

개선된 3 중 2 주 및 보조 런 규칙을 가진 \bar{X} 관리도의 통계적 설계

박진영* · 서순근**†

* (주)삼덕스타필드

** 동아대학교 산업경영공학과

Statistical Design of \bar{X} Control Chart with Improved 2-of-3 Main and Supplementary Runs Rules

Park Jin-young* · Seo Sun-Keun**†

* Samduk Stafild Co.

** Dept. of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

Abstract

Purpose: This paper introduces new 2-of-3 main and supplementary runs rules to increase the performance of the classical \bar{X} control chart for detecting small process shifts.

Methods: The proposed runs rules are compared with other competitive runs rules by numerical experiments. Nonlinear optimization problem to minimize the out-of-control ARL at a specified shift of process mean for determining action and warning limits at a time is formulated and a procedure to find two limits is illustrated with a numerical example.

Results: The proposed 2-of-3 main and supplementary runs rules demonstrate an improved performance over other runs rules in detecting a sudden shift of process mean by simultaneous changes of mean and standard deviation.

Conclusion: To increase the performance in the detection of small to moderate shifts, the proposed runs rules will be used with \bar{X} control charts.

Key Words : Action limit, Average Run Length, Runs Rule, Warning limit, \bar{X} Control Chart

• Received 23 August 2012, revised 15 October 2012, accepted 15 October 2012

* Corresponding Author(skseo@dau.ac.kr)

© 2012, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

※ 이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

1. 서론

전통적으로 제조업의 공정관리에 적용되어 발전한 통계적 공정관리(SPC, Statistical Process Control)는 공정을 두 가지 상태로 대별한다. 즉, 공정의 변화가 발생하지 않은 경우의 '관리상태'와 공정에 변화가 발생하여 이상 원인이 존재하는 경우의 '이상상태'로 구별한다. 공정의 관리상태 이탈여부를 판정하는 대표적인 기법 중 하나가 관리도(control chart)이다.

관리도는 품질의 변동 상황을 그래프로 나타낸 것으로, 공정평균의 관리를 위해 가장 널리 사용되는 관리도가 \bar{X} 관리도이다. \bar{X} 관리도는 중심선(CL, center line)을 기준으로 관리한계(control limit 또는 action limit; 이하 조치한계)를 $\pm 3\sigma$ 로 두어 한 점이라도 이를 벗어난 경우에 이상상태로 판정하는 Shewhart의 \bar{X} 관리도가 주로 쓰인다.

Shewhart의 \bar{X} 관리도는 공정평균의 작은 이동에 대한 검출능력이 떨어지는 약점을 가지고 있다 「Montgomery 2009, 400」. 이러한 검출능력을 평가하기 위한 척도로는 ARL(Average Run Length)이 주로 채택된다 「Kang and Lim 2009, 191」.

Shewhart \bar{X} 관리도의 약점을 보완하기 위한 하나의 대안으로 Western Electric사(1956)는 현재의 관리한계($\pm 3\sigma$)를 유지하면서 런 규칙을 추가하는 대안을 제안하였다.

이런 런 규칙에 대한 연구로 Derman & Ross(1997)는 3 중 2 런 규칙을 주 규칙으로 적용할 경우에 \bar{X} 관리도를 설계하는 방법을 제시하였다. 이를 계기로 \bar{X} 관리도에 주·보조 런 규칙을 적용하는 다수 논문이 10여 년간 발표되었다.

한편 최근 들어 Antzoulakos & Rakitzis (2008a,b)는 이상상태의 판정에 영향을 미치지 않는 나머지 점의 위치를 고려한 주 및 보조 런 규칙을 제안하였다. 이런 규칙은 공정평균이 한 쪽 방향으로만 순간적으로 이동하는 경우 가장 우수한 런 규칙이지만 이상상태 판정 시 상식적인 측면에서 적절하지 못한 점이 있다.

본 논문에서는 이런 점을 개선한 새로운 주 및 보조 런 규칙을 제안하고 3 중 2 런 규칙을 대상으로 다양한 수치 실험을 통해 이의 수행도를 평가하고자 한다.

또한 한 점이라도 관리한계를 벗어난 경우에 이상상태로 판정하는 기본 판정 규칙 외에 런 규칙을 적용하는 \bar{X} 관리도에 대한 연구들은 두 조치한계(UAL/LAL, Upper/Lower Action Limit)를 임의로 결정한 후에 관리상태 하의 ARL이 370.4를 만족하도록 두 경고한계(UWL/LWL, Upper/Lower Warning Limit)를 설정하였다. 따라서 본 논문에서는 보조 런 규칙일 때 조치한계를 임의 결정이 아닌 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되는 조건하에서 공정평균의 특정 이동량 하의 ARL을 최소화하도록 조치와 경고한계를 동시에 통계적으로 설계하는 절차를 제안하고 이의 활용 가능성을 제안된 보조 런 규칙 등을 통해 조사해 보고자 한다.

