

$$y_{x,t} = y_x \sin(\omega_i t) \tag{6}$$

$$\theta_{x,t} = \theta_x \sin(\omega_i t) \tag{7}$$

$$\gamma_{x,t} = \gamma_x \sin(\omega_i t) \tag{8}$$

위의 식들에서  $y_x, \theta_x, \gamma_x$ 는 그림 2에서와 같이 조화진동의 진폭이고  $x$ 만의 함수이다.  $y_x, \theta_x, \gamma_x$ 는 간단한 표기를 위하여 이후에는  $y, \theta, \gamma$ 로 표기한다.  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/sec)이고,  $t$ 는 시간이다.

그림 3은 자유진동하는 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형상태를 나타낸다. 미소요소에 발생하는 수직변위  $y$ , 회전각  $\theta$ , 전단변형  $\gamma$ 에 의하여 부재단면에는 동적 휨 모멘트  $M_{x,t}$  및 동적 전단력  $Q_{x,t}$ 가 작용한다. 질량을 갖는 미소요소에는  $y$ 에 의하여 동적 수직관성력  $F_{(y),x,t}$ 가 발생하고,  $\theta$ 에 의하여 동적 회전관성우력  $M_{(I),x,t}$ 가 작용한다. 자유진동 이론에서 회전관성우력  $M_{(I),x,t}$ 와 전단변형  $\gamma_{x,t}$ 을 동시에 고려한 이론이 Timoshenko 보 이론이다(Timoshenko 등, 1974).

미소변위 이론에 의하여  $M_{x,t}$ 와  $Q_{x,t}$ 를  $\theta$ 와  $\gamma$ 를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{x,t} = EI \frac{\partial \theta_{x,t}}{\partial x} = EI \frac{d\theta}{dx} \sin(\omega_i t) \tag{9}$$

$$Q_{x,t} = kGA \gamma_{x,t} = kGA \gamma \sin(\omega_i t) \tag{10}$$

위에서  $E, G$ 는 보 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수이다.  $k$ 는 단면형상계수이고, 이 연구에서 채택한 직사각형 단면의  $k=5/6$ 이다.  $EI(d\theta/dx)$ 와  $kGA\gamma$ 는 조화진동  $M_{x,t}$ 와  $V_{x,t}$ 의 진폭이며,  $x$ 만의 함수이다.

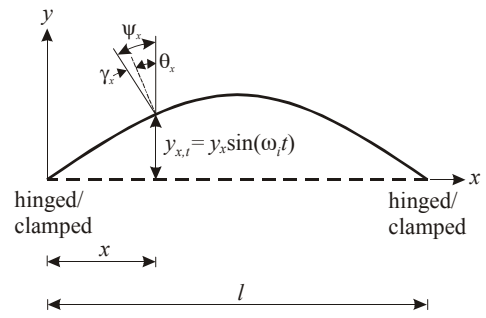


그림 2 조화진동의 변위 진동형

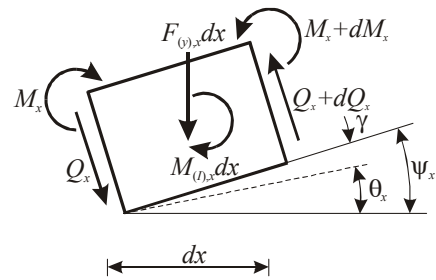


그림 3 미소요소의 동적 평형

자유진동해석에서 회전관성과 전단변형의 영향은 매우 중요하다. 이 연구에서 변단면 보의 자유진동을 해석하기 위하여 앞에서 언급한 바와 같이 회전관성과 전단변형을 모두 고려한 Timoshenko 보 이론을 자유진동해석 이론에 적용한다.

그림 2, 3에 나타낸 바와 같이  $\partial y_{x,t} / \partial x (= \Psi_{x,t})$ 는 다음 식과 같이  $\theta_{x,t}$ 와  $\gamma_{x,t}$ 로 구성된다.

$$\frac{\partial y_{x,t}}{\partial x} (= \Psi_{x,t}) = \theta_{x,t} + \gamma_{x,t} \tag{11}$$

식 (11)에 식 (6)~(8)을 대입하고 정리하면 다음의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} (= \Psi) = \theta + \gamma \tag{12}$$

그림 3의 미소요소에서 모멘트에 대한 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M_{x,t}}{\partial x} + Q_{x,t} - M_{(I),x,t} = 0 \tag{13}$$

식 (9)를  $x$ 에 대하여 편미분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial M_{x,t}}{\partial x} = E \left( \frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} + I \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) \sin(\omega_i t) \tag{14}$$

휨 회전각  $\theta_{x,t}$ 에 의한 회전관성우력  $M_{(I)x,t}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M_{(I)x,t} = \rho I \frac{\partial^2 \theta_{x,t}}{\partial t^2} = -\omega_i^2 \rho I \theta \sin(\omega_i t) \quad (15)$$

여기서,  $\rho$ 는 보 재료의 질량밀도이다.

