

직교이방성 판의 좌굴 및 압축재의 국부좌굴에 대한 해석적 연구 An Analytical Study on the Buckling of Orthotropic Plates and Local Buckling of Compression Members

최진우 Choi, Jin-Woo* · 이강연 Lee, Kang-Yeon** · 박정환 Park, Jung-Hwan* · 윤순종 Yoon, Soon-Jong***†

(Received January 5, 2012 ; Revised February 1, 2012 ; Accepted February 23, 2012)

ABSTRACT

In this paper, we present the analytical study results pertaining to the buckling of the orthotropic plates and local buckling of structural compression members composed of orthotropic plate components. Fiber reinforced polymeric plastic (FRP) materials, have many advantages over conventional structural materials such as steel and concrete. The advantages of the FRP materials are high specific strength and stiffness, high corrosion resistance, right weight, etc. Among the various manufacturing methods, pultrusion process is one of the best choices for the mass production of structural plastic members. Since the major reinforcing fibers are placed along the axial direction of the member, this material is usually considered as an orthotropic (transversely isotropic, more specifically) material. However, pultruded fiber reinforced plastic structural members have low modulus of elasticity and are composed of orthotropic thin plate components the members are prone to buckle. Therefore, stability is an important issue in the design of the pultruded FRP structural members. In this paper, the buckling of orthotropic plates and the local buckling of pultruded FRP structural members are investigated by following the previous research results and the local buckling strength of the member produced in the domestic manufacturer is found.

요 지

이 연구에서는 직교이방성 판의 좌굴 및 직교이방성 판요소로 구성된 구조용 압축재의 국부좌굴에 대한 해석적 연구를 수행하였다. 섬유보강 폴리머 플라스틱 재료는 높은 비강도 및 비강성, 높은 부식저항성, 경량성 등 강재나 콘크리트와 비교해서 많은 장점을 가지고 있다. 특히, 펄트루전 생산 방식은 섬유보강 폴리머 플라스틱 재료의 여러 가지 생산방법 중 구조용 플라스틱 부재를 대량으로 생산하기에 가장 적합한 방법이다. 펄트루전 생산방식은 부재의 축을 따라 주요 보강섬유가 배치되기 때문에 이 재료는 직교이방성으로 간주된다. 그러나, 펄트루전 섬유보강 플라스틱 부재는 낮은 탄성을 갖고 있고 얇은 판요소로 구성되어 있기 때문에 압축하중이 재하될 경우 좌굴이 발생할 수 있다. 따라서, 이 부재를 설계하는데 안정성은 매우 중요한 문제가 된다. 이 연구에서는 기존의 연구를 따라서 직교이방성 판 및 직교이방성 판요소로 구성된 압축재의 국부좌굴에 대하여 검토하였으며, 국내에서 생산된 직교이방성 판요소로 구성된 압축재의 국부좌굴강도를 계산하였다.

Key Words: pultruded FRP (펄트루전 FRP), plate buckling (판의 좌굴), local buckling (국부좌굴), closed-form solution (정밀해법), energy solution (에너지법).

1. 서 론

섬유강화플라스틱(Fiber Reinforced Polymeric Plastic, FRP)은 단위중량당의 강도와 강성이 크고, 가볍고 내부식성이 크다는 점 등 많은 역학적, 물리적 성질에서 장점을 갖고 있기 때문에 최근 토목분야에서 구조용 재료로써 그 이용분야가 점차 증가되고 있다. FRP 부재의 생산방법은 여러 가지가 있으나 구조용 부재를 경제적으로 생산하기에 적합한 방법은 펄트루전 공정(pultrusion process)이다. 펄트루전 공정은 수지에 함침시킨 보강섬유를 가열장치가 되어있는 성형몰드를 통과시켜 인발하면서 연속적으로 일정한 단면의 부재를

생산하는 방법이다. 이러한 공정특성상 펄트루전 FRP(pultruded FRP, PFRP) 부재는 부재의 길이방향과 이에 직각되는 방향의 재료의 역학적 성질이 서로 다른 직교이방성 재료(orthotropic material)로 가정할 수 있다.

PFRP는 다른 구조용 재료에 비하여 낮은 탄성계수를 가지며 단면이 얇은 판요소로 구성되어 있기 때문에 압축재로 사용하기 위해서는 전체좌굴 및 국부좌굴에 대한 영향을 고려한 설계가 필요하다. 이 논문에서는 기존 연구 내용(Yoon, 1993; Joo, 2010; 최, 2011)을 참고하여 하중이 재하되지 않는 면의 여러 가지 경계조건을 고려한 직교이방성 판의 좌굴과 직교이방성 판요소로 구성된 단면을 갖는 펄트루전 FRP 압축재의

* 정회원 홍익대학교 토목공학과 박사과정

** 정회원 홍익대학교 토목공학과 석사과정

***† 정회원 홍익대학교 토목공학과 교수, 교신저자(sjyoon@hongik.ac.kr)

국부좌굴에 대한 정밀해법과 에너지법을 설명하여 두 해석방법의 차이 및 특징을 정리하고 국내에서 생산되고 있는 PFRP 압축재에 대한 국부좌굴해석을 수행하여 국내에서 생산된 PFRP 압축재에 대한 설계규준을 마련하기 위한 기초 자료를 제시하였다.

