

인장 하중을 받는 무한 고체에 포함된 다수의 다이아몬드 형 함유체 문제 해석을 위한 체적 적분방정식법

이 정 기*†

* 홍익대학교 기계정보공학과

Volume Integral Equation Method for Problems Involving Multiple Diamond-Shaped Inclusions in an Infinite Solid under Uniaxial Tension

Jung-Ki Lee*†

* Dept. of Mechanical and Design Engineering, Hongik Univ.

(Received August 9, 2011 ; Revised September 22, 2011 ; Accepted September 27, 2011)

Key Words: Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계 요소법), Finite Element Method(유한요소법), Diamond-Shaped Inclusion(다이아몬드 형 함유체), Infinite Solid(무한 고체), Fiber Volume Fraction(섬유 체적분율)

초록: 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 등방성 또는 이방성 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 또는 이방성 다이아몬드 형 함유체의 중심이 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에, 다양한 다이아몬드 형을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 대하여, 중앙에 위치한 다이아몬드 형 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사하였다. 또한, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하기 위하여, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 유한요소법을 이용한 해와 비교해 보았다.

Abstract: A volume integral equation method (VIEM) is introduced for the solution of elastostatic problems in unbounded isotropic elastic solids containing multiple interacting isotropic or anisotropic diamond-shaped inclusions subject to remote uniaxial tension. The method is applied to two-dimensional problems involving long parallel diamond-shaped cylindrical inclusions. A detailed analysis of the stress field at the interface between the matrix and the central inclusion is carried out for square and hexagonal packing of the inclusions. The effects of the number of isotropic or anisotropic diamond-shaped inclusions and of the various fiber volume fractions for the circular inclusions circumscribing its respective diamond-shaped inclusion on the stress field at the interface between the matrix and the central inclusion are also investigated in detail. The accuracy and efficiency of the method are examined through comparison with results obtained using the finite element method.

1. 서론

다양한 형태의 복합재료가 발달함에 따라, 원형 및 타원을 비롯한 다양한 형태의 함유체에서 발생하는 응력 성분을 정확하게 조사하려는 연구가 많은 연구자들에 의하여 진행되고 있다.

왜냐하면, 원형 또는 타원을 비롯한 다양한 형태의 등방성 함유체 또는 이방성 함유체에서 발

생하는 응력 집중 현상으로 인하여, 복합재료에 균열이 발생하고, 전파되어, 결국 복합재료가 파손에 이르게 되기 때문이다.

그러므로, 복합재료에서의 파손 메카니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 다양한 형태의 등방성 함유체 또는 이방성 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성 해석이 기본적으로 필요하게 된다.

단일 또는 다수의 원형 또는 타원 함유체를 포함하는 무한 고체에서의 탄성해석에 관한 연구는

† Corresponding Author, inq3ikl@wow.hongik.ac.kr

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

Eshelby,⁽¹⁾ Hashin,⁽²⁾ Achenbach와 Zhu,⁽³⁾ 그리고 Lee와 Mal⁽⁴⁾ 외 여러 연구자들⁽⁵⁻⁸⁾에 의하여 연구되었다. 또한, 원형 또는 타원 함유체 이외의 다양한 형태의 함유체 또는 공동을 포함하는 무한 또는 반무한 고체에서의 탄성해석에 관한 연구도 Jasiuk,⁽⁹⁾ Noda 외,⁽¹⁰⁾ 그리고 Rodin⁽¹¹⁾ 등 많은 연구자들⁽¹²⁻²⁰⁾에 의하여 연구되었다. 특히, Nakasone 외⁽¹³⁾와 Nozaki 외⁽¹⁴⁻¹⁶⁾는 Numerical Equivalent Inclusion Method(NEIM)이라는 새로운 해석 방법을 이용하여 다양한 형태의 함유체 문제에 관한 연구를 수행하였고, Dong 외⁽¹⁷⁾는 3차원 체적 적분방정식법을 이용하여 다양한 형태의 함유체 문제에 관한 연구를 수행하였으며, Chen과 Ping⁽¹⁹⁾는 하이브리드 유한요소법을 이용하여 직사각형 함유체 문제에 관한 연구를 수행하였다.

본 논문에서는, 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 등방성 또는 이방성 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 또는 이방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 중앙에 위치한 등방성 또는 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 정량적으로 조사하였다. 본 논문에서 함유체의 체적비(c)는 다이아몬드 형 실린더 함유체의 체적비가 아니라, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체에 대한 체적비를 의미한다.

특히, 이전의 논문⁽²¹⁾에서는 다수의 원형 실린더 함유체 문제 해석에 대하여 고려해 보았는데, 단일의 원형 실린더 함유체 문제의 경우에 해석해가 존재하므로, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 비교적 쉽게 검증할 수 있었다. 그러나, 본 논문에서 다루고 있는 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제의 경우에는, 단일의 함유체 문제의 경우라도 해석해를 쉽게 구할 수 없는 경우가 된다.

끝으로, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가 벤치마킹(benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것이다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다.