식 (13)에 식 (10), (14), (15)를 대입하고  $d^2\theta/dx^2$ 에 대하여 정리하면 다음의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{\omega_i^2 \rho}{E} \theta - \frac{kGA}{EI} \gamma \quad (16)$$

그림 3의 미소요소에서 수직방향에 대한 힘의 동적 평형 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q_{x,t}}{\partial x} - F_{(y)x,t} = 0 \quad (17)$$

식 (10)으로부터 다음의 편미분식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial Q_{x,t}}{\partial x} = kG \left( \frac{dA}{dx} \gamma + A \frac{d\gamma}{dx} \right) \sin(\omega_i t) \quad (18)$$

수직변위  $y_{x,t}$ 에 의한 동적 수직관성력  $F_{(y)x,t}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_{(y)x,t} = \rho A \frac{\partial y_{x,t}}{\partial t^2} = -\omega_i^2 \rho A y \sin(\omega_i t) \quad (19)$$

식 (18), (19)를 식 (17)에 대입하고  $d\gamma/dx$ 에 대하여 정리하면 다음의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\omega_i^2 \rho}{kG} y - \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \gamma \quad (20)$$

### 3.2 무차원 미분방정식의 유도

이 연구에서 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (21)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \quad (22)$$

$$\mu = \frac{G}{E} \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{I_a/A_a}} \quad (24)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A_a}{EI_a}} \quad (25)$$

여기서,  $(\xi, \eta)$ 는 각각 무차원 축방향 좌표, 무차원 수직변위이다.  $\mu$ 는 탄성계수비이고,  $\lambda$ 는 세장비이다.  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이다.

식 (4), (5)를 이용하면 다음과 같은 미분식  $dA/dx$ ,  $dI/dx$ 를 얻을 수 있다.

$$\frac{dA}{dx} = A_a \frac{dF}{dx} \quad (26)$$

$$\frac{dI}{dx} = I_a \frac{dF}{dx} \quad (27)$$

위의 식들에서 1계미분식  $dF/dx$ 는 식 (3)의 형상함수  $F$ 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{4(r-1)}{l} \left( \frac{2x}{l} - 1 \right) \quad (28)$$

이제 식 (26)~(28)을 식 (12), (16), (20)에 대입하고 무차원 변수식 (21)~(25)를 이용하면 다음과 같은 무차원 상미분방정식들을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} (= \Psi) = \theta + \gamma \quad (29)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = -\frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{C_i^2}{\lambda^2} \theta - k\mu\lambda^2 \gamma \quad (30)$$

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{C_i^2}{k\mu\lambda^2} \eta - \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \gamma \quad (31)$$

위의 식 (30), (31)에 포함되어 있는  $f, df/d\xi$ 는 식 (3), (21)을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$f = -4(r-1)\xi(\xi-1)+1 \quad (32)$$

$$\frac{df}{d\xi} = -4(r-1)(2\xi-1) \quad (33)$$

식 (29)를  $\theta$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\theta = \frac{d\eta}{d\xi} - \gamma \quad (34)$$

식 (30)에 식 (34)를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{C_i^2}{\lambda^2} \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} - \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d\gamma}{d\xi} - \left( \frac{C_i^2}{\lambda^2} - k\mu\lambda^2 \right) \gamma = 0 \quad (35)$$

식 (31)을  $\xi$ 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = - \frac{C_i^2}{k\mu\lambda^2} \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d\gamma}{d\xi} - \left[ \frac{1}{f} \frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 \right] \gamma \quad (36)$$

위의 식에서  $d^2f/d\xi^2$ 은 식 (33)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} = -8(r-1) \quad (37)$$

식 (35)에 식 (31), (36)을 대입하고  $\gamma$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\gamma = - \left[ \frac{1}{f} \frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + k\mu\lambda^2 - \frac{C_i^2}{\lambda^2} \right]^{-1} \times \left( \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{k\mu+1}{k\mu\lambda^2} C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (38)$$

식 (38)을  $\xi$ 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = a_1(a_2 + a_3 C_i^2)^{-2} \left( \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + a_4 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_5 C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right) - (a_2 + a_3 C_i^2)^{-1} \left[ \frac{d^4\eta}{d\xi^4} + a_4 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_5 C_i^2 + a_6) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right] \quad (39)$$

여기서,

$$a_1 = \frac{1}{f} \frac{d^3f}{d\xi^3} - \frac{3}{f^2} \frac{df}{d\xi} \frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{2}{f^3} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^3 \quad (40a)$$

$$a_2 = \frac{1}{f} \frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + k\mu\lambda^2 \quad (40b)$$

$$a_3 = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (40c)$$

$$a_4 = \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} \quad (40d)$$

$$a_5 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{k\mu\lambda^2} \quad (40e)$$

$$a_6 = \frac{1}{f} \frac{d^2f}{d\xi^2} - \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 \quad (40f)$$

$$a_7 = \frac{1}{k\mu\lambda^2} \quad (40g)$$

식 (31)에 식 (38), (39)를 대입하고  $d^4\eta/d\xi^4$ 에 대하여 정리하면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = a_1(a_2 + a_3 C_i^2)^{-1} \left( \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + a_4 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_5 C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right) - \left[ 2a_4 \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + (a_4^2 + a_5 C_i^2 + a_6) \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_4 a_5 C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right] + a_7(a_2 + a_3 C_i^2) C_i^2 \eta \quad (41)$$

위의 식에서 계수  $a_1 \sim a_7$ 은 식 (40)에 정의되어 있다.