2. 정밀해법에 의한 직교이방성 판의 좌굴해석

일반적인 구조용 강재나 PFRP 구조용 압축재는 여러 개의 판요소들로 구성되어 있고, 국부좌굴은 각 판요소들의 좌굴로 인해 발생한다. 따라서, 압축재의 국부좌굴해석을 수행하기 위해서는 판요소의 좌굴에 대한 해석이 선행되어야 한다. Levy의 방법을 적용하여, 고전적 직교이방성 판이론에 의한 직교이방성 판의 좌굴해석은 Fig. 1에 나타난 것과 같이 등분포 압축력 P 가 작용하고, 하중이 작용하는 두 변은 단순지지, 하중이 재하되지 않는 두 변은 임의의 경계조건인 상태에 서 수행할 수 있다.

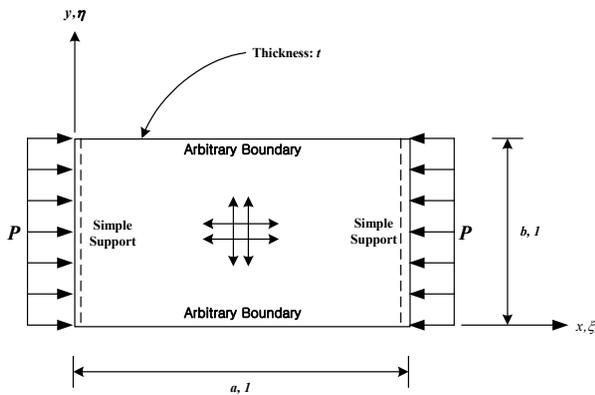


Fig. 1 등분포 압축력을 받는 직교이방성 판(최, 2009)

Fig. 1에 나타난 직교이방성 판은 길이 a , 폭 b 를 단위길이로 지정하기 위해 x, y 좌표를 무차원화된 ξ, η 좌표로 표현하여 해석과정을 단순화하였다. 직교이방성 판의 좌굴해석을 위한 가정사항은 다음과 같다 (Yoon, 1993).

- (1) 판을 구성하는 재료의 역학적 성질은 탄성, 균질, 특별직교이방성이다.
- (2) 판은 하중이 재하되기 전에는 완전한 평면을 유지한다.
- (3) 판의 두께는 폭과 길이에 비해 매우 작다.
- (4) 판의 처짐은 판의 두께에 비해 매우 작다.
- (5) 판의 두께는 일정하다.
- (6) 변형된 판의 중립면에 대한 처짐각은 매우 작다.
- (7) 판 두께 방향의 전단력(transverse shear)에 의한 변형은 무시한다.

직교이방성 판의 좌굴에 대한 지배미분방정식은 유도과정의 편의를 위해 식 (1a), (1b)에 나타난 바와 같이, 판의 길이와 폭을 무차원화하여 식 (2)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\xi = \frac{x}{a} \tag{1a}$$

$$\eta = \frac{y}{b} \tag{1b}$$

$$\frac{D_{11}}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = -\frac{P}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \tag{2}$$

식 (1a), (1b)에서 ξ 와 η 는 각각 변수 x, y 를 무차원화한 좌표로서 식 (3a), (3b)의 관계를 갖는다. 또한, 식 (2)에서 D_{11}, D_{22} 는 1, 2방향에 대한 판의 휨강성이고, D_{66} 는 비틀림강성을 의미하며 각각 식 (4a)~(4c)에 나타내었다. 또한 D_{12} 는 직교이방성의 특성에 따라 식 (4d)의 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} \tag{3b}$$

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \tag{4a}$$

$$D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \tag{4b}$$

$$D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12} \tag{4c}$$

$$D_{12} = \nu_{12} D_{22} = \nu_{21} D_{11} \tag{4d}$$

식 (4a)~(4d)에서 E_{11} 은 x 축 방향의 탄성계수, E_{22} 는 y 축 방향의 탄성계수, G_{12} 는 전단탄성계수, ν_{12} 는 x 축 방향의 포아송비, ν_{21} 는 y 축 방향 포아송비, t 는 판의 두께를 의미한다.