여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 등방성 또는 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $c^{(1)}_{ijkl}$ 은 함유체의 탄성상수를 나타내고, $c^{(2)}_{ijkl}$ 는 기지의 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

Lee와 Mal⁽⁴⁾은 다수의 등방성 또는 이방성 함유체를 포함하는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta c_{ijkl} = c^{(1)}_{ijkl} - c^{(2)}_{ijkl}$ 이며 등방성 또는 이방성 함유체와 등방성 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $u_m^o(\mathbf{x})$ 는 무한 하중에 대한 변위를 나타내며, $g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이다. 즉, $g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지의 \mathbf{x} 에서 m 방향으로 작용하는 단위 집중하중 e_m 때문에 $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i 방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 ξ_i 에 관해서 행해진다. 여기서, δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.⁽⁴⁾

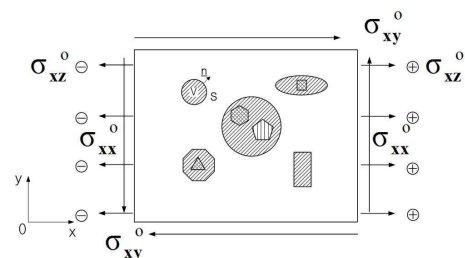


Fig. 1 Geometry of the general elastostatic problem

무한고체에 균일한 무한 하중이 작용할 때, $u^0_m(\mathbf{x})$ 는 다음과 같은 형태로 나타내며, 함유체의 개수와는 무관하다.

$$u^0_1 = a_1x, u^0_2 = a_2y, u^0_3 = a_3x + a_4y \quad (2)$$

여기서, 상수 a_1 - a_4 는 무한 하중의 인장 및 전단 성분에 따라 결정된다.

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal^(4,23)에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 변위, 변형률 및 응력도 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움 없이 계산할 수 있다. 식 (1)에서 g^m 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이므로, 비록 함유체가 이방성 재료로 이루어진다 할지라도, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다. 그런데, 일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다.⁽²⁴⁾

등방성 무한기지에 다수의 등방성 원형 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal^(4,23)에 잘 나타나 있다. 특히, Buryachenko의 전공 서적인 "Micromechanics of heterogeneous materials"⁽²⁵⁾의 '4.3절 Volume Integral Equation Method'에 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 설명이 나와 있다.

3. 다수의 함유체 문제

Fig. 2와 Fig. 3에 있는 다수의 등방성 또는 직

교 이방성 다이아몬드 형 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체(Fig. 2에 점선으로 표시)의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 늘려가면서, 중앙에 위치한 다이아몬드 형 함유체에서의 응력분포 변화를 조사하였다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.^(4,25) 왜냐하면, 1) 경계요소법과 달리, 모든 경계면에서의 연속 조건이 자동적으로 만족하고, 함유체 내부를 유한요소를 사용하여 요소 분할하므로 임의의 형상을 갖는 함유체를 해석할 때 도 전혀 어려움이 없게 되며, 2) 유한요소법과 달리, 무한공간을 이루고 있는 기지는 요소분할할 필요가 없이, 함유체 내부만을 요소분할하면 되기 때문이다. 특히, 3) 함유체의 체적비가 변화할 때, 기지를 요소분할할 필요가 없이 함유체의 위치만 변경하면 되므로, 체적 적분방정식법 모델링을 매우 효율적으로 수행할 수 있게 된다.

3.1 등방성 무한 기지에서의 탄성정역학 Green 함수

식 (1)에서 등방성 무한기지에 대한 Green 함수⁽²⁶⁾는 다음과 같이 주어진다.

$$g^{\beta}_{\alpha} = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[-\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \ln r \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (3)$$

여기서, $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$, $\alpha, \beta = 1, 2$ 그리고 λ, μ 는 등방성 무한기지에서의 Lamé 상수를 나타낸다.

3.2 다수의 등방성 다이아몬드 형 함유체 중심의 배열이 정사각형(square) 형태일 때

다수의 등방성 다이아몬드 형 함유체의 중심이 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.(Fig. 2)

우선, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확도를 검증하기 위하여, 단일의 등방성 다이아몬드 형 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 경우에 함유체 내부에서의 응력분포를 조사하였다.

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic and orthotropic diamond-shaped inclusion for the elastostatic problems

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Isotropic	Orthotropic
λ	67.34	176.06	-
μ	37.88	176.06	-
c_{11}	143.10	528.18	279.08
c_{12}	67.34	176.06	7.80
c_{22}	143.10	528.18	30.56
c_{66}	37.88	176.06	11.80

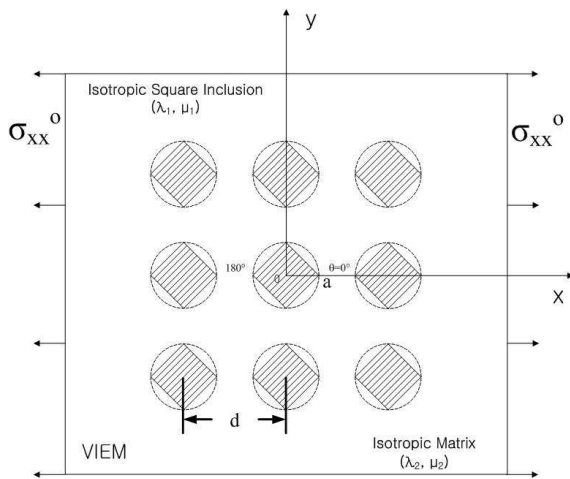


Fig. 2 Multiple isotropic square (diamond-shaped) cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

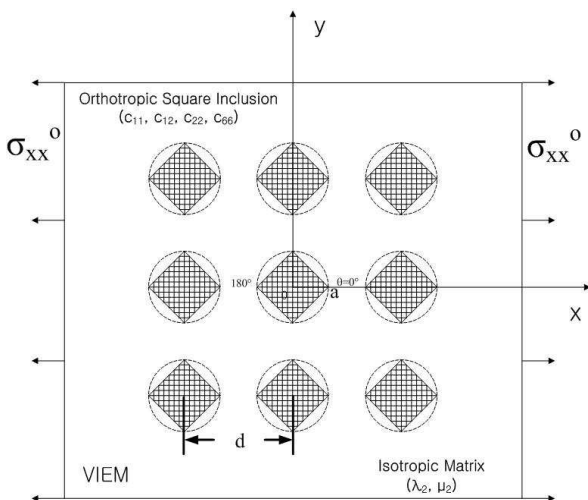


Fig. 3 Multiple orthotropic square (diamond-shaped) cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

다음에, 다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호 작용을 조사하기 위하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 다이아몬드 형 함유체에서의 응력 분포 변화를 조사하였다.