식 (41)의 지배미분방정식을 적당한 수치해석 방법을 이용하여 수치해석이 끝나면 전단면 회전각  $\Psi$ , 전단변형  $\gamma$ , 휨 회전각  $\theta$ 는 앞에서 언급한 다음 식들로부터 산정할 수 있다.

$$\Psi = \frac{d\eta}{d\xi} \quad \text{ibid (29)}$$

$$\gamma = - (a_2 + a_3 C_i^2)^{-1} \left( \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + a_4 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_5 C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad \text{ibid (37)}$$

$$\theta = \frac{d\eta}{d\xi} - \gamma \quad \text{ibid (34)}$$

이상과 같이 식 (29), (34), (37)을 이용하면  $\Psi$ 를 구성하고 있는  $\theta$ 와  $\gamma$ 로 구분하여 그 비율을 산정할 수 있다.

식 (34), (37)로  $\theta$ 와  $\gamma$ 가 계산되었으므로 수직변위  $\eta$ 도 마찬가지로  $\theta$ 와  $\gamma$ 에 의한 구성성분으로 구분하여 그 비율을 산정할 수 있다.

$$\eta = \int \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi = \int (\theta + \gamma) d\xi = \int \theta d\xi + \int \gamma d\xi = \eta_\theta + \eta_\gamma \quad (42)$$

위의 식에서  $\xi=0$ 인 좌측 지점에서  $\eta=0$ 이므로 적분상수는 "0"이다.

이상에서 보는 바와 같이 이 논문은 진동형  $d\eta/d\xi (= \Psi)$ 와  $\eta$ 를 휨과 전단 회전각  $\theta$ 와  $\gamma$ 로 변수분리하여 유도하였다. 따라서 자유진동의 변위  $d\eta/d\xi$  및  $\eta$ 를  $d\eta/d\xi = \theta + \gamma$ 와  $\eta = \eta_\theta + \eta_\gamma$ 와 같이  $\theta$ 와  $\gamma$ 에 의한 구성성분들로 변수분리하여 산정할 수 있다.

Timoshenko 보의 진동형을 수직변위  $\eta$  및 전단면 회전 각  $\psi$ 뿐만 아니라 휨 모멘트  $M=EI(d^2\eta/d\xi^2-d\gamma/d\xi)$  및 전단력  $Q=kGA\gamma$ 의 진동형을 나타내기 위하여 합응력  $M, V$ 를 다음과 같이 정규화하였다.

$$m = \frac{M_x l}{EI_a} = f \frac{d\theta}{d\xi} = f \left( \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{d\gamma}{d\xi} \right) \quad (43)$$

$$q = \frac{Q_x l^2}{EI_a} = k\mu\lambda^2 f \gamma \quad (44)$$

### 3.3 경계조건

$x=0$  또는  $x=l$ 에서 보의 지점이 회전지점이면 수직변위  $y$  및 휨 모멘트  $M$ 이 발생하지 않으므로  $\xi=0$  또는  $\xi=1$ 에서 회전지점의 무차원 경계조건을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta = 0 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{d\gamma}{d\xi} &= \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - a_4(a_2 + a_3 C_i^2)^{-1} \\ &\times \left( \frac{d^3\eta}{d\xi^3} + a_4 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + a_5 C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$x=0$  또는  $x=l$ 에서 보의 지점이 고정지점이면 변위  $y$  및 전단면 회전각  $dy/dx$ 는 발생하지 않으므로  $\xi=0$  또는  $\xi=1$ 에서 다음과 같은 무차원 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\eta = 0 \quad (47)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (48)$$

이 연구에서 유도한 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식은 식 (41)에서 보는 바와 같이 4계 상미분방정식이다. 상미분방정식의 수치적분은 초기치 문제이므로 모두 4개의 경계조건을 알아야만 수치적분을 시행할 수 있다. 그러나 경계조건 식 (45), (46) 또는 식 (47),

표 1 수치적분을 위한 초기조건의 가정

• 좌측 회전지점 ( $\xi=0$ )

가정번호	$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$	$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$\eta$
(1)	1	$\frac{a_4}{a_2 + a_3 C_i^2 - a_4^2}$	0	0
(2)	2	0	$-\frac{2}{a_5 C_i^2}$	0

• 좌측 고정지점 ( $\xi=0$ )

가정번호	$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$	$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$\eta$
(1)	1	2	0	0
(2)	3	4	0	0

(48)에서 보는 바와 같이 2개의 경계조건만 주어져 있다. 따라서 나머지 2개의 경계조건을 식 (45)~(48)을 만족하는 범위 내에서 가정하여 수치적분을 시행하여야 한다. 이 연구에서는 표 1과 같이 지점조건 별로 선형결합에 적용하기 위하여 경계조건을 2조씩 가정하여 수치적분을 시행하였다 (David, 2006). 이 표에서 계수  $a_2, a_3, a_4, a_5$ 의 값들은 당연히  $\xi=0$ 에서의 값들이다.