식 (2)은 판의 폭과 길이의 비인 식 (5a)와 휨강성 간의 매개변수인 식 (5b), (5c)를 이용하여 식 (6)과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$s = \frac{b}{a} \tag{5a}$$

$$\lambda_1 = \left(\frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5b)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5c)$$

$$s^4 \lambda_1^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2s^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \pi^2 s^2 \lambda_1^2 k \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (6)$$

식 (6)에서 k 는 직교이방성 판의 좌굴계수(buckling coefficient)로서 식 (7)과 같다(Yoon, 1993).

$$k = \frac{Pb^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (7)$$

Fig. 1에 나타난 직교이방성 판은 하중이 재하되는 마주보는 두 변이 단순지지로 가정하였기 때문에 Levy의 방법을 사용하면 처짐방정식은 ξ 축 방향의 처짐곡선식과 η 축 방향의 처짐곡선식의 곱으로 표현된다. Levy의 방법을 사용한 판의 처짐식은 식 (8)과 같다.

$$w = f(\eta) \sin m \pi \xi \quad (8)$$

식 (8)에서 m 은 $0 \sim \pi$ 까지의 half-sine 곡선 형상의 수를 나타낸 것이며, 처짐식 w 를 ξ 와 η 에 대하여 각각 미분하여 식 (6)에 대입하면, 식 (9)와 같이 $f(\eta)$ 에 대한 4차 상미분방정식으로 정리할 수 있다.

$$\frac{d^4 f(\eta)}{d\eta^4} - 2m^2 \pi^2 s^2 \lambda_2^2 \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + m^4 \pi^4 s^4 \lambda_1^4 \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2} \right) f(\eta) = 0 \quad (9)$$

식 (9)에 나타난 미분방정식은 식 (10)에 나타난 미분방정식을 대입하여 계산하며, 그 해는 식 (11)과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(\eta) = e^{\gamma \eta} \quad (10)$$

$$f(\eta) = A_1 \cosh \alpha \eta + A_2 \sinh \alpha \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta \quad (11)$$

식 (11)에서 A_i ($i=1, 2, 3, 4$)는 직교이방성 판의 처짐형상을 나타내는 임의의 계수이며, α, β 는 식 (12a), (12b)에 나타난 것과 같다.

$$\alpha = m \pi s \lambda_2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4} \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2} \right)}} \quad (12a)$$

$$\beta = m \pi s \lambda_2 \sqrt{-1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4} \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2} \right)}} \quad (12b)$$

식 (11)을 식 (8)에 대입하면 직교이방성 판의 좌굴에 대한 처짐식은 식 (13)과 같이 정리되며, 식 (4a), (4b)를 식 (7)에 대입하고 판의 길이방향에 대한 단면적을 $A(=b \times t)$ 라고 하면, 좌굴응력은 식 (14)와 같이 표현된다. 즉, Fig. 1에 나타난 직교이방성 판의 처짐식은 식 (13)과 같으며, 좌굴강도는 식 (14)와 같다(Yoon, 1993).

$$w = (A_1 \cosh \alpha \eta + A_2 \sinh \alpha \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta) \sin m \pi \xi \quad (13)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = k \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left(\frac{b}{t} \right)^2} \quad (14)$$

식 (13)은 하중이 재하되지 않는 직교이방성 판의 양 변이 임의의 경계조건이므로, 특정 경계조건식을 대입하면 4원 1차 제차연립방정식을 얻을 수 있다. 이 식들을 행렬식의 형태로 표현하면 식 (15)와 같다.

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)에서 C_i ($i=1 \sim 16$)는 4원 1차 제차연립방정식의 계수이다. 식 (15)에서 A_i ($i=1, 2, 3, 4$)의 값이 0이 되지 않는 해(non-trivial solution)를 구하기 위해선 계수행렬의 행렬값(determinant)이 0이 되는 고유치문제(eigenvalue problem)를 해결해야 한다. 이때, 고유치는 판의 좌굴계수 k 가 되고 고유벡터는 좌굴모드를 나타낸다. 또한, 좌굴계수 k 와 식 (14)를 이용하여 판의 좌굴강도를 구할 수 있다. 각 경계조건에 대한 좌굴해석식은 식 (16)~(22)와 같이 초월함수식(transcendental equation)이 구해지며, 해는 수치해석적으로 계산할 수 있다(Yoon, 1993; Joo, 2010; 최, 2009).

$$SS = -(\alpha^2 + \beta^2)^2 \sinh(\alpha) \sin(\beta) = 0 \quad (16)$$

$$SF = (\chi^2 + \psi^2)(\beta \sinh \alpha \cos \beta - \alpha \cosh \alpha \sin \beta) = 0 \quad (17)$$

$$FF = -2\alpha\beta(1 - \cosh \alpha \cos \beta) - (\alpha^2 - \beta^2) \sinh \alpha \sin \beta = 0 \quad (18)$$

$$SFr = -(\chi^2 + \psi^2)(\beta \chi^4 \sinh \alpha \cos \beta - \alpha \psi^4 \cosh \alpha \sin \beta) = 0 \quad (19)$$

$$FFr = 2\alpha\beta\chi\psi + (\beta^2\chi^4 - \alpha^2\psi^4) \sinh\alpha \sin\beta + \alpha\beta(\chi^2 + \psi^2) \cosh\alpha \cos\beta = 0 \quad (20)$$

$$SSy = \alpha\beta(\chi^2 + \psi^2) \cosh\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} = 0 \quad (21)$$

$$FSy = \alpha\beta\left(\alpha \sinh\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} + \beta \cosh\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}\right) = 0 \quad (22)$$