등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 등방성 함유체의 Lamé 상수가 등방성 기지의 Lamé 상수보다 큰 경우를 고려해 보았다.

Table 2는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)/다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다. 예를 들어, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.40인 경우에, 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)는 2.8025a가 된다. 여기서, a는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 4는 단일의 등방성 다이아몬드 형 함유체 해석을 위하여 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽²⁷⁾의 예를 나타내며, 함유체 내부를 289개의 표준의 8-절점 사각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

단일의 원형 또는 타원 실린더 함유체 문제의 경우에는 해석해가 존재하지만, 다이아몬드 형 함유체 문제의 경우에는 단일의 함유체 문제라도 해석해를 쉽게 구할 수 없다.^(10,15,16) 따라서, ADINA⁽²²⁾라는 상업용 유한요소법 코드를 이용하여 단일의 다이아몬드 형 함유체 문제에 대한 수치해석 해를 구하여, 체적 적분방정식법을 이용한 해와 비교함으로써, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확도를 검증하려는 노력을 하였다.

Fig. 5는 ADINA에 사용된 유한요소법 모델의 예(Model A)를 나타낸다. Fig. 5(a)는 전체 모델을 나타내고, (b)는 다이아몬드 형 함유체(Ⓐ로 표시)의 주위를 확대한 모델을 나타내며, (c)는 다이아몬드 형 함유체(Ⓐ로 표시)의 근처를 한번 더 확대한 모델을 나타낸다. Fig. 5에 사용된 8개의 절점을 갖는 사각형 요소의 개수는 585,000개이다. 다이아몬드 형 함유체와 기지의 경계면에서의 정확한 응력분포를 구하기 위하여, 매우 세밀한

(refined) 유한요소들을 사용하여 요소 분할하였다. 또한, 무한공간을 충분히 고려하기 위하여, 한 변의 길이가 다이아몬드 형 함유체의 대각선 길이의 약 15배가 되는 정사각형이 무한 공간의 경계가 되도록 하였다. 한편, ADINA에 사용된 다른 유한요소법 모델인 Model B에는 260,000개의 8개의 절점을 갖는 사각형 요소가 사용되었으며, Model C에는 65,000개의 8개의 절점을 갖는 사각형 요소가 사용되었다. 즉, 가장 세밀한 요소가 사용된 유한요소법 모델이 Model A가 된다.

Fig. 6은 단일의 등방성 다이아몬드 형 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma^0_{xx}$)에 대한 체적 적분방정식법에 의한 해와 ADINA를 이용한 해와의 비교를 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 단일의 원형 또는 타원 등방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 되지만⁽²⁸⁻³²⁾, 다이아몬드 형 함유체 내부에서는 $\theta = 180^\circ(0^\circ, 360^\circ)$ 일 때 인장응력 성분이 최대가 되고, $\theta = 90^\circ(270^\circ)$ 일 때 인장응력 성분이 최소가 되는 것을 확인할 수 있었다.^(10,15,16)

체적 적분방정식법에 의한 해와 서로 다른 3가지 모델을 사용한 ADINA를 이용한 해를 비교해보았을 때, 가장 세밀한 요소가 사용된 Model A를 이용하여 구한 ADINA의 해와 체적 적분방정식법을 이용한 해가 가장 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 여기서 주의할 점은, ADINA를 이용한 해에서, 경계면의 각 절점에서의 응력성분은 각 절점에서의 응력성분이 아니라, 경계면에 접한 매우 세밀한 유한요소들의 각 절점에서의 평균 응력 성분임을 밝혀둔다.

Fig. 4의 체적 적분방정식법 모델과 Fig. 5에 있는 유한요소법 모델을 비교해보면, 체적 적분방정식법에 사용되는 모델이 매우 효율적임을 확인할 수 있다. 그 이유로는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 다이아몬드 형 함유체의 체적비(c)가 바뀌어도, 함유체의 위치만 변경하면 되기 때문이다.

다음으로, Fig. 7은 다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽²⁷⁾의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 289개의 표준의 8-절점 사각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Fig. 8은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 다이아몬드 형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma^0_{xx}$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 동일한 함유체의 체적비에 대하여, 등방성 다이아몬드 형 함유체의 개수가 증가하여도 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma^0_{xx}$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma^0_{xx}$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 타원 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.⁽²¹⁾

Fig. 9는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 원형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 원형 함유체와 등방성

Table 2 Fiber separation distances according to different fiber volume fractions

Fiber volume fraction (c)*	Fiber separation distance (d) / Radius of circular inclusion (a)**	
	Square array	Hexagonal array
0.20	3.9633	4.2589
0.30	3.2360	3.4774
0.40	2.8025	3.0115
0.50	2.5066	2.6935

* Fiber volume fraction (c) of circular inclusion circumscribing its respective diamond-shaped inclusion (Figs. 2, 3)