## 4. 수치해석 예 및 토의

### 4.1 수렴해석 및 검증

변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식 (41)을 표 1의 경계조건에 적용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 변위들의 진동형  $\eta, \psi$ 와 합응력의 진동형  $m, v$ 를 계산할 수 있다. 상미분방정식 (41) 및 식 (42)의 수치적분은 Runge-Kutta 법(Carnahan 등, 1969)을 이용하였고, 미분방정식의 고유치인  $C_i$ 는 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법(Carnahan 등, 1969)을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 다수의 문헌들(이병구 등, 2002; Lee 등, 2008; 2011)에서 그 효율성이 입증되었다.

이상의 수치해석 과정을 이용하여 보의 변수들인 지점조건, 단면형상계수  $k$ , 탄성계수비  $\mu$ , 단면비  $r$ , 세장비  $\lambda$ 를 입력하면 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 진동형  $\eta, \theta, \gamma, m, q$ 를 계산할 수 있는 FORTRAN 컴퓨터 프로그램을 작성하였다.

이 연구에서 단면은 직사각형 단면이므로  $k=5/6$ 이고, 나머지 변수  $\mu, r, \lambda$ 는 변수연구에 사용하였다. 모드 번호는  $i=1, 2, 3, 4$ 의 제4모드까지 고유진동수 및 진동형을 산정하였다.

수치해의 정확도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 수치해의 정확도는 상미분방정식을 수치적분하기 위한 Runge-Kutta 법에서 단계길이  $\Delta\xi$ 와 밀접한 관계가 있다. 그림 4는 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 시간길이의 분할개수  $1/\Delta\xi$  사이의 관계를 나타낸다. 이 그림의 상단에 수치해석에 이용한 입력조건을 표시하였다. 이 그림에서와 같이  $C_i$ 는  $1/\Delta\xi=20$  즉,  $\Delta\xi=0.05$ 에서 충분한 정도로 수렴하였다. 이후의 수치해석에서는 정확도를 더욱 확보하기 위하여  $1/\Delta\xi=100$  즉,  $\Delta\xi=0.01$ 로 수치해석을 실시하였다. 이 경우에 수치해들은  $1/\Delta\xi=200$ 와 비교하여 유효숫자 3자리의 정확도를 갖는다.

이 연구의 이론을 검증하기 위하여 SAP 2000(박광규, 2002)의 고유진동수를 계산하여 비교하였다. SAP 2000의 고유진동수 계산에서 Timoshenko 보 이론을 적용하기 위하여 보 단면의 전단(剪斷)면적을 자유진동해석에 고려하였다.

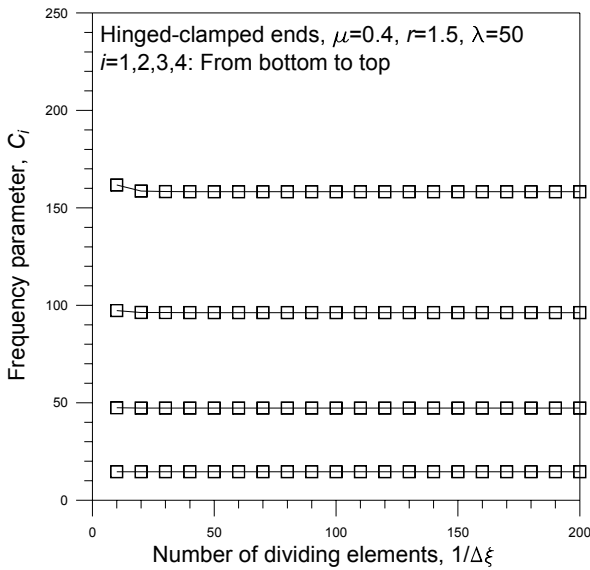


그림 4 수렴해석

검증에 사용한 보의 실차원 입력변수들은 다음과 같다.

- 시간간격:  $l=0.5\text{m}$
- 단면:  $h=0.02\text{m}$ ;  $d_a=0.02\text{m}$ ;  $d_m=0.03\text{m}$   
 $(A_a=4\times 10^{-4}\text{m}^2, I_a=1.333\times 10^{-8}\text{m}^4, k=5/6)$
- 재료(강):  $E=2\times 10^{11}\text{N/m}^2$ ;  $G=8\times 10^{10}\text{N/m}^2$ ;  $\rho=7850\text{Nsec}^2/\text{m}^4$
- 지점 조건: 회전-회전; 회전-고정; 고정-고정

위의 입력변수들을 식 (1), (23), (24), (32)의 무차원 변수식들에 적용하면 다음과 같이 무차원 입력변수들로 계산 된다.