식 (16)~(22)에서 좌항의 S 는 단순지지, F 는 고정지지, Fr 은 자유단, Sy 는 대칭면을 나타낸 것으로 예로서 SFr 은 $x=0(\xi=0)$ 인 변이 단순지지이고 $x=a(\xi=1)$ 인 변이 자유단이라는 것을 의미하며, 우항의 χ , ψ 는 식 (23)~(24)에 나타낸 것과 같은 매개변수식이다.

$$\chi = \alpha^2 - \nu_{12}m^2\pi^2s^2 \quad (23)$$

$$\psi = \beta^2 + \nu_{12}m^2\pi^2s^2 \quad (24)$$

3. 에너지법에 의한 직교이방성 판의 좌굴해석

에너지법은 에너지 보존의 법칙에 따라 부재에 작용하는 모든 외력에 의한 외적 일(work-done, W)이 부재에 변형이 발생하도록 하는 내적 일(internal energy, strain energy, U)로 전환됨을 이용하여 구조해석을 수행하는 방법이다. 직교이방성 판의 좌굴해석을 위한 외적 일과 내적 일에 대한 식은 각각 식 (25), (26)과 같다(윤 등, 1995; Joo, 2010).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{11}\nu_{21} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (25)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (26)$$

식 (25), (26)에 에너지 보존의 법칙을 적용하고 처짐 식을 식 (27)로 가정하면, 좌굴하중 P 는 식 (28)과 같이 유도된다.

$$w = f(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (27)$$

$$P = \frac{\sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 B_1 - 2\nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} B_2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} B_3 + \frac{4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} B_4 \right\} \quad (28)$$

식 (28)에서 좌굴하중은 B_i ($i=1, 2, 3, 4$)와 재료의 역학적 성질 및 좌굴형상에 대한 항의 곱으로 표현된다. 이때, B_i ($i=1, 2, 3, 4$)는 y 축 방향의 처짐모양을 가정한 처짐식을 적분한 변수로서 식 (29a, b, c, d)로 나타낼 수 있으며 식 (29a, b, c, d)는 직교이방성 판의 하중이 재하되지 않는 변의 경계조건과 단면의 기하학적 성질에 의한 영향을 포함하고 있는 변수이다. 즉, 처짐식을 가정하여 식 (29a, b, c, d)에 대입하면 직교이방성 판의 하중이 재하되지 않는 변의 영향을 고려한 좌굴해석식을 유도할 수 있다. 좌굴해석식을 유도하기 위해 각 경계조건에 따라 가정하는 직교이방성 판의 처짐식은 Table 1과 같이 나타낼 수 있다(Joo, 2010).

$$B_1 = \frac{\int_0^b f(y)^2 dy}{\int_0^b f(y)^2 dy} \quad (29a)$$

$$B_2 = \frac{\int_0^b f(y) \frac{d^2 f(y)}{dy^2} dy}{\int_0^b f(y)^2 dy} \quad (29b)$$

$$B_3 = \frac{\int_0^b \left\{ \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \right\}^2 dy}{\int_0^b f(y)^2 dy} \quad (29c)$$

$$B_4 = \frac{\int_0^b \left\{ \frac{df(y)}{dy} \right\}^2 dy}{\int_0^b f(y)^2 dy} \quad (29d)$$

Table 1 경계조건에 따른 판의 좌굴에 대한 처짐식(주 등, 2004; Joo, 2010)

경계조건	처짐식
Simple-Simple	$f(y) = \sin \frac{\pi y}{b}$
Simple-Free	$f(y) = \frac{y}{b}$
Fix-Fix	$f(y) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$
Fix-Free	$f(y) = 1 - \cos \frac{\pi y}{2b}$

식 (14)와 같은 방법을 적용하여, 식 (26)을 좌굴응력

으로 표현하면 식 (30)과 같으며, 식 (30)에서 중괄호 ({})안의 값을 좌굴계수(k)라고 하여 나타내고 판의 형상비(aspect ratio, a/mb)를 ϕ_m 으로 정의하면 좌굴계수 k 는 식 (31)으로 정의할 수 있다. 식 (31)에서 C_i ($i=1, 2, 3$)는 각각 식 (32a)~(32c)로 정의된다(Joo, 2010).

