

## A Study on the Cascading Chebyshev Filter for Ripple Cancellation

강 두 병\* · 신 승 식†  
(Doo-Byung Kang · Seung-sik Shin)

**Abstract** - This paper is focusing on the comparison of different kinds of BPFs(Band Pass Filters) passing signals with a particular frequency band. According to the different classifications, features and target application systems, BPF has many types. Chebyshev filter which has a steep slope and a few ripples, and Butterworth filter which has no ripple but gentle slope are the most typical BPFs. The ideal filter is flat in the passband and the slope in the transition band is perpendicular. In this paper, we suggest the cascading Chebyshev BPF with the advantages of the Chebyshev filter and the Butterworth filter simultaneously to make a closest filter to an ideal filter. The proposing BPF is the tenth Chebyshev BPF cascading the fourth and the sixth, and it is designed as the tenth cascading Chebyshev BPF. To measure the performance of the designing filter, we have compared and analyzed the tenth Chebyshev filter with the tenth Butterworth filter. As a result, the tenth cascading Chebyshev BPF has decreased the ripple more than 1/4 [dB] in the passband. Finally, the output of the simulation showed the validity of the proposing cascading Chebyshev filter.

**Key Words** : Chebyshev filter, Ripple cancellation, BPF

### 1. 서 론

최근 데이터 통신 기술의 발달은 보다 향상된 성능의 하드웨어 시스템을 필요로 하게 되었고 또한, 휴대용 멀티미디어 기기 시장의 성장은 높은 성능 뿐 아니라 낮은 소비 전력에 대한 사양을 요구하게 되었다.[1] 이러한 추세에 대응하기 위해 디지털 회로와 아날로그 회로 설계에 있어서도 고성능 및 저전력의 제품의 많은 개발이 진행 되고 있다. 통신 및 데이터 전송 시스템에서 필터의 역할은 근접 채널 신호의 간섭을 억제하고, 불필요한 왜곡 신호의 출력을 방지하거나 잡음을 제거하는 역할을 수행한다. 또한, 아날로그 신호와 디지털 신호 사이의 변환 작업 또는 디지털 펄스 신호 처리에 필요로 하는 적합한 형태로 파형을 등화하거나 변형시키는 등의 동작을 수행하게 된다. 이 때문에 필터의 중요성이 강조되어 지고 있다.[2]

필터는 크게 4가지로 구분 지을 수 있다. 첫 번째로 저역 통과필터(LPF: Low-Pass Filter)이다. 고주파의 잡음을 걸러내어 저주파의 필요한 신호만을 원하는 경우에 사용된다. 두 번째로 고역통과필터(HPF: High-Pass Filter)이다. 이것은 LPF와 반대로 저주파의 잡음을 걸러내어 고주파의 필요한 신호만을 원하는 경우에 사용된다. 세 번째로 대역통과 필터(BPF: Band-Pass Filter)이다. 이것은 원하는 주파수만

걸러내어 주는 역할을 한다. 네 번째가 대역저지필터(BSF: Band-Stop Filter, BRF: Band-Reject Filter, Notch Filter)이다. BPF와는 반대로 모든 주파수대역은 통과 시키지만 특정대역의 주파수만 통과시키지 않는 형태의 필터이다. 필터 중에서도 특히 BPF(Band-pass filter)가 주로 이용된다.[3]

BPF는 여러 주파수를 잘게 나누어 쓰는 현대 통신에서, 원하는 주파수대역만 정확하게 골라내야 하는 역할을 하게 된다.

본 논문에서 다루고 있는 내용인 Butterworth 필터와 Chebyshev 필터의 장점을 가지는 필터를 구현하려는 연구는 현재도 진행중이다. 최근의 연구는 Chebyshev LPF와 Elliptic LPF의 조합으로 통과대역은 평탄하고 천이대역의 경사도는 크게 만드는 연구가 진행 되고 있다.[5][6]

이와는 다르게 본 논문은 Chebyshev BPF 두 개를 결합하는 논문으로써 BPF의 필터 성능을 결정지어주는 통과대역내의 리플과  $\epsilon_2$ 를 30dB로 정한 천이대역을 측정하는 방법으로 시뮬레이션을 통해 성능을 비교하여 보았다.

### 2. 필터 설계과정

본 논문에서 언급하는 필터의 설계과정을 보면 첫째로, n차 저역통과필터의 크기를 나타내는  $|H(j\omega)|$ 를 정의한다.[4]

Butterworth :

$$|H_B(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\epsilon^2\omega^{2n}}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

\* 정 회 원 : (주) 한일전기 연구원

† 교신저자, 정회원 : 동양미래대학 전기시스템과 전임강사

E-mail : manmind@dongyang.ac.kr

접수일자 : 2011년 9월 28일

최종완료 : 2011년 12월 9일

Chebyshev :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \omega^{2k} C_{n-k}^2(\omega)}} \quad (2)$$

그림 1은 설계과정을 나타낸 것이고, 정의된  $|H(j\omega)|$ 에서 통과대역 파형크기를 나타내는 그림 2에서와 같이  $\epsilon_1$ 과 천이대역을 결정해주는  $\epsilon_2$ 를 정의한다. 또한 통과대역을 결정하는  $\omega_1$ 과 저지대역을 나타내는  $\omega_2$ 를 정의한다.