2. 새로운 규칙을 가진 관리도

1997년 Derman & Ross는 연속하는 3개의 점 중 2개의 점이 조치한계를 벗어나면 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 3 중 2 런 규칙을 주 규칙으로 사용할 경우에 ARL을 Markov chain 모형으로 도출하고 \bar{X} 관리도를 설계하는 방법을 제시하였다. 이를 계기로 촉발된 n 중 k ($k \leq n$) 런 규칙을 적용한 기 발표된 주요 통계적 설계에 관한 연구들에 대해 Park and Seo(2012)는 런 규칙의 형태, 런 규칙의 역할(주/보조), 동일 성격의 상·하 영역의 구별 여부, 나머지($n-k$) 점들의 활용 여부에 따라 체계적으로 분류하고 관리도의 통계적 설계의 기준이 되는 ARL을 정리하고 고찰하였다.

2.1 기존의 런 규칙

중심선을 기준으로 설정된 상·하 영역에 따라 타점된 점을 구별할 것인가에 의해 판정을 달리할 수 있다. Derman & Ross(1997)를 비롯한 그 이전 연구에서는 대부분 상·하 영역을 구별하지 않고 동등하게 취급하고 있으나 그 이후는 상·하 영역을 구별하여 한쪽에 속하여야만 런 규칙에 부합되는 것으로 다루고 있다. 여기에 속하는 주 런 규칙으로는 Klein(2000), KS Q ISO 7873:2009(2009), Acosta-Mejia(2007)가 속하며, 보조 런 규칙으로는 Khoo & Ariffin (2006), Acosta-Mejia(2007), Kim et al.(2008) 등이 해당된다.

본 논문에서는 런 규칙 중에서 가장 널리 쓰이는 $(m+1)$ 중 m , 그 중에서도 비교적 간편하여 현업에서의 활용도가 높을 것으로 예기되는 3중 2 규칙을 다룬다. 제안된 런 규칙에 대한 비교대상으로 보편적이며 ISO 규격에도 포함된 상·하 영역을 구별하는 상기 성격을 가진 3중 2 주 규칙과 더불어 보조 런 규칙을 가진 관리도를 선택하며, 이를 K-A 2/3이라고 명명한다.

최근에 Antzoulakos & Rakitzis(2008a)는 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙에서 m 개의 점에 대해 상·하 영역으로 구별하면서 나머지 한 점이 m 개의 점이 타점된 상·하 영역과 같은 쪽에 있어야 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 런 규칙을 제안하였다. 또한 Antzoulakos & Rakitzis(2008b)는 이런 판정 방식을 m 중 $k(k \leq m)$ 주 런 규칙에 도입하였다.

따라서 제안 런 규칙에 대한 두 번째 비교대상으로는 전형적인 공정 이동 여건인 공정평균이 한 방향으로 순간적으로 이동하여 지속되는 경우에 통계적 검출능력이 가장 우수한 Antzoulakos & Rakitzis(2008a,b)의 주 런 규칙과 보조 런 규칙을 적용한 것으로, 이를 A-R 2/3으로 명명한다.

2.2 제안 주 런 규칙

Antzoulakos & Rakitzis(2000b)가 제안한 상·하 영역의 구별과 나머지 점들의 위치를 고려하여 3중 2 런 규칙에 적용하면 3개의 점 중 2개의 점이 UAL(또는 LAL)을 벗어나고 나머지 한 점이 UAL~CL(또는 CL~LAL)에 위치할 때 공정이 이상상태에 있다고 판정하는 주 런 규칙이 된다. 여기서 나머지 한 점이 Fig. 1과 같이 타점된 위치의 반대편의 조치한계를 벗어날 경우에(타원 표시점) 관리상태로 보는 것보다 3점 모두가 조치한계를 벗어났으므로 이상상태라고 보는 것이 더 타당하므로 이런 성격을 가진 주 런 규칙을 다루고자 한다.

2.3 제안 보조 런 규칙

Antzoulakos & Rakitzis(2008a)이 제안한 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙은 Fig. 2와 같이 나머지 한 점이 같은 편의 중심선과 경고한계(UWL)에 위치하면 이상상태로 판정하나, 이보다 극단적인 반대편의 경고한계와 조치한계 사이에 타점되는 경우에는 이상상태로 판정하지 않으므로 2.2절의 주 규칙과 같이 이런 점을 개선한 새로운 3중 2 보조 런 규칙을 제안하고 이의 통계적 수행도를 파악하고자 한다.

3. 3 중 2 런 규칙의 통계적 설계

제안된 주 런 규칙의 ARL은 보조 런 규칙으로부터 쉽게 도출할 수 있으므로 보조 런 규칙의 ARL 도출과 이로부터 경고와 조치한계를 통계적으로 설정하는 절차를 먼저 다룬다.