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})\left(\frac{b}{t}\right)^2} \left\{ \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 B_1 - 2\nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} B_2 + \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} B_3 + \frac{4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} B_4 \right\} \quad (30)$$

$$k = \frac{C_1}{\phi_m^2} + C_2 \phi_m^2 + C_3 \quad (31)$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} B_1 \quad (32a)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \left(\frac{b}{\pi}\right)^4 B_3 \quad (32b)$$

$$C_3 = \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \left\{ \frac{4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} B_4 - 2\nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} B_2 \right\} \quad (32c)$$

Table 1에 나타난 식들을 식 (29a)~(29d)에 대입하고, 식 (28)에 적용하여 구한 직교이방성 판의 좌굴계수는 Table 2에 나타난 바와 같다. 에너지법은 정밀해법에 비해 쉽게 좌굴강도를 구할 수 있으며, 정밀해법으로 구한 좌굴계수와 오차는 1% 이내로써 주로 처짐식의 가정에서 발생한 오차이다(Joo, 2010).

Table 2 경계조건에 따른 직교이방성 판의 좌굴계수식 (Joo, 2010)

경계조건	좌굴계수식
Simple -Simple	$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \frac{1}{\phi_m^2} + \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \phi_m^2 + \frac{4G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} + 2\nu_{21} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}$
Simple -Free	$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \frac{1}{\phi_m^2} + \frac{12G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\pi^2 \sqrt{E_{11}E_{22}}}$
Fix -Fix	$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \frac{1}{\phi_m^2} + 4\sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \phi_m^2 + \frac{16G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{3\sqrt{E_{11}E_{22}}} + \frac{16}{3b^2\nu_{21}} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}$
Fix -Free	$k = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \frac{1}{\phi_m^2} + \frac{1}{3\pi-8} \left\{ \frac{\pi^3}{16} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \phi_m^2 + \frac{\pi}{4} \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} - 2\nu_{21} \frac{4-\pi}{4} \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \right\}$

4. 직교이방성 I형 단면 부재의 국부좌굴

직교이방성 압축재의 국부좌굴은 식 (16)~(22)에 나타난 것과 같은 판의 좌굴해석식을 이용하여 해석할 수 있으며, 여러 가지 단면 형상에 대하여 이미 발표된 바 있다(Yoon, 1993; Joo, 2010). Fig. 2는 x 축 방향으로 압축력이 작용하는 직교이방성 I형 단면 압축재이며, Fig. 3은 국부좌굴이 발생하기 전과 후의 I형 단면의 형태를 나타낸 것이다.

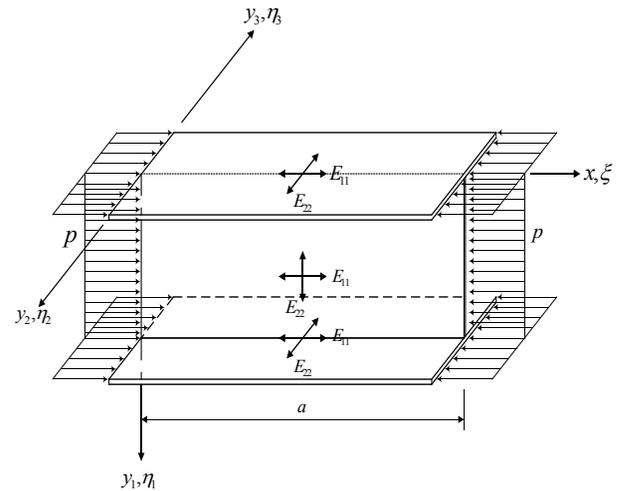


Fig. 2 등분포 압축력을 받는 직교이방성 I형 단면 압축재(최, 2009)

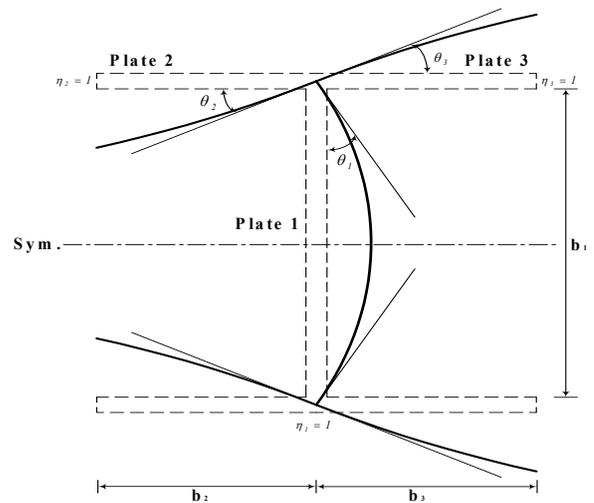


Fig. 3 직교이방성 I형 단면 압축재의 좌굴발생 전 후 단면 형상(최, 2009)

직교이방성 I형 단면 부재의 국부좌굴해석은 직교이방성 판에 대한 고전적인 탄성해석의 기본 가정사항과 다음에 나타난 판요소의 접합부에서의 적합관계에 대한 추가적인 가정사항이 필요하다. 식 (33)~(35)는 각 가정사항에 대한 적합방정식을 나타낸 것이다(Yoon,

1993; Jung, 2003).