** Radius of circular inclusion circumscribing its respective diamond-shaped inclusion (Figs. 2, 3)

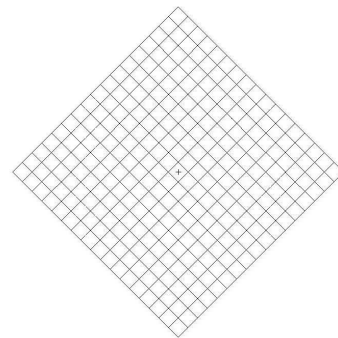
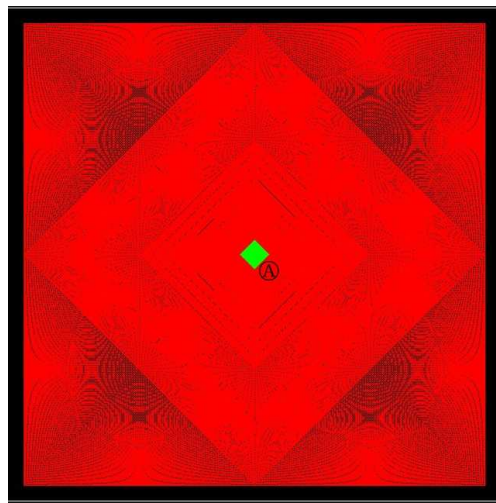
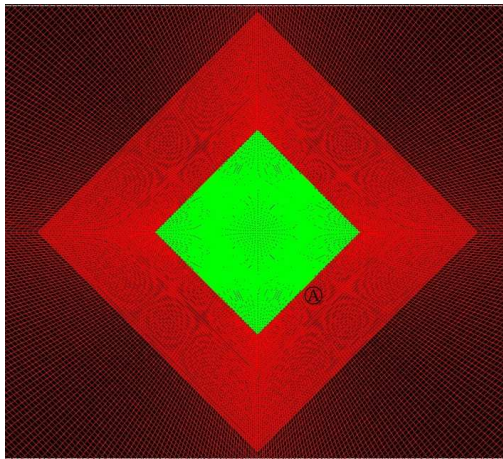


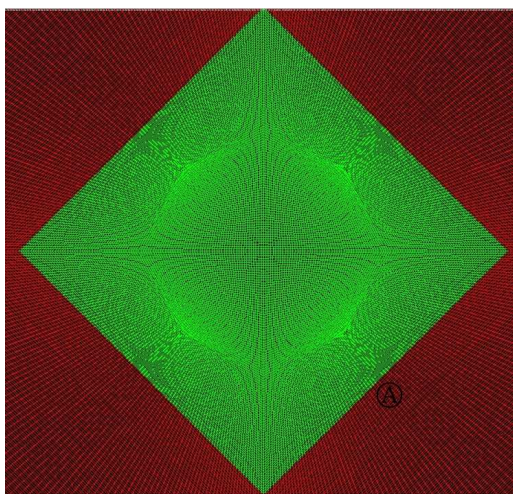
Fig. 4 A typical discretized model in the volume integral equation method



(a)



(b)



(c)

Fig. 5 A typical discretized model (Model A) in the finite element method for a single square (diamond-shaped) cylindrical inclusion

기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 다수의 원형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과와 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과를 비교해 보았을 때, 등방성 원형 함유체에서 발생하지 않았던 응력집중 현상이 등방성 다이아몬드 형 함유체에서는 발생하였으며, 다이아몬드 형 함유체에 발생한 최대 응력값이 원형 함유체에 발생한 최대 응력값보다 훨씬 크게 나타났음을 알 수 있다.⁽²¹⁾

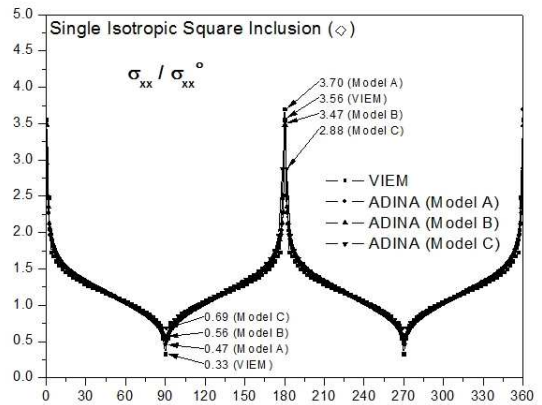


Fig. 6 Comparison of volume integral equation method and ADINA solutions for normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the single isotropic square (diamond-shaped) inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

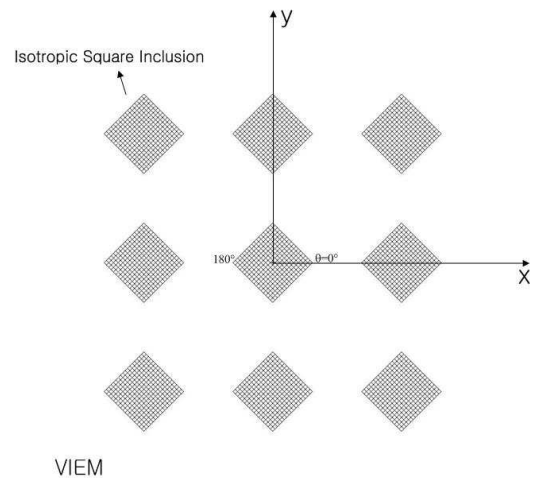
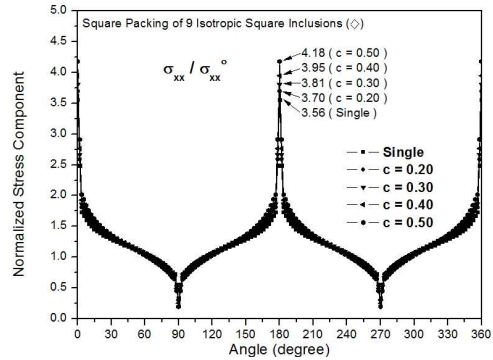
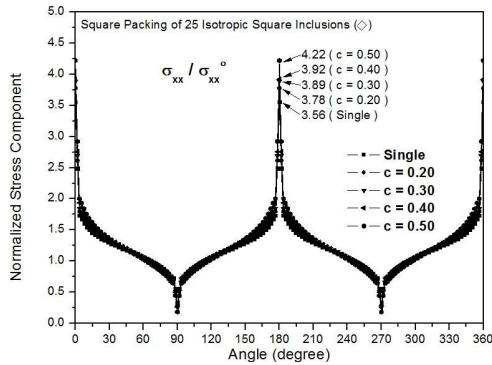