- $\mu=0.4$ ;  $r=1.5$ ;  $\lambda=86.6$

이상의 무차원 입력변수들을 이용하여 무차원 고유진동수  $C_i$ 를 산정하였고, 식 (25)를 이용하면 다음과 같이  $C_i$ 를 고유진동수  $F_i(\text{Hz})$ 로 환산할 수 있다.

$$F_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{C_i}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI_a}{\rho A_a}} = 18.55 C_i \text{ Hz}$$

이 연구와 SAP 2000에서 계산한 고유진동수를 표 2에 수록하였다. 이 표에서와 같이 이 연구와 SAP 2000의 두 결과는 우수하게 근접하여 이 연구의 이론 및 수치해석 방법이 모두 타당함을 알 수 있었다.

## 4.2 변수연구

구조물의 자유진동 특성에 미치는 여러 가지 요인을 분석하여 그러한 특성을 구조물 설계에 반영하는 것은 매우 중요하다. 이 절에서는 보의 무차원 변수들이 무차원 고유진동수  $C_i$ 에 미치는 영향을 분석한다.

표 2 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수  $F_i$ 의 비교

지점 조건	자료출처	고유진동수 $F_i(\text{Hz})$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	이 연구	182.4	723.8	1610	2815
	SAP 2000	182.6	727.0	1625	2857
회전-고정	이 연구	272.8	895.9	1865	3150
	SAP 2000	272.3	895.4	1869	3169
고정-고정	이 연구	383.5	1088	2141	3506
	SAP 2000	381.3	1081	2129	3493

표 3 회전관성이 무차원 고유진동수  $C_i$ 에 미치는 영향

지점 조건	$E_R$	무차원 고유진동수 $C_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	0	9.79	38.47	84.33	144.65
	1	9.77	38.21	83.15	141.54
	감소율*	0.20	0.68	1.40	2.15
회전-고정	0	14.65	47.63	97.66	161.73
	1	14.63	47.29	96.26	158.24
	감소율*	0.14	0.71	1.43	2.16
고정-고정	0	20.62	57.89	112.08	179.85
	1	20.58	57.44	110.45	176.00
	감소율*	0.19	0.78	1.45	2.14

$$* \text{감소율}(\%) = (1 - C_{i, E_R=1} / C_{i, E_R=0}) \times 100$$

표 3은 회전관성이 무차원 고유진동수  $C_i$ 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표에서  $E_R$ 은 회전관성 지표이다. 회전관성을 무시하는 경우에  $E_R=0$ 이고, 고려하는 경우에  $E_R=1$ 이다.  $E_R=0$ 이면, 식 (40)의 계수들에서  $C_i^2/\lambda^2$ 이 회전관성 항이므로 계수들 중에서  $a_3, a_5$ 를  $a_3=0, a_5=1/k\mu\lambda^2$ 으로 대체하면 된다. 수치해석에서 적용한 무차원 입력변수들은  $\mu=0.4, r=1.5, \lambda=50$ 이다. 회전관성은  $C_i$ 를 감소시키는 요인이며, 그 영향력은 저차모드보다 고차모드에서 더 크다. 예를 들어 회전-회전 지점에서 제1모드는 영향력이 0.2%이지만 제4모드는 2.15%인 것을 알 수 있다.

표 4는 탄성계수비  $\mu$ 가 무차원 고유진동수  $C_i$ 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 여기서  $\mu=0.5$ 는 이론적으로 가장 큰 값을 나타낸다. 수치해석에서 적용한 무차원 입력변수 값들은 회전-고정 지점,  $r=1.5$ 이다.  $\mu$ 가 증가하면  $C_i$ 는 증가한다.  $\mu$ 가 증가하면 전단강성이 증가하므로  $C_i$  값이 더 커지는 것은 당연한 결과이다. 그 영향력은 저차모드에서 보다 고차모드에서 더 크고, 작은 세장비에서 더 크다. 예를 들어  $i=4$ 의 경우에  $\lambda=100$ 에서 증가율은 0.78%에 불과하지만  $\lambda=25$ 에서는 6.5%로 비교적 크다.

그림 5는  $C_i - r$ 의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림의 상단에 보의 입력변수를 나타내었다. 이 보의 지점조건은 고정-고정 보이므로 단면비  $r$ 이 증가함에 따라  $C_i$ 는 감소한다. 즉

표 4 탄성계수비  $\mu$ 가 무차원 고유진동수  $C_i$ 에 미치는 영향

$\lambda$	$\mu$	무차원 고유진동수 $C_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
25	0.35	14.27	43.21	81.51	124.53
	0.40	14.32	43.67	83.02	127.75
	0.45	14.35	44.03	84.25	130.40
	0.50	14.38	44.33	85.27	132.63
	증가율*	0.77	2.59	4.61	6.50
50	0.35	14.61	47.13	95.62	156.59
	0.40	14.63	47.29	96.26	158.24
	0.45	14.64	47.41	96.76	159.26
	0.50	14.64	47.50	97.17	160.64
	증가율*	0.21	0.79	1.62	2.59
100	0.35	14.71	48.36	100.90	170.87
	0.40	14.71	48.40	101.09	171.42
	0.45	14.71	48.43	101.23	171.85
	0.50	14.71	48.46	101.35	172.20
	증가율*	0.00	0.21	0.45	0.78