(1) 각 판요소들의 접합부에서의 면외치짐은 발생하지 않는다.

(2) 좌굴이 발생하기 전 각 판요소들 사이의 작은 좌굴발생 후에도 일정하다.

(3) 접합부에서 각 판요소에 작용하는 모멘트의 총합은 0이다.

$$(w_i)_{\eta=0} = 0 \tag{33}$$

$$\left(\frac{1}{b_i}\right)\left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta_i}\right)_{\eta_i=0} + \left(\frac{1}{b_{i+1}}\right)\left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \eta_{i+1}}\right)_{\eta_{i+1}=0} = 0 \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{D_{22i}}{b_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta_i^2} + \nu_{12} s_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_i^2}\right)_{\eta_i=0} = 0 \tag{35}$$

Fig. 3에서 1~3번 판요소의 접합부에서의 경계조건은 특정 경계조건으로 이상화한 판의 경계조건으로 표현할 수 있다. 즉, I형 단면 부재의 국부좌굴해석을 수행할 때, 1번 판요소는 단순지지-대칭면, 2번과 3번 판요소는 단순지지-자유단 및 고정지지-자유단으로 특정화하여 각각 직교이방성 판의 좌굴해석을 수행할 수 있다.

3개의 판요소가 1개의 접합부를 형성하므로 I형 단면 부재의 국부좌굴해석은 식 (13)을 이용하여 식 (33)~(35)에 나타난 접합부에서의 가정사항과 각 판요소의 경계조건 및 하중조건을 적용하여 유도하면 12차 연립방정식이 구해진다.

식 (15)와 동일한 방법으로 12차 연립방정식을 행렬식으로 표현하면 각 판요소의 치짐을 나타내는 계수는 0이 아닌 고유치문제(eigenvalue problem)가 된다. 행렬값(determinant)이 0이 되는 조건에서 행렬값을 전개하면, I형 단면의 좌굴해석식은 식 (36)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{SSy}{FSy}\right)_1 + \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^3 \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 + \frac{b_1}{b_3} \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^3 \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_3 = 0 \tag{36}$$

식 (36)에서 $b_i(i=1, 2, 3)$ 는 각 판요소의 폭, $t_i(i=1, 2, 3)$ 는 각 판요소의 두께를 의미하며 아래첨자는 각 번호에 해당하는 판요소를 나타낸 것이다. 보통 PFRP 부재는 플랜지와 복부의 두께가 같고, 재료의 역학적 성질이 동일하도록 생산되므로, 식 (36)에서 2번 판요소와 3번 판요소는 1번 판요소를 기준으로 대칭이고 ($b_2 = b_3$), 재료의 역학적 성질과 두께가 같다 ($t_1 = t_2 = t_3$)고 가정하면 식 (37)과 같이 간단한 형태로 표현된다.

$$\left(\frac{SSy}{FSy}\right)_1 + 2\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 = 0 \tag{37}$$

압축재에 국부좌굴이 발생할 경우, 전체 판요소가 동시에 좌굴하므로 국부좌굴강도는 전체 단면 내에서 일정하며, 플랜지와 복부의 재료의 역학적 성질이 같은 경우, 각 판요소의 좌굴계수는 식 (38)과 같은 관계가 성립한다.

$$k_2 = k_1 \left(\frac{b_2}{t_2}\right)^2 \left(\frac{t_1}{b_1}\right)^2 \tag{38}$$

식 (38)에서 k_1 은 플랜지의 좌굴계수, k_2 는 복부의 좌굴계수를 의미한다. 식 (38)은 경계조건 및 폭-두께 비로 인해 플랜지와 복부의 좌굴계수가 다르게 나타나지만, 부재의 국부좌굴은 모든 판요소가 동시에 좌굴하며 발생한다는 것을 의미한다.

다른 단면 형태를 갖는 부재의 국부좌굴해석식은 I형 단면의 국부좌굴해석을 수행할 때 사용한 가정사항들을 이용하여 유사한 방법으로 구할 수 있다. Table 3은 식 (16)~(22)에 나타난 판의 좌굴해석식과 식 (33)~(35)에 나타난 적합조건식을 이용하여 I형, Box형, T형, ㄱ형 단면에 대한 국부좌굴해석식을 나타낸 것이다.