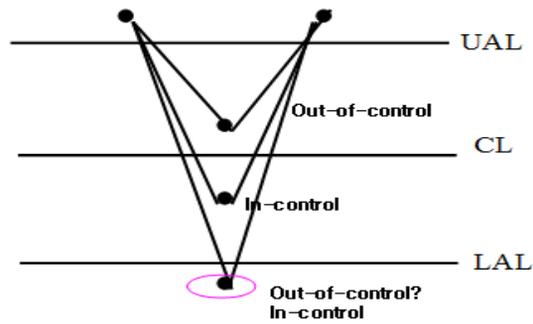


Figure. 1. Proposed Main Runs Rule: 2-of-3

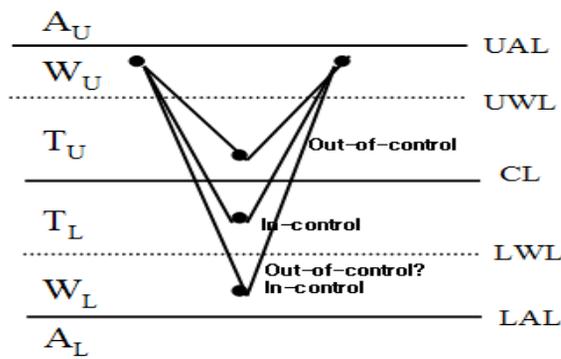


Figure. 2. Proposed Supplementary Runs Rule: 2-of-3

3.1 통계적 설계 절차

선행 연구에서는 보조규칙일 경우에 조치한계(UAL과 LAL)와 경고한계(UWL과 LWL)를 동시에 결정해야 되는데, Shewhart의 \bar{X} 관리도와 비교하기 위해 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되는 하나의 조건만 부과되어 두 한계의 통계적 설계를 적절히 수행하지 못하고 있다. 즉, 가장 널리 쓰이는 $(m+1)$ 중 m 보조 런 규칙을 적용 시 Kim et al.(2008)을 제외한 거의 대다수 연구는 먼저 조치한계를 임의로 결정한 후 관리상태의 ARL이 370.4를 만족하도록 경고한계를 설정하는 방법이 주로 활용되고 있다 「Acosta-Mejia 2007, 131」.

따라서 본 논문에서는 Shewhart \bar{X} 관리도와 비교하기 위해 관리상태의 $ARL(ARL(0))$ 이 370.4가 되는 조건하에서 공정평균의 표준화된 관심 있는 특정 이동량이 b 일 때 $ARL(b)$ 를 최소화하는 조치한계와 경고한계를 설정하도록 관리도의 통계적 설계를 수행하고자 한다.

공정의 품질특성치가 $N(\mu_0, \sigma_0)$ 가 따른다고 가정하며, 부분군의 수가 n_s 일 때 공정평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + b\sigma_0/\sqrt{n_s}$ 로 이동할 때의 ARL을 $ARL(b)$ 로 정의하며 표준화된 이동량 b 는 주로 0.5~2.0의 값이 선택될 수 있다.

상기의 최적화 문제는 식(1)과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min ARL(b) \\ &s.t. ARL(0)=370.4 \end{aligned} \tag{1}$$

상기의 비선형 최적화 문제는 Kim et al.(2008)의 통계적 설계모형과 상당히 유사하나 제약식에서 부등호 대신에 등호를 적용하고 있다. 본 논문에서는 UAL/LAL과 UWL/LWL을 동시에 구할 수 있는 프로그램을 Maple(2011)을 이용하여 작성하였으며 3.4절에서 수치적으로 식 (1)를 만족하는 최적값이 유일하게 존재함을 예시하고자 한다.

이런 통계적 설계의 대체적인 수행과정은 다음과 같다.

<단계 1> 관리도의 상태를 Antzoulakos & Rakitzis(2008a)의 방식에 따라 정의한다.

<단계 2> 품질 특성치의 분포를 표준화하여 Fig. 2의 UWL(LWL)= $d_1(-d_1)$, UAL(LAL)= $d_2(-d_2)$ 로 설정하며 (여기서 \bar{X} 의 표준편차를 "1"로 표준화함), 식(4)의 각 영역에 타점될 확률을 이용하여 Markov chain의 전이확률 행렬 P 을 구한다.

<단계 3> P 를 식 (2)와 같이 분할하고 식(3)을 이용하여 식(1)의 $ARL(0)$ 을 구한다.

$$P = \begin{bmatrix} R(I-R) & \mathbf{1}' \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 P 가 $j \times j$ (j 는 상태의 수)행렬일 때 R 은 $(j-1) \times (j-1)$ 행렬을, $\mathbf{1}'$ 는 각 원소가 1인 $(j-1) \times 1$ 열벡터가 된다.

따라서 공정평균의 표준화된 이동량이 b 일 때의 ARL은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$ARL(b) = \mathbf{e}_1(I-R)^{-1}\mathbf{1}' \tag{3}$$

단, \mathbf{e}_1 은 (1, 1)의 원소가 1, 나머지 원소가 0인 $1 \times (j-1)$ 행벡터

식 (1)의 $ARL(0)$ 은 Fig. 2의 각 영역에 타점될 확률인 $b = 0$ 일 때의 식 (4)를 구하여 식(3)에 대입하면 된다.

$$\begin{aligned} P_{AU} &= \Pr(Z \geq d_2 - b) & P_{AL} &= \Pr(Z \leq -d_2 - b) \\ P_{WU} &= \Pr(d_1 - b \leq Z < d_2 - b) \\ P_{WL} &= \Pr(-d_2 - b < Z \leq -d_1 - b) \\ P_{TU} &= \Pr(0 \leq Z < d_1 - b) \\ P_{TL} &= \Pr(-d_1 - b < Z < 0) \\ P_A &= P_{AU} + P_{AL} \\ P_W &= P_{WU} + P_{WL} \\ P_T &= P_{TU} + P_{TL} \end{aligned} \tag{4}$$

<단계 4> 식(1)의 $ARL(b)$ 를 Fig. 2의 각 영역에 타점될 확률인 식(4)를 식 (3)에 대입하여 구한다.