\* 증가율 (%) =  $(C_{i, \mu=0.50} / C_{i, \mu=0.35} - 1) \times 100$

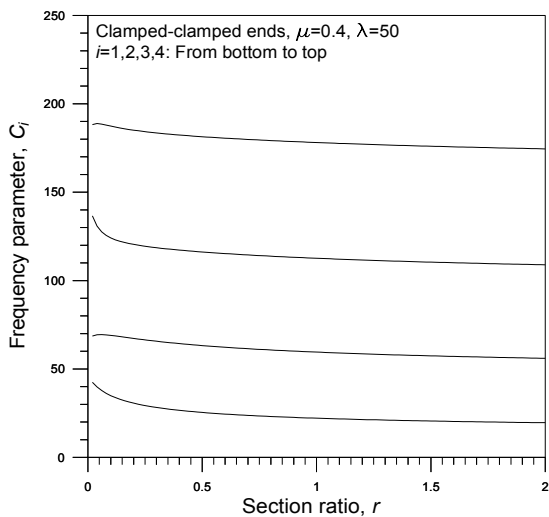


그림 5  $C_i - r$ 의 고유진동수 곡선

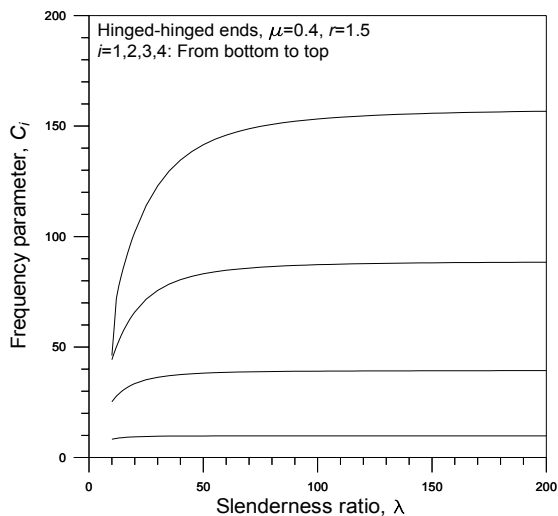


그림 6  $C_i - \lambda$ 의 진동수 곡선

$r$  값이 작을수록 고정단의 강성이 더 커지므로  $C_i$ 는 더 커진다. 정적 구조해석에서 고정단의 강성이 더 큰 보가 더 큰 하중 능력을 보여주는 결과와 같은 구조적 특성을 보인다.

그림 6은  $C_i - \lambda$ 의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림의 상단에 보의 입력변수를 나타내었다. 세장비  $\lambda$ 가 증가함에 따라  $C_i$ 는 증가한다.  $\lambda$ 가 0에 수렴하면 무한강성을 갖게 되어 모든 고유진동수 곡선은 "0" 고유진동수에 수렴하는 것을 알 수 있다.

### 4.3 진동형

공용 중인 구조물의 유지관리에서 진동형의 특성은 매우 실용적인 동적 자료로 활용될 수 있기 때문에 자유진동해석에서 진동형의 특성파악은 중요하다. 그림 7은 수직변위  $\eta$ 와 전단면 회전각  $\psi$ 의 진동형 및 휨 모멘트  $m$ 과 전단력  $q$ 의 진동형을 나타낸다. 이 그림에서 ■로 표시한 최대진폭의 위치를 파악할 수 있어 피로현상에 대비한 동적 자료로 활용할 수 있다. 이 그림에 ▲로 표시한 제2모드의 무변위 위치 (nodal point)에 적당하게 횡방향 변위를 구속하면  $C_2 =$