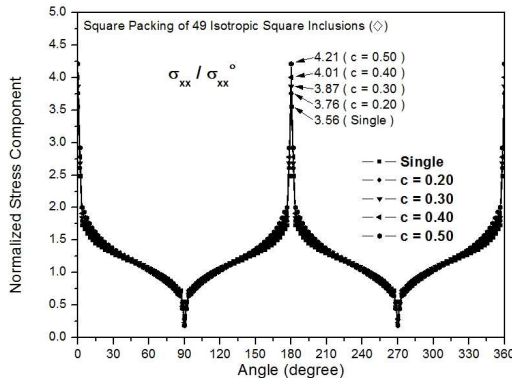
Fig. 7 A typical discretized model in the volume integral equation method for square inclusion packing array



(a)

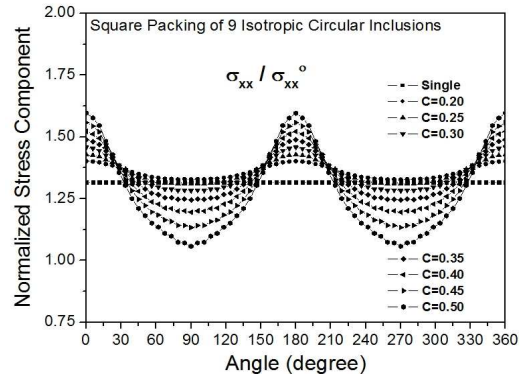


(b)

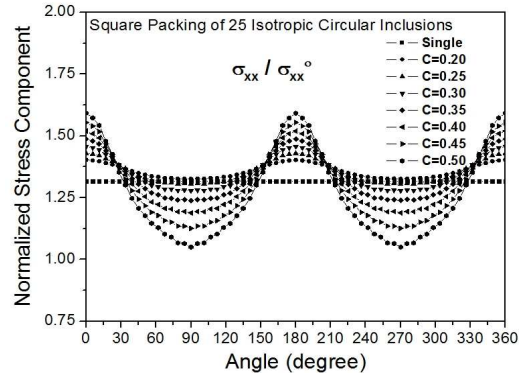


(c)

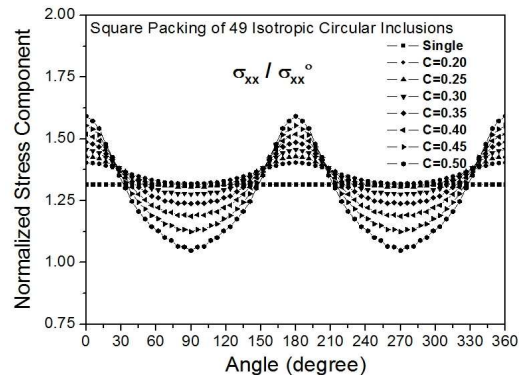
Fig. 8 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic square (diamond-shaped) inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading



(a)



(b)



(c)

Fig. 9 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic circular inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

3.3 다수의 등방성 다이아몬드 형 함유체 중심의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다음에는, 다수의 등방성 다이아몬드 형 함유체의 중심이 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 다이아몬드 형 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의

변화를 조사하였다. 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)/다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다. 예를 들어, 함유체의 체적비(c)가 0.3인 경우에, 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)는 3.4774a가 된다. 여기서, a는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 10은 다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽²⁷⁾의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 289개의 표준의 8-절점 사각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Fig. 11은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 다이아몬드 형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 등방성 다이아몬드 형 함유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 등방성 다이아몬드 형 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.⁽²¹⁾

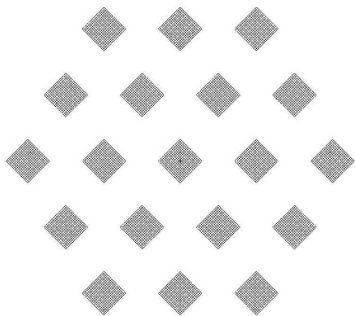


Fig. 10 A typical discretized model in the volume integral equation method for hexagonal inclusion packing array

Fig. 12는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 원형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 원형 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 다수의 원형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과와 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과를 비교해 보았을 때, 등방성 원형 함유체에서 발생하지 않았던 응력집중 현상이 등방성 다이아몬드 형 함유체에서는 발생하였으며, 다이아몬드 형 함유체에 발생한 최대 응력값이 원형 함유체에 발생한 최대 응력값보다 훨씬 크게 나타났음을 알 수 있다.⁽²¹⁾

3.4 다수의 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체 중심의 배열이 정사각형(square) 형태일 때

이번에는, 다수의 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체의 중심이 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.(Fig. 3)

다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 다이아몬드 형 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 큰 경우를 고려해 보았다.