<단계 5> Maple의 NLPsolve를 이용하여 비선형 최적화 문제인 식(1)를 풀어 d_1, d_2 를 구한다. NLPsolve는 SQP(Sequential Quadratic Programming)을 채택한 수치적 방법을 사용하고 있다.

<단계 6> <단계 5>에서 설정된 d_1, d_2 하에서 공정평균이 μ_0 에서 $\mu_0 + c_1\sigma_0/\sqrt{n_s}$ 로 이동할 때의 ARL을 계산하여 대상 런 규칙의 수행도를 평가한다.

3.2 Markov chain에 의한 모형화

<단계 1>의 상태정의를 여러 연구 중에서 Antzoulakos & Rakitzis(2008a)에서 제안한 방식을 적용하는 것이 가장 체계적이다. 즉, 공정이 이상상태에 있다고 판정되는 영역의 집합을 먼저 나열하는데 새로운 3 중 2 보조 런 규칙에서 이상상태에 있다고 판정하는 점들의 영역(Fig. 2 참고)은 {WUWU, WUTUWU, WUWLWU, WLWL,

WLTWL, WLWUWL, A}(여기서 A=AUUAL)가 된다. 이 집합에서 마지막에 타점되는 영역을 제외한 나머지 타점되는 영역의 순서열에 따라 상태를 정의하고 다음에 타점되는 점의 위치에 따라 상태 전이확률을 구한다.

즉, 첫 번째 점이 영역 WU에 있을 경우 상태 2로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 WU와 영역 TU에 있을 경우를 상태 3으로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 WU와 영역 WL에 있을 경우를 상태 4로, 첫 번째 점이 영역 WL에 있을 경우를 상태 5로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 WL와 영역 TL에 있을 경우를 상태 6으로, 첫 번째와 두 번째 점이 각각 영역 WL와 영역 WU에 있을 경우를 상태 7로 정의한다. 또한 이상상태를 판정하는 영역과 관련이 없는 경우인 두 점들이 영역 TU 또는 TL에 있을 경우를 상태 1로, 기본 판정 규칙과 보조 룰 규칙에 의해 이상상태가 되는 경우를 흡수상태인 상태 8로 정의한다.

각 상태의 전이 다이어그램으로부터 전이확률행렬을 구할 수 있다. 예를 들면 상태 2인 첫 번째 점이 영역 WU에 있을 경우, Fig. 3의 전이 다이어그램에 따라 구한 전이확률 벡터가 식 (6)의 2행과 같이 주어진다.

유사한 방법으로 상태 1, 3~7에 적용하여 구한 전이확률 행렬이 식 (5)이다.

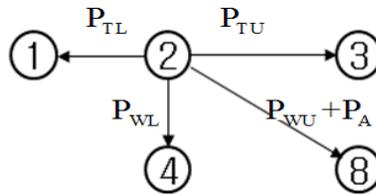


Figure. 3. Transition Diagram: State 2

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
 1 & P_T & P_{WU} & 0 & 0 & P_{WZ} & 0 & 0 & P_A \\
 2 & P_{TL} & 0 & P_{TU} & P_{WZ} & 0 & 0 & 0 & P_{WU} + P_A \\
 3 & P_T & 0 & 0 & 0 & P_{WZ} & 0 & 0 & P_{WU} + P_A \\
 4 & P_{TU} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{TL} & 0 & P_W + P_A \\
 5 & P_{TU} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{TL} & P_{WU} & P_{WZ} + P_A \\
 6 & P_T & P_{WU} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{WZ} + P_A \\
 7 & P_{TL} & 0 & P_{TU} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_W + P_A \\
 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \tag{5}$$

3.3 보조 룰 규칙의 ARL 도출

식 (5)에서 흡수상태인 8을 제외한 나머지를 $\mathbf{R}(7 \times 7$ 행렬)이라 하고 원소 (8,8)인 1을 제외한 나머지 열 행렬 (7×1)을 $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}'$ 라 할 때 식 (2)와 (3)을 이용하여 공정평균의 표준화된 이동량이 b 일 때의 ARL을 구한다.