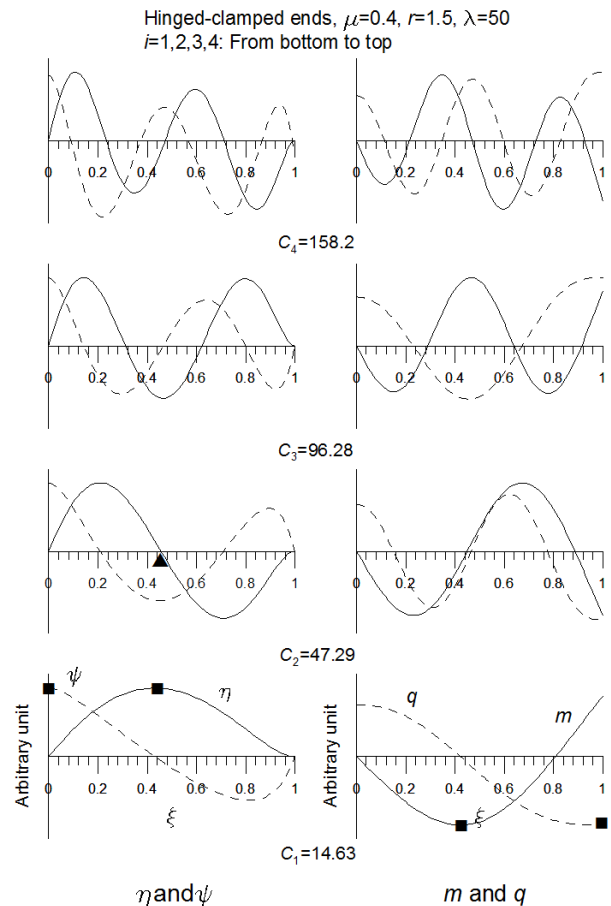


그림 7 진동형의 예



표 5 수직변위  $\eta$  및 전단면 회전각  $\psi$ 의 휨 회전각  $\theta$ 와 전단변형  $\gamma$ 에 의한 구성비율

· 최대진폭에서 비율

i	$\eta$ 의 $\eta_\theta$ 및 $\eta_\gamma$ 비율			$\psi$ 의 $\theta$ 및 $\gamma$ 비율		
	위치 $\xi$	$\eta_\theta$ (%)	$\eta_\gamma$ (%)	위치 $\xi$	$\theta$ (%)	$\gamma$ (%)
1	0.42	98.18	1.82	0.00	97.79	2.21
2	0.68	96.85	3.15	0.00	93.24	6.76
3	0.78	89.55	10.45	0.00	87.51	12.49
4	0.83	89.34	10.66	0.00	81.04	18.96

· 보 중앙( $\xi=0.5$ )에서 비율

i	$\eta$ 의 $\eta_\theta$ 및 $\eta_\gamma$ 비율			$\psi$ 의 $\theta$ 및 $\gamma$ 비율		
	$\eta^*$	$\eta_\theta$ (%)	$\eta_\gamma$ (%)	$\psi^*$	$\theta$ (%)	$\gamma$ (%)
1	0.963	98.25	1.75	0.243	97.16	2.84
2	0.343	97.06	2.94	0.881	95.02	4.98
3	0.800	91.48	8.52	0.334	89.76	10.24
4	0.328	75.65	24.35	0.792	83.20	16.80

\*최대진폭을 1로 하였을 때의 상대진폭

47.29의 제2고유진동수가  $C_1=14.63$ 의 제1고유진동수를 대신하게 되어 제1고유진동수를 크게 증가시킬 수 있다. 합응력  $m, q$ 의 진동형에서도 ■로 표시한 최대 휨 모멘트 및 최대 전단력의 위치를 파악할 수 있어 구조물 유지관리에 실용적인 동적 자료로 활용할 수 있다.

표 5는 최대진폭과 보 중앙( $\xi=0.5$ )에서 수직변위  $\eta$  및 전단면 회전각  $\psi$ 의 휨 회전각  $\theta$ 와 전단변형  $\gamma$ 에 의한 구성비율(%)을 나타낸다. 이러한 구성비율은 식 (34), (37), (42)를 이용하면  $\theta$ 와  $\gamma$ 에 의한 구성비율로 구분하여 산정할 수 있다. 수치해석에 사용한 보의 입력변수는 그림 7과 같다. 이 표에는 최대진폭과 보의 중앙에서  $\eta$ 와  $\psi$ 의  $\theta$ 와  $\gamma$ 에 의한 구성비율을 표시하였다. 참고로 이 표에 최대진폭의 발생위치를 표시하였고  $\psi$ 의 최대진폭의 위치는 모드번호  $i$ 에 상관없이 모두  $\xi=0$  즉 회전 지점에서 발생하였다. 이 표에서 보는 바와 같이  $\eta$  및  $\psi$ 의 최대진폭의 구성비율은 모두  $\theta$ 에 의한 구성비율이  $\gamma$ 에 의한 구성비율보다 크다. 그러나  $i$ 가 증가할수록  $\gamma$ 에 의한 구성비율이 더 커지는 것을 알 수 있다. 예로서 최대진폭  $\eta$ 의 경우에  $i=1$  모드에서  $\gamma$ 에 의한 구성비율은 1.82%에 불과하지만  $i=4$  모드에서는 그 영향력이 10.66%로 크게 증가한다. 보 중앙의 경우에  $\eta^*, \psi^*$ 는 최대진폭을 "1"로 하였을 때 상대진폭의 크기이다. 이 경우에도 상대진폭의 구성비율은 모두  $\theta$ 에 의한 구성비율이 크지만  $i=4$  모드의  $\eta^*$ 의 경우에는  $\gamma$ 에 의한 구성비율이 24.35% 매우 큰 비중임을 알 수 있다. 따라서 Timoshenko 보 이론으로 회전관성과 전단변형을 동시에 고려하여 정확한 고유진동수를 산정하는 것이 바람직하다.