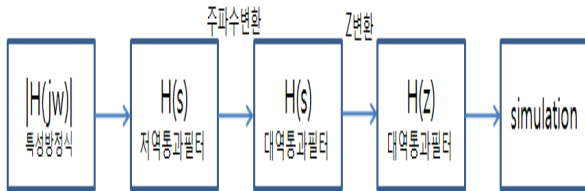


그림 1 필터의 설계과정  
Fig. 1 The design process of the filter

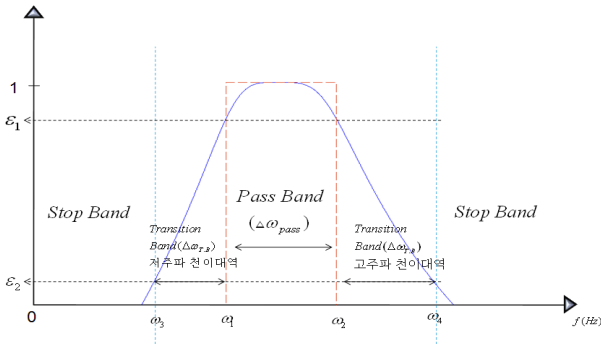


그림 2 필터 성능평가  
Fig. 2 The performance evaluation of the filter

둘째로, 정의된  $|H(j\omega)|$ 에서  $H(S)$ 로 근사화를 하게 된다. 셋째로,  $H(S)$ 를  $H(s)$ 로 만들어 주는 것인데 여기서  $H(S)$ 은 저역통과필터의 함수이고  $H(s)$ 은 주파수 변환을 통한 대역통과필터의 함수이다. 여기에서  $H(s)$ 는 항상 짝수차 항이 나온다.

이 작업을 거쳐  $H(s)$ 를 만든 후 2차필터의 조합으로 나타낸  $H_{1(s)}H_{2(s)}H_{3(s)} \times \dots$ 의 형태로 바꾸어주게 된다.

본 논문에서는  $H(s)$ 를 디지털로 시뮬레이션 하기 위해  $H(z)$ 로 샘플링 주파수를 맞추어 변환 하였고 시뮬레이션 하였다.

### 2.1 Butterworth BPF 설계의 예

통과역을 3dB로 하는 5차 Butterworth 저역통과필터함수  $H(S)$ 를 구해 보면 아래와 같다.

$$5차: \frac{K}{s^5 + 3.236068s^4 + 5.236068s^3 + 5.236068s^2 + 3.236068s + 1} \quad (3)$$

여기서 K는 스케일 계수(scale factor)를 나타낸다.

식(3)의 5차 LPF의  $H(S)$ 를 통과역이 93.567-106.628Hz이고 중심 주파수가 100Hz인 Butterworth 10차 BPF의  $H(s)$ 로 변환하면

$$\frac{3707398432s^5}{s^{10} + 265.357576s^9 + 528187.3212s^8 + 159866173.7s^7 + 1.07771925 \times 10^{11}s^6 + 1.548793248 \times 10^{13}s^5 + 1.062588071 \times 10^{16}s^4 + 5.367388319 \times 10^{17}s^3 + 5.062509608 \times 10^{20}s^2 + 2.507660135 \times 10^{22}s + 9.317437339 \times 10^{24}} \quad (4)$$

이다.

식 (4)를 2차필터의 조합으로 나타낸  $H_{1(s)}H_{2(s)}H_{3(s)} \times \dots$ 의 형태로 나타내면

$$\frac{3707398432s^5}{(s^2 + 237.96s + 242.7741^2)(s^2 + 0.068s + 305.6^2)(s^2 + 173.34s + 588.3784^2)(s^2 - 111.68s + 166.738^2)(s^2 - 565.06s + 419.365^2)} \quad (5)$$

이 된다.

$H(s) \rightarrow H(z)$ 로 변환하기 위해서 Tustin Transform을 이용한다.[7] 여기서 T는 샘플링 주파수(sampling time or sampling frequency)이다. 샘플링 주파수는 Shannon의 샘플링 이론(sampling theorem)에 의해 2배 이상이면 되지만 경험상으로 인한 완벽한 변환 샘플링은 15배로 정하였다.[7]

식(4)의  $H(s)$ 에서 T를 약15배로 한 1725Hz으로 하여  $H(z)$ 로 변환 하게 되면 다음과 같다.

$$\frac{7.058 \times 10^{-9}z^{10} - 3.529 \times 10^{-8}z^8 + 7.058 \times 10^{-8}z^6 - 7.058 \times 10^{-8}z^4 + 3.529 \times 10^{-8}z^2 - 7.058 \times 10^{-9}}{z^{10} - 9.2101z^9 + 38.71z^8 - 98.01z^7 + 165.3z^6 - 193.9z^5 + 160.3z^4 - 92.16z^3 + 35.3z^2 - 8.135z + 0.8573} \quad (6)$$

### 2.