관리상태 하에서 $P_{WL} = P_{WU}$, $P_{TL} = P_{TU}$ 가 되고, $P_{WU} = P_W/2$, $P_{TU} = P_T/2$ 이므로 $ARL(0)$ 은 식 (6)이 된다.

$$\begin{aligned}
 ARL(0) &= \frac{1 + P_{WU}(2 + P_{TU})(1 + P_{WU})}{1 - 2P_{TU} - P_{WU}P_{TU}(1 + P_{WU})(3 + 2P_{TU})} \\
 &= \frac{8 + P_W(4 + P_T)(2 + P_W)}{8 - 8P_T - P_WP_T(2 + P_W)(3 + P_T)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

따라서 식 (1)에서 최소화하고자 하는 특정 이동량 b 가 주어질 때 ARL을 최소화 하는 조치한계(d_2)와 경고한계(d_1)를 구할 수 있다.

한편 <단계 6>의 공정평균의 표준화된 이동량이 c_1 일 때의 ARL도 식(3)로부터 구한다.

3.4 적용 예제

목적함수의 특정 표준화된 이동량 b 가 1일 때의 ARL을 최소화한 조치한계(d_2)와 경고한계(d_1)를 K-A 2/3, A-R 2/3, 제안 2/3 보조 런 규칙에 대해 전 소절의 통계적 설계방법을 적용하여 구한 결과가 Table 1에 정리되어 있다.

이 경우에 식(1)을 만족하는 d_1, d_2 가 유일하게 존재함을, Maple(2011)로 제약식을 만족하는 d_1 을 d_2 로 치환하여 목적함수에 대입하여 d_2 에 따라 제안 2/3 보조 런 규칙의 $ARL(b)$ 를 도시한 Fig. 4로부터 확인할 수 있다.

Table 1. Statistical Design of 2/3 Supplementary Runs Rules: $b = 1$

runs rule	K-A 2/3	A-R 2/3	proposed 2/3
d_1	1.939	1.874	1.879
d_2	3.826	3.900	3.880
$ARL(b)$	23.13	21.32	21.52

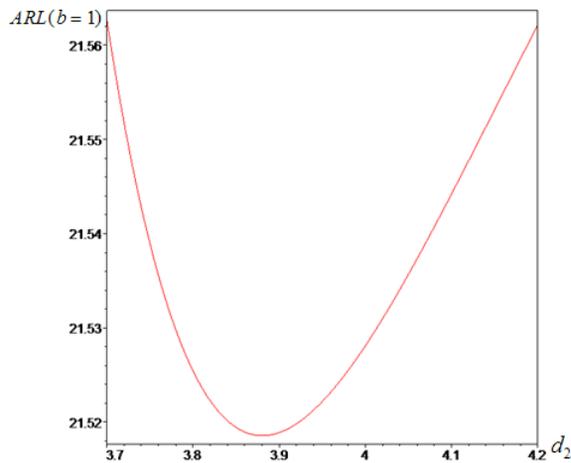


Figure. 4. Optimality of Proposed 2/3 Supplementary Runs Rule

또한 b 가 0.5~2.0일 때의 제안 2/3 보조 런 규칙의 $d_1, d_2, ARL(b)$ 이 Table 2에 정리되어 있다. Table 2를 보면 제안 3 중 2 보조 런 규칙의 d_1 은 b 가 증가함에 따라 감소하나 d_2 는 증가하는 경향을 보인다. 여기서 d_2 보다 d_1 이 b 에 덜 민감하므로 d_2 를 먼저 설정하고 d_1 를 정하는 기존 연구([1,3,6])와 달리 역순으로 설계하는 것도 추천할 수 있다. 예를 들면 식 (1)의 특정 b 를 정하기 힘들 경우 b 가 0.5~1.5 범위에서 ARL을 근사적으로 최소화하기를 원할

때, d_1 을 Table 2를 참조하여 1.88로 정한다면 $ARL(0)$ 이 370.4가 되는 d_2 (여기서 3.849)로 관리도를 설계할 수 있다.

Table 2. Proposed 2/3 Supplementary Runs Rules for b

b	d_1	d_2	$ARL(b)$
0.5	1.874	4.103	98.86
0.7	1.875	4.018	49.76
0.9	1.877	3.927	27.90
1.1	1.881	3.833	16.92
1.3	1.886	3.735	11.04
1.5	1.893	3.636	7.68
1.7	1.904	3.537	5.66
1.9	1.920	3.441	4.37
2.0	1.931	3.395	3.90

3.5 주 런 규칙의 ARL과 설계

주 런 규칙의 전이확률 행렬은 식 (6)에서 P_{AU} , P_{AL} 를 0으로 설정하고 P_{WU} , P_{WL} 를 P_{AU} , P_{AL} 로 대체하여 식 (5)과 (6)에 대입하면 관리상태와 공정평균이 이동할 때의 ARL을 도출할 수 있다.