### 5. 결 론

이 연구는 회전관성과 전단변형을 동시에 고려한 변단면

Timoshenko 보의 자유진동에 관한 연구이다. 보의 변단면은 폭이 포물선 함수로 변화하는 직사각형 단면으로 채택하였다. 이러한 보의 자유진동을 지배하는 수직변위에 대한 4계 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다.

이 연구의 수치해석 결과를 분석하여 다음의 결과를 얻었다.

- ① 변단면 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 수직변위에 대한 4계 상미분방정식을 유도하였다.
- ② 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수는 근접하여 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다.
- ③ 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이며 저차모드에서 보다 고차모드에서 그 영향력은 더 크다.
- ④ 탄성계수비가 증가하면 고유진동수는 증가하며 고차모드에서 그리고 더 큰 세장비에서 그 영향력은 더 크다.
- ⑤ 진동형의 진폭에 대한 구성은 휨 회전각에 의한 구성비율이 전단변형에 의한 구성비율보다 더 크다.
- ⑥ 진동형의 진폭에 대한 전단변형의 영향은 저차모드에서 보다 고차모드에서 훨씬 더 크다.
- ⑦ 이상의 결과로부터 Timoshenko 보 이론을 이용하여 보다 정확한 고유진동수를 산정하는 것이 중요함을 알 수 있었다.

이 연구에서와 같이 Timoshenko 보의 자유진동을 수직변위에 대한 4계 상미분방정식으로 유도하는 것은 식 (26)~(41)의 과정에서 보인 바와 같이 매우 복잡한 것을 알 수 있다. 따라서 이 과정을 생략하고 변위분리에 의한 연립 상미분방정식으로 Timoshenko 보의 자유진동을 해석할 수 있는 수치해석이 후속 연구과제로 필요하다고 생각한다.

### 참 고 문 헌

박광규 (2002) 토목구조설계를 위한 SAP 2000, 성안당, 대한민국.

이병구, 최규문, 이태은, 김무영 (2002) 미분구적법을 이용한 탄성지반 위에 놓인 변단면 압축부재의 자유진동해석, 한국전산구조공학회 논문집, 15(4), pp.629~938.

Bercin, A.N., Tanaka, M. (1997) Coupled Flexural-torsional Vibrations of Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 207, pp.47~59.

Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.O. (1969) *Applied Numerical Methods*, John Wiley and Sons, USA.

David C. (2006). *Linear Algebra and Its Applications* (3rd ed.). Addison-Wesley, USA.

Lee, B.K., Oh, S.J., Mo, J.M., Lee, T.E. (2008)

- Out-of-plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Curvature, *Journal of Sound and Vibration*, 318, pp.227~246.
- Lee, B.K., Lee, T.E., Choi, J.M.** (2011) Dynamic Optimal Arches with Constant Volume, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Accepted for Publication in September, 2011.
- Li, J., Li, X., Hua, H.** (2009) Free Vibration Analysis of Third-order Shear Deformable Composite Beams using Dynamic Stiffness Method, *Archive of Applied Mechanics*, 79, pp.1083~1098.
- Li, J., Shen, R., Hua, H., Jin, X.** (2004) Coupled Bending and Torsional Vibration of Axially Loaded Thin-walled Timoshenko Beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46, pp.299~320.
- Loya, J.A., Rubio, L., Fernandes-Saez, J.** (2006) Natural Frequencies for Bending Vibrations of Timoshenko Cracked Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 290, pp.640~653.
- Sapountzakis, E.J., Dourakopoulos, J.A.** (2009) Nonlinear Dynamics Analysis of Timoshenko Beam by BEM, *Nonlinear Dynamics*, 58, pp.307~318.
- Takahashi, I.** (1999) Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timshenko Beam Subjected to Follower Force, *Computers & Structures*, 71, pp.585~591.
- Timoshenko, S.P., Young, D.H., Weaver, W.** (1974) *Vibration Problems in Engineering*, Wiley, USA.
- Viola, E., Ricci, P., Aliabadi, M.H.** (2007) Free Vibration Analysis of Axially Loaded Cracked Timoshenko Beam Structures using the Dynamic Stiffness Method, *Journal of Sound and Vibration*, 304, pp.124~153.
- Yardimoglu, B., Yildirim, T.** (2004) Finite Element Model for Vibration Analysis of Pre-twisted Timoshenko Beam, *Journal of Sound and Vibration*, 273, pp.741~754.
- Zhong, H., Guo, Q.** (2003) Nonlinear Vibration of Timoshenko Beams using the Differential Quadrature Method, *Nonlinear Dynamics*, 32, pp.223~234.
- Zhou, D.** (2000) Free Vibration of Multi-span Timoshenko Beams using Static Timoshenko Beam Functions, *Journal of Sound and Vibration*, 241(4), pp.725~734.

- 논문접수일 2011년 11월 23일
- 논문심사일  
1차 2011년 12월 11일  
2차 2012년 5월 3일
- 게재확정일 2012년 6월 5일