Table 2는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)/다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다.

Fig. 7은 다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽²⁷⁾의 예를 나타낸다.

Fig. 13은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 다이아몬드 형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

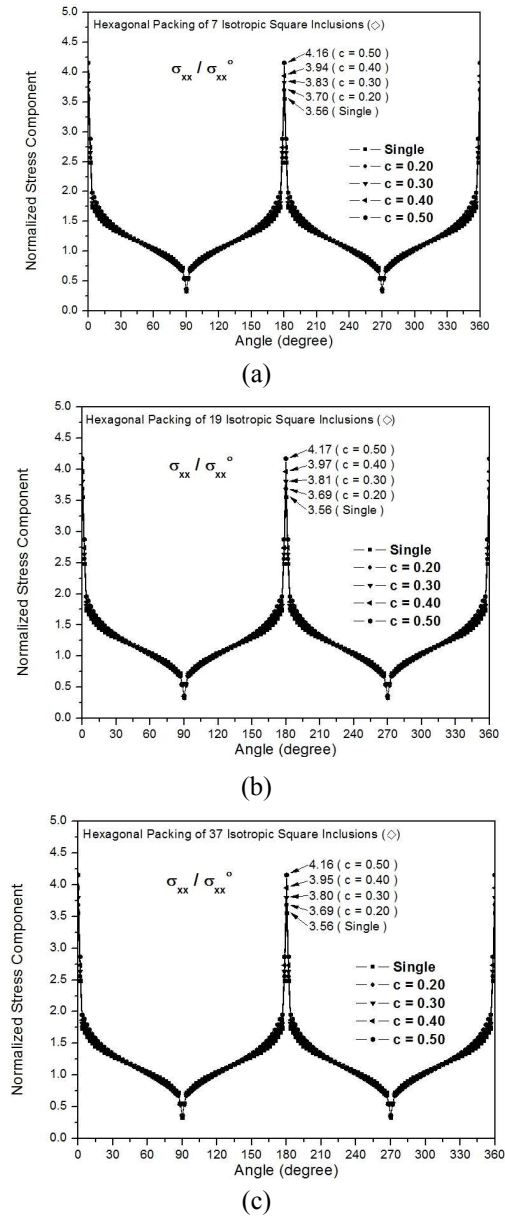


Fig. 11 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic square (diamond-shaped) inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다.

그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용

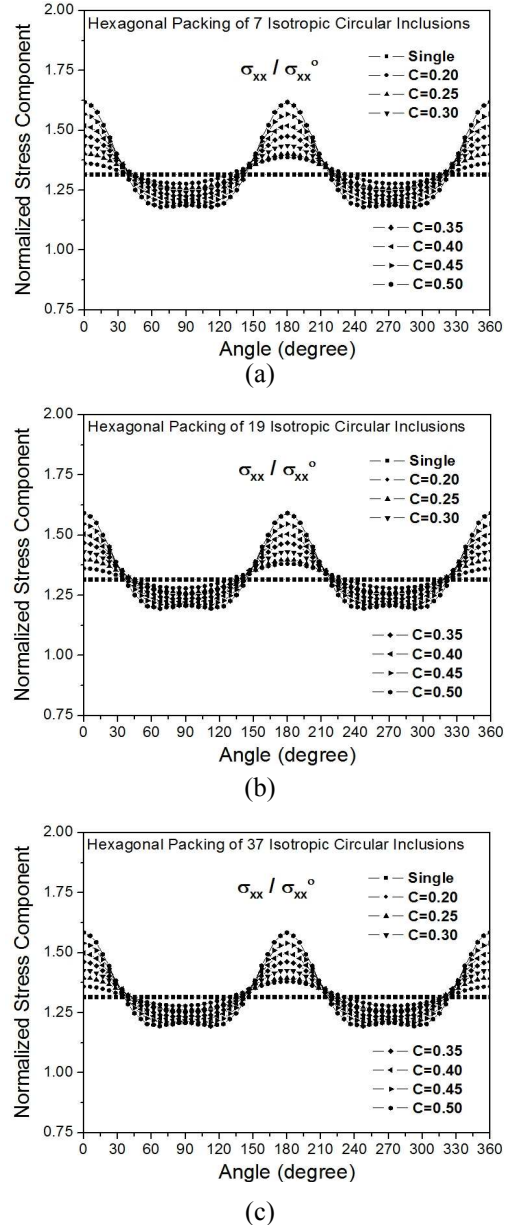


Fig. 12 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic circular inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

이 커지기 때문으로 판단된다.

직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이, Section 3.3의 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로 작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