따라서 관리상태 하의 ARL은 P_{WU} , P_{WL} 를 P_{AU} , P_{AL} 로 대체하여 식(6)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$ARL(0) = \frac{1 + P_{AU}(2 + P_{TU})(1 + P_{AU})}{1 - 2P_{TU} - P_{AU}P_{TU}(1 + P_{AU})(3 + 2P_{TU})} \tag{7}$$

또한 $P_{TU} = (1 - P_A)/2$ 이므로 식 (7)은 식 (8)과 같이 간략하게 정리할 수 있다.

$$ARL(0) = \frac{8 + 10P_A + 3P_A^2 - P_A^3}{P_A^2(6 - 3P_A + P_A^2)} \tag{8}$$

주 런 규칙의 조치한계는 관리상태 하의 ARL이 370.4가 되도록 설정해야 Shewhart의 \bar{X} 관리도와 2/3 주 런 규칙을 가진 관리도를 동일 조건하에서 성능척도를 비교할 수 있다. 따라서 $b=0$ 일 때 식(4)에서 $P_{WU} = P_{WL} = 0$, P_{TU} 와 P_{TL} 에 관한 식에서 d_1 을 d_2 로 대체한 각 영역의 확률을 구하고 이를 식(8)의 관리상태의 ARL에 대입하면, 이 값이 370.4가 되는 조치한계 d_2 는 1.871로 구해진다.

4. 제안 3 중 2 런 규칙의 수행도 평가

4.1 주 런 규칙의 수행도 평가

4.1.1 공정평균만 이동한 경우

공정 평균의 표준화된 이동량이 c_1 이란 것은 이상원인에 의해 공정평균이 순간적으로 한 쪽 방향으로 $c_1\sigma$ 만큼 이동한다는 것을 의미하는데, 부분군의 크기가 n_s 라면 공정이 관리상태일 때의 공정평균 μ_0 에서 실질적으로 $\mu_0 + c_1\sigma_0/\sqrt{n_s}$ 만큼 이동하는 경우이다. c_1 가 0.2~3.0일 때 본 연구의 2/3 주 런 규칙, 2절에서 비교대상으로 선정된 K-A 2/3 런 규칙과 A-R 2/3 런 규칙 외에 Shewhart의 \bar{X} 관리도의 수행도를 비교하기 위해 수치실험을 통해 계산된 ARL을 정리한 것이 Table 3이다.

Table 3을 보면 다음과 같은 특징을 찾을 수 있다.

- (1) 제안된 주 2/3 런 규칙일 경우의 d_2 는 1.871로 A-R 2/3 런 규칙의 1.866과 유사하다.
- (2) 예상한 바와 같이 3 중 2 런 규칙 중 A-R 런 규칙이 가장 작은 ARL을 보여주고 있다.
- (3) 제안된 런 규칙은 A-R 런 규칙보다는 약간 떨어지지만(Table 3의 굵은 표시 숫자 참조) K-A 런 규칙과 Shewhart \bar{X} 관리도보다는 우수하다.
- (4) 공정의 이동이 클 경우(즉, $c_1 \geq 3.0$ 일 때) Shewhart \bar{X} 관리도가 우수한 점을 확인할 수 있다.

Table 3. Comparison of ARL for 2/3 Main Runs Rules: $c_2 = 1.0$

runs rule	Shewhart	K-A 2/3	A-R 2/3	proposed 2/3	
d_2	3	1.929	1.866	1.871	
c_1	0.2	308.43	270.10	264.79	265.80
	0.4	200.08	141.61	134.92	136.05
	0.6	119.67	72.64	67.89	68.58
	0.8	71.55	39.64	36.64	37.01
	1.0	43.89	23.30	21.44	21.64
	1.2	27.82	14.73	13.56	13.68
	1.4	18.25	9.96	9.21	9.28
	1.6	12.38	7.16	6.67	6.71
	1.8	8.69	5.43	5.10	5.13
	2.0	6.30	4.33	4.10	4.12
	2.5	3.24	2.92	2.82	2.83
	3.0	2.00	2.36	2.32	2.32

4.1.2 공정평균과 공정 표준편차가 동시에 변할 경우

관련 연구에서 이상상태를 공정평균만 순간적으로 이동하여 지속되는 경우만을 주로 다루고 있지만 「Antzoulakos and Rakitzis 2008a, 77」, 평균의 점진적 이동, 표준편차도 변할 경우 등 다양한 경우가 존재한다. 본 논문에서는 추가적으로 공정평균과 표준편차가 동시에 변하여 공정평균이 이동하는 경우에 대해 ARL을 구하여 비교하였다. 즉, 표준편차 σ_0 가 $c_2\sigma_0$ 로 변하고 공정평균 μ_0 가 $\mu_0 + c_1\sigma_0/(c_2\sqrt{n_s})$ 로 이동하면, 실질적으로 공정평균은 $\mu_0 + c_1\sigma_0/\sqrt{n_s}$ 으로 이동하는 경우가 된다.

따라서 공정평균만 변하는 경우는 c_2 가 1.0인 경우로 볼 수 있으며, c_2 가 1.5와 2.0(대체적으로 s 관리도에서 검출되지 않는 범위)이고 $c_1 = 0.5 \sim 3.0$ 일 때 전 소절에서 가장 우수한 A-R과 제안 2/3 주 런 규칙에 대해 계산된 ARL 중 일부분인 $c_2 = 1.5$ 일 때가 Table 4에 정리되어 있는데 이의 특징을 요약하면 다음과 같다.

- (1) c_2 가 1.5일 때를 보면 공정평균 이동량이 작을 경우(c_1 이 0.5~1.7)에 제안된 런 규칙이, 공정평균 이동량이 클 경우(c_1 이 1.8~3.0)에는 A-R 2/3런 규칙이 우수하다.
 - (2) c_2 가 2.0일 경우(한정된 지면으로 인해 논문에는 수록되어 있지 않음)는 모든 경우에 제안된 런 규칙이 A-R 2/3런 규칙보다 우수하다.
- 이로부터 표준편차의 변동량이 클 경우에 제안된 런 규칙의 우수성이 높을 것으로 예기된다.

Table 4. Comparison of ARL for 2/3 Main Runs Rules: $c_2 = 1.5$

runs rule		A-R 2/3	proposed 2/3
c_1	0.5	23.986	23.312
	0.6	20.893	20.409
	0.7	18.137	17.798
	0.8	15.752	15.517
	0.9	13.721	13.560
	1.0	12.006	11.898
	1.1	10.565	10.492
	1.2	9.353	9.306
	1.3	8.333	8.303
	1.4	7.471	7.453
	1.5	6.741	6.731
	1.6	6.121	6.116
	1.7	5.591	5.590
	1.8	5.136	5.137
	1.9	4.745	4.747
	2.0	4.406	4.410
	2.1	4.113	4.117
	2.2	3.858	3.862
	2.3	3.635	3.639
	2.4	3.440	3.444
2.5	3.269	3.273	
2.6	3.118	3.122	
2.7	2.986	2.990	
2.8	2.869	2.873	
2.9	2.766	2.769	
3.0	2.675	2.678	

4.2 보조 런 규칙의 수행도 평가

4.2.1 공정평균만 이동하는 경우

b 가 1과 1.5일 때 제안된 3 중 2 보조 런 규칙을 Shewhart의 \bar{X} 관리도, 3절의 설계 방법으로 도출된 K-A 과 A-R 보조 런 규칙의 수행도를 비교하였다. 대상 보조 런 규칙의 수행도를 평가하기 위한 수치실험 중에서 $b=1.5$ 이고 공정평균이 0.2~3.0(c_1)으로 이동할 때의 ARL이 Table 5에 요약되어 있다.

Table 5 등으로부터 다음의 양상을 파악할 수 있다.

- (1) 예상한 바와 같이 공정평균만 이동하는 경우 A-R 2/3 보조 런 규칙이 가장 우수하다.
- (2) 제안된 3 중 2 규칙은 4가지 런 규칙 중 두 번째로 ARL이 작다.
- (3) Shewart의 \bar{X} 관리도는 c_1 이 3.0이상일 때 가장 우수하다.

Table 5. Comparison of ARL for 2/3 Supplementary Runs Rules: $b = 1.5, c_2 = 1.0$

runs rule	Shewhart	K-A 2/3	A-R 2/3	proposed 2/3	
d_2	3	3.602	3.647	3.636	
d_1	0	1.954	1.888	1.893	
c_1	0.2	308.43	271.05	265.80	266.77
	0.4	200.08	142.58	135.93	137.01
	0.6	119.67	73.09	68.37	69.03
	0.8	71.55	39.74	36.78	37.14
	1.0	43.89	23.23	21.42	21.61
	1.2	27.82	14.58	13.47	13.57
	1.4	18.25	9.78	9.08	9.14
	1.6	12.38	6.96	6.51	6.55
	1.8	8.69	5.23	4.94	4.96
	2.0	6.30	4.11	3.92	3.93
	2.5	3.24	2.64	2.58	2.58
3.0	2.00	1.98	1.97	1.97	

4.2.2 공정평균과 표준편차가 동시에 변할 경우

제안된 런 보조규칙의 수행도를 추가적으로 파악하기 위해 4.1.2절과 같이 공정평균과 공정산포가 동시에 변할 때를 조사하였다. 즉 전 절과 마찬가지로 공정평균 μ_0 가 $\mu_0 + c_1\sigma_0/(c_2\sqrt{n_s})$, 표준편차 σ_0 가 $c_2\sigma_0$ 로 변할 때 ARL을 계산하였다.

수치실험은 $b = 1.0$ 과 1.5 , $c_2 = 1.5$ 과 2.0 의 4가지 경우에 수행하였는데 전 소절에서 가장 우수한 A-R 보조 런 규칙과 제안된 보조 런 규칙일 경우의 ARL 중에서 b 와 c_2 가 1.5일 때 Table 6에 주어져 있다.

이로부터 다음의 특징을 얻을 수 있다.

- (1) 한정된 실험결과지만 대체적으로 제안된 2/3 보조 런 규칙이 A-R 2/3 보조 런 규칙보다 ARL 측면에서 우수하다.
- (2) c_2 가 커질수록 제안된 보조 런 규칙의 우수성이 확연해진다.

5. 결 론

현업에서 가장 활용도가 높은 공정 평균용 관리도이면서, 최근 들어 일련의 논문이 발표되고 있는 \bar{X} 관리도의 런 규칙에 관한 연구들이 활발히 수행되고 있다.

본 논문은 공정평균이 한 방향으로 이동할 경우에만 가장 우수한 Antzoulakos와 Rakitzis (2008a,b)의 주 및 보조 런 규칙을 개선한 새로운 런 규칙을 제안하고 이의 통계적 수행도를 수치실험을 통해 평가하여 Shewhart 관리도와 최근 개발된 런 규칙을 가진 관리도와 비교하였다.

Table 6. Comparison of ARL for 2/3 Supplementary Runs Rules : $b = 1.5, c_2 = 1.5$

runs rule		A-R 2/3	proposed 2/3
c_1	0.5	18.438	18.079
	0.6	16.296	16.029
	0.7	14.334	14.139
	0.8	12.592	12.451
	0.9	11.075	10.974
	1.0	9.769	9.697
	1.1	8.652	8.601
	1.2	7.699	7.663
	1.3	6.886	6.860
	1.4	6.191	6.173
	1.5	5.596	5.583
	1.6	5.085	5.075
	1.7	4.644	4.636
	1.8	4.262	4.256
	1.9	3.930	3.925
	2.0	3.640	3.636
	2.1	3.386	3.383
	2.2	3.162	3.160
	2.3	2.965	2.962
	2.4	2.790	2.788
2.5	2.634	2.632	
2.6	2.495	2.493	
2.7	2.370	2.368	
2.8	2.258	2.255	
2.9	2.156	2.154	
3.0	2.065	2.062	

즉, 이들의 런 규칙에서 적용되는 이상상태 판정기준보다 더 극단적인인 경우에 이상상태로 판정하지 않는 점을 개선한 새로운 주 및 보조 런 규칙을 제안하였으며, 3 중 2 런 규칙에 대해 수치실험을 수행한 결과를 보면 ARL 측면에서 공정 평균만 순간적으로 이동할 경우에 A-K 3 중 2 런 규칙보다 약간 떨어지지만 다른 런 규칙보다 통계

적 수행도가 높으며, 공정 평균과 표준편차가 동시에 변하여 공정평균이 이동할 경우에는 대체적으로 A-K 런 규칙보다 ARL 측면에서 우수하여 제안된 주 및 보조 런 규칙을 충분히 활용할 수 있음을 파악하였다.

또한 보조 런 규칙일 경우 두 종의 한계(조치한계와 경고한계)를 설정해야 하나, 대부분의 기존 연구에서는 조치한계를 임의로 결정한 후에 관리상태 하의 ARL이 370.4를 만족하도록 경고한계를 설정하였는데 본 논문은 두 한계를 통계적으로 설정할 수 있는 설계방안을 적용하였다. 즉, 공정 평균의 특정 이동량(b) 하의 ARL을 최소화하는 비선형 최적화 문제로 정식화하고, 수치예로서 Maple(2011)을 이용하여 최적해의 존재 등 제시된 절차의 유용성을 예시하고, b 가 범위로 주어질 때 실용적인 관리도 설계 방안도 제안하였다.

4절의 수치실험 결과로부터 제안된 3중 2 주 와 보조 런 규칙을 비교하면, 보다 단순한 런 규칙을 가지는 주 규칙보다 공정평균의 큰 이동 시 검출능력이 좋은 전통적인 Shewhart \bar{X} 관리도를 유지하는 장점을 가지는 보조 런 규칙이 통계적 수행도 측면에서도 우수하다.

REFERENCES

- Acosta-Mejia, C. A. 2007. "Two Sets of Runs Rules for the \bar{X} Chart." *Quality Engineering* 19:129-136.
- Antzoulakos, Demetrios L., and Rakitzis, Athanosios C. 2008a. "The Revised m-of-k Runs Rule." *Quality Engineering* 20:75-81.
- Antzoulakos, Demetrios L., and Rakitzis, Athanosios C. 2008b. "The Modified r Out of m Control Chart." *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 37:396-408.
- Derman, Cyrus, and Ross, Sheldon M. 1997. *Statistical Aspects of Quality Control*. San Diego(USA): Academic Press.
- Kang, Bun-Kyu, and Lim, Tae-Jin. 2010. "Economic-Statistical Design of VSI Run Rules Charts." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 38:190-201.
- Khoo, Michael B. C., and Ariffin, Khotrun N. 2006. "Two Improved Runs Rules for the Shewhart \bar{X} Control Chart." *Quality Engineering* 18:173-178.
- Kim, Young-bok, Hong, Jung-Sik, and Lie, Chang-Hoon. 2008. "Statistical Design of Shewhart Control Chart with Run Rules." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 36:34-44.
- Klein, Morton. 2000. "Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart." *Journal of Quality Technology* 32:427-431.
- KS Q ISO 7873:2009. 2009. *Control Charts for Arithmetic Average with Warning Limits*. Seoul(Korea): Korea Agency for Technology and Standards.
- Montgomery, Douglas C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. 6th. ed., New York(USA): John Wiley & Sons.
- Maplesoft. 2011. *Maple™ 15*. Waterloo(Canada): Maplesoft.
- Park, Jin-young and Seo, Sun-Keun. 2012. " \bar{X} Control Chart with Run Rules." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 40:176-185.
- Western Electric. 1956. *Statistical Quality Control Handbook*. Indianapolis(USA): Western Electric Corporation.