Table 3 단면 형태에 따른 국부좌굴해석식(Yoon, 1993)

단면형태	국부좌굴해석식
I형	$\left(\frac{SSy}{FSy}\right)_1 + 2\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 = 0$
Box형	$\left(\frac{SSy}{FSy}\right)_1 + \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{SSy}{FSy}\right)_2 = 0$
T형	$\left(\frac{SFr}{FFr}\right)_1 + 2\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 = 0$
L형	$\left(\frac{SFr}{FFr}\right)_1 + \frac{b_1}{b_2} \left(\frac{SFr}{FFr}\right)_2 = 0$

5. 직교이방성 판의 좌굴 및 압축재의 국부좌굴계수

직교이방성 판 좌굴계수 및 압축재의 국부좌굴계수와 좌굴길이(buckled wave length)는 좌굴계수와 부재 길이와의 관계 그래프(garland curve)를 통해 결정할 수 있다. 이 논문에서는 국내에서 생산되는 PFRP 부재(G사)의 역학적 성질을 시험을 통해 구하고, 이 논문에서 설명한 정밀해법을 적용하여 좌굴계수 및 좌굴강도를 구하였다. G사에서 생산되는 PFRP 부재는 Fig. 4에 나타내었으며 해당 부재의 단면 크기는 Fig. 5에 나타내었다.



Fig. 4 국내(G사)에서 생산된 PFRP(윤, 2011)

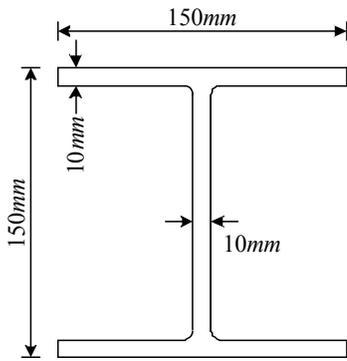


Fig. 5 PFRP 부재의 단면 형상 및 치수(윤, 2011)

Fig. 4에 나타난 PFRP 부재의 역학적 성질은 부재 축방향에 대한 인장강도시험, 부재 축의 직각방향에 대한 압축강도시험(시편의 길이를 확보하는데 어려움이 있으며, 인장과 압축의 탄성계수는 거의 유사하다는 가정을 도입함), 그리고 전단강도시험(Iosipescu shear test)을 통해 조사하였다. 조사한 PFRP 부재의 역학적 성질은 Table 4에 정리하였다.

Table 4 PFRP 압축재의 역학적 성질(윤, 2011)

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}	ν_{21}
33.48	14.18	5.40	0.29	0.12

이 논문에서는 Table 4에 나타난 재료의 역학적 성질을 이용하여 다양한 경계조건을 갖는 임의의 PFRP 판에 대한 좌굴해석을 수행하였다. 해석결과로부터 얻은 각 경계조건에 대한 최소좌굴계수는 Table 5에 정리하였으며, 최소좌굴계수를 구하기 위한 판의 좌굴계수와 형상비의 관계 그래프는 Fig. 6에 나타내었다.

Table 5 경계조건별 PFRP 판의 좌굴계수

경계조건	최소좌굴계수(k_{min})
Simple-Simple	3.334
Fixed-Fixed	6.170
Fixed-Free	1.110
Simple-Free	0.321

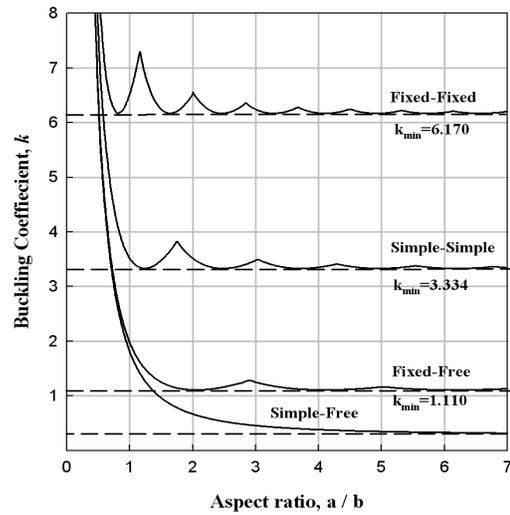


Fig. 6 판의 좌굴계수와 형상비의 관계

Figs. 4, 5에 나타난 PFRP 부재의 복부와 플랜지 및 판의 좌굴계수를 예측하기 위한 그래프(garland curve)는 각각 Figs. 7, 8에 나타내었다. 해석결과 PFRP 부재의 좌굴계수는 복부 약 1.842, 플랜지 약 0.534임을 알 수 있었다. 또한, 이 값들을 식 (14)에 대입하여 구한 PFRP 부재의 국부좌굴강도는 200.82MPa임을 알 수 있었다.

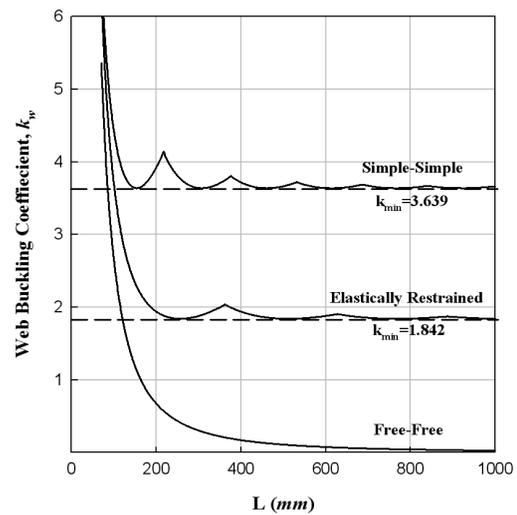


Fig. 7 복부의 좌굴계수와 부재 길이와의 관계

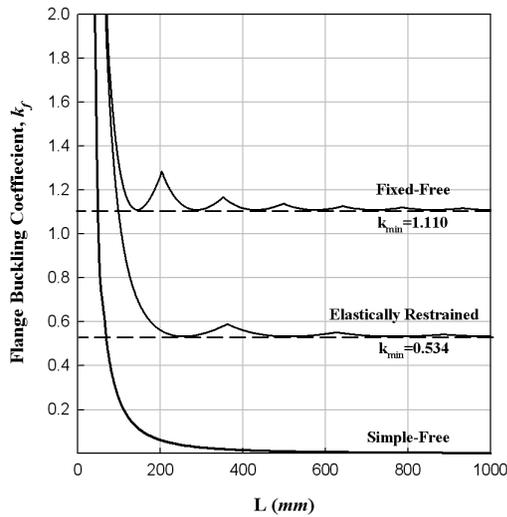


Fig. 8 플랜지의 좌굴계수와 부재 길이와의 관계

6. 결 론

이 논문에서는 제조과정의 특성상 직교이방성으로 간주할 수 있는 PFRP 구조용 부재의 좌굴해석을 수행하기 위하여 판의 좌굴해석방법을 정밀해법과 에너지법으로 구분하여 제시하였고, I형 단면 압축재의 국부 좌굴해석 방법을 소개하였다. 또한, 국내에서 생산중인 PFRP 구조용 부재에 대한 판의 좌굴해석 및 부재의 국부좌굴해석을 수행하여 좌굴계수 및 좌굴강도를 제시하였다. 또한, 이 연구의 결과를 이용하여 국부좌굴이 발생하지 않을 압축재 판요소의 폭-두께비를 구할 수 있으며, 이 연구에서와는 다른 형태의 하중을 받는 휨부재 압축 플랜지 및 복부의 국부좌굴에 대한 해석이 가능하며, 국부좌굴이 발생하지 않을 폭-두께비를 구할 수 있다.

PFRP 구조용 부재의 좌굴해석은 이 논문에서 제시한 것 외에 다양한 하중조건 및 판의 형상에 대하여 많은 연구가 진행되었다. 또한, 이 논문에서 제시한 방법을 이용하여 PFRP 구조용 부재에 대한 설계방법을 개발하고자 하는 연구도 다양하게 진행되고 있다. 현재 미국에서는 PFRP 구조용 압축재의 설계법에 이와 같은 해석방법을 적용하였으며, 국내에서도 이와 관련된 많은 연구가 진행되고 있으므로 앞으로는 표준화된 설계기준 등이 출현할 수 있을 것으로 예상된다.

감사의 글

이 연구는 한국연구재단의 기초연구사업(No. R01-2008-000-21103-0)의 지원으로 수행되었으며, 연구비 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

1. 윤순중(2011) 국토의 효율적 이용을 위한 친환경 부유식 태양광 발전 시스템 개발, 연구보고서, 홍익대학교, 한국해양과학기술진흥원.
2. 윤순중, 문환두, 이원복(1995) 직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계기준에 대한 연구, 대한토목학회논문집, 대한토목학회, pp.533-544.
3. 주형중, 정재호, 이승식, 윤순중(2004) 펄트루전 I형 단면 압축재의 국부좌굴계수 계산을 위한 근사식의 개발, 한국복합재료학회 춘계학술발표대회 논문집, 한국복합재료학회, pp.629-634.
4. 최진우(2010) 면내 재료의 역학적 성질 변화에 따른 펄트루전 FRP 구조용 부재의 국부좌굴하중, 석사학위논문, 홍익대학교.
5. 최진우, 김재욱, 주형중, 윤순중(2010) I형과 Box형 단면을 갖는 펄트루전 FRP 압축재의 형상계수, 한국복합신소재구조학회 학술발표회 논문집, pp.65-66.
6. Joo, H. J. (2010) Buckling Behavior and Design of Pultruded Thin-walled Open Section Compression Members, *PhD Thesis*, Hongik University.
7. Jung, J. H. (2003) A Simplified Analytical Model for Local Buckling of Pultruded Box-Shape Flexural Members, *PhD Thesis*, Hongik University.
8. Yoon, S. J. (1993) Local Buckling of Pultruded I-Shape Columns, *PhD Thesis*, Georgia Institute of Technology.