다수의 원형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결

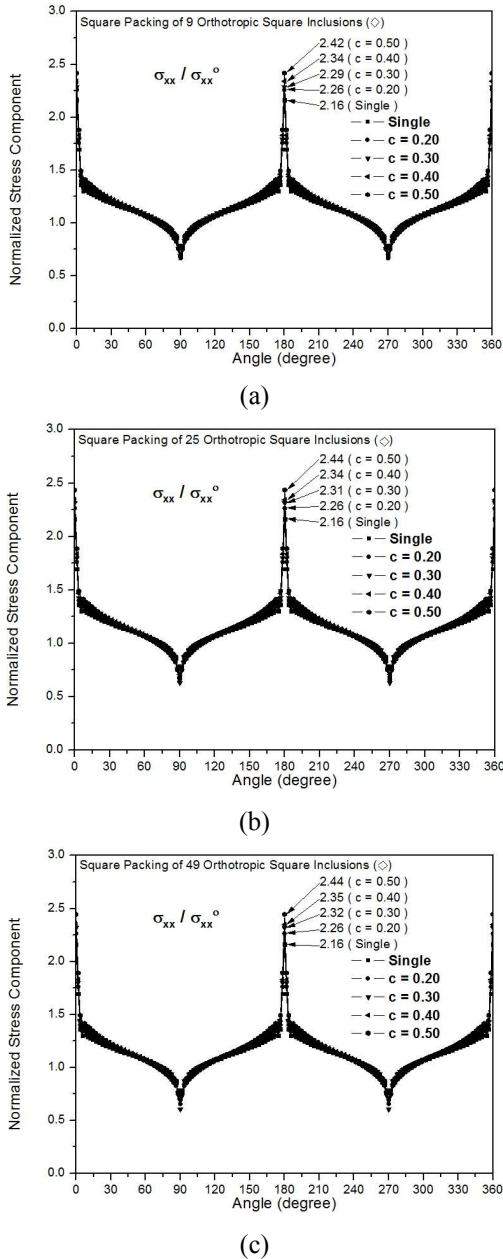


Fig. 13 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$) at the interface between the central orthotropic square (diamond-shaped) inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

과와 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과를 비교해 보았을 때, 직교 이방성 원형 함유체에서 발생하지 않았던 응력집중 현상이 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체에서는 발생하였으며, 다이아몬드 형 함유체에 발생한 최대 응력값이 원형 함유체에 발생한 최대 응력값보다 훨씬 크게 나타났음을 알 수 있었다.⁽²¹⁾

3.5 다수의 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체 중심의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다음에는, 다수의 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체의 중심이 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

다수의 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 다이아몬드 형 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 다이아몬드 형 함유체 중심 사이의 거리(d)/다이아몬드 형 함유체를 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다.

Fig. 10은 다수의 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽²⁷⁾의 예를 나타낸다. Fig. 14는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 다이아몬드 형 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.

직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이, Section 3.3의 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로

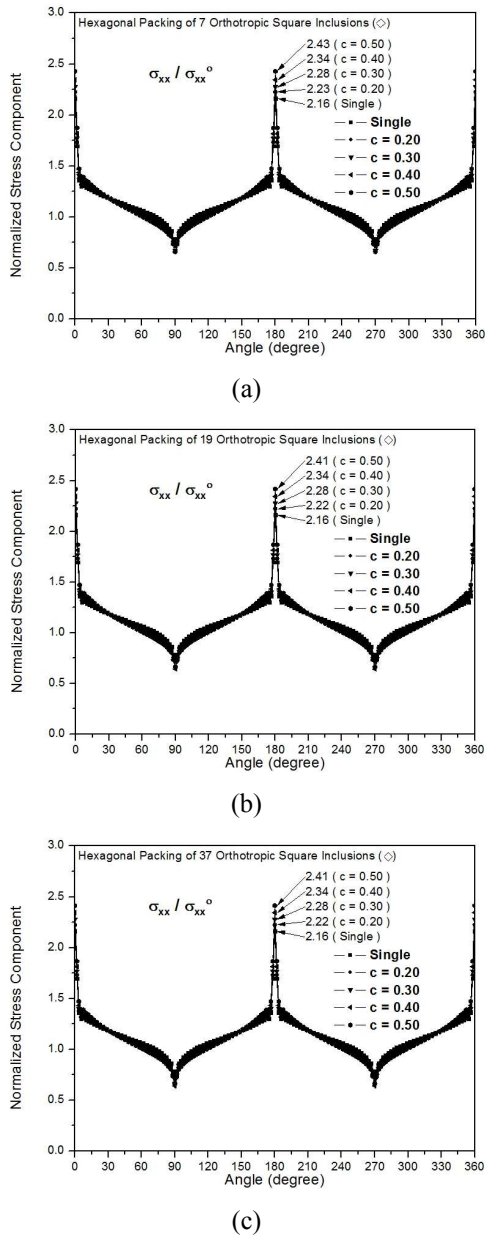


Fig. 14 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$) at the interface between the central orthotropic square (diamond-shaped) inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

다수의 원형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과와 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과를 비교해 보았을 때, 직교 이방성 원형 함유체에서 발생하지 않았던 응력집중 현상이 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체에서는 발생하였으며, 다이아몬드 형 함유체에 발생한 최대 응력값이 원형 함유체에 발생한 최대

응력값보다 훨씬 크게 나타났음을 알 수 있었다.⁽²¹⁾

이전의 논문⁽²¹⁾에서 고려해 보았던 다수의 원형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과와 본 논문에서 고려해 본 다수의 다이아몬드 형 실린더 함유체 문제에 대한 해석 결과를 비교해 보았을 때, 등방성 또는 직교 이방성 원형 함유체에서 발생하지 않았던 응력집중 현상이 등방성 또는 직교 이방성 다이아몬드 형 함유체에서는 발생하였으며, 또한 다이아몬드 형 함유체에 발생한 최대 응력값이 원형 함유체에 발생한 최대 응력값보다 훨씬 크게 나타났음을 알 수 있다.

그러므로, 복합재료에서의 파손 메커니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 원형 또는 타원을 비롯한 다양한 형태의 등방성 함유체 또는 이방성 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성 해석이 반드시 필요하다고 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 등방성 또는 이방성 다이아몬드 형 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 등방성 무한기지에 다수의 등방성 또는 이방성 다이아몬드 형 함유체가 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 복합재료에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다.

첫째로, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)이, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로 작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

둘째로, 체적 적분방정식법에서는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 함유체의 체적비(c)가 바뀌어도, 다이아몬드 형 함유체의 위치만 변경하면 되기 때문에, 체적 적분방정식법을 이용하는 것이 유한요소법을 이용하는 것보다 매우 효율적이라는 것을 확인하였다.

끝으로, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때,

본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가 벤치마킹(benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것이다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No. 2010-0022211)과 한국과학기술정보연구원의 슈퍼컴퓨팅응용연구 전략지원프로그램을 통해 수행된 전략과제(과제번호: KSC-2011-C1-01)입니다. 지원에 감사드립니다. 아울러, 보다 좋은 논문이 될 수 있도록 성심성의껏 심사해 주신 익명의 심사위원님께 진심으로 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Eshelby, J. D., 1957, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, A241, pp. 376~396.
- (2) Hashin, Z., 1972, Theory of Fiber Reinforced Materials, NASA CR-1974.
- (3) Achenbach, J. D. and Zhu, H., 1990, "Effect of Interphases on Micro and Macromechanical Behavior of Hexagonal-Array Fiber Composites," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 956~963.
- (4) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (5) Lee, J. and Mal, A., 1998, "Characterization of Matrix Damage in Metal Matrix Composites under Transverse Loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339~346.
- (6) Naboulsi, S., 2003, "Modeling Transversely Loaded Metal-Matrix Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol. 37, pp. 55~72.
- (7) Lee, J. K., Han, H. D. and Mal, A., 2006, "Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 33~36, pp. 4544~4556.
- (8) Ju, J. W. and Ko, Y. F., 2008, "Micromechanical Elastoplastic Damage Modeling for Progressive Interfacial Arc Debonding for Fiber Reinforced Composites," *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 17, pp. 307~356.
- (9) Jasiuk, I., 1995, "Cavities vis-a-vis Rigid Inclusions: Elastic Moduli of Materials with Polygonal Inclusions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32 (3-4), pp. 407~422.
- (10) Noda, N.-A., Kawashima, Y., Moriyama, S. and Oda, K., 1996, "Interaction of Newly Defined Stress Intensity Factors for Angular Corners in a Row of Diamond-Shaped Inclusions," *International Journal of Fracture*, Vol. 82, pp. 267~295.
- (11) Rodin, G. J., 1996, "Eshelby's Inclusion Problem for Polygons and Polyhedra," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44 (12), pp. 1977~1995.
- (12) Ru, C. Q., 1999, "Analytic Solution for Eshelby's Problem of an Inclusion of Arbitrary Shape in a Plane or Half-Plane," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. 315~322.
- (13) Nakasone, Y., Nishiyama, H. and Nojiri, T., 2000, "Numerical Equivalent Inclusion Method: a New Computational Method for Analyzing Stress Fields in and around Inclusions of Various Shapes," *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 285, pp. 229~238.
- (14) Kawashita, M. and Nozaki, H., 2001, "Eshelby Tensor of a Polygonal Inclusion and Its Special Properties," *Journal of Elasticity*, Vol. 64, pp. 71~84.
- (15) Nozaki, H., Horibe, T. and Taya, M., 2001, "Stress Field Caused by Polygonal Inclusion," *JSME International Journal*, Vol. 44 (4), pp. 472~482.
- (16) Nakai, T. and Nozaki, H., 2008, "A Numerical Equivalent Inclusion Method Using the Solution of Polyhedral Inclusions," *Bulletin of the College of Education Ibaraki University*, Vol. 57, pp. 105~112.
- (17) Dong, C. Y., Lo, S. H. and Cheung, Y. K., 2003, "Numerical Solution of 3D Elastostatic Inclusion Problems Using the Volume Integral Equation Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 (1-2), pp. 95~106.

- (18) Franciosi, P., 2005, "On the Modified Green Operator Integral for Polygonal, Polyhedral and Other Non-Ellipsoidal Inclusions," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42 (11-12), pp. 3509~3531.
- (19) Chen, M.-C. and Ping, X.-C., 2009, "Analysis of the Interaction within a Rectangular Array of Rectangular Inclusions Using a New Hybrid Finite Element Method," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 76, pp. 580~593.
- (20) Zou, W., He, Q., Huang, M. and Zheng, Q., 2010, "Eshelby's Problem of Non-Elliptical Inclusions," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 58(3), pp. 346~372.
- (21) Lee, J. K., 2010, "Volume Integral Equation Method for Multiple Isotropic Inclusion Problems in an Infinite Solid Under Uniaxial Tension," *Transactions of the KSME A*, Vol. 34(7), pp. 881~889.
- (22) ADINA User's Manual, 2008, Version 8.5, ADINA R & D, Inc..
- (23) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (24) Lee, K. J. and Mal, A. K., 1990, "A Boundary Element Method for Plane Anisotropic Elastic Media," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600~606.
- (25) Buryachenko, V. A., 2007, *Micromechanics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York.
- (26) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.
- (27) PATRAN User's Manual, 1998, Version 7.0, MSC/PATRAN.
- (28) Hardiman, N. J., 1954, "Elliptic Elastic Inclusion in a n Infinite Elastic Plate," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 7 (2), pp. 226~230.
- (29) Mal, A. K. and Singh, S. J., 1991, *Deformation of Elastic Solids*, Prentice Hall, New Jersey.
- (30) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (31) Lee, J. K., Choi, S. J. and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38 (16), pp. 2789~2802.
- (32) Wang, X., Pan, E. and Sudak, L. J., 2008, "Uniform Stresses inside an Elliptical Inhomogeneity with an Imperfect Interface in Plane Elasticity," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, pp. 054501-1~054501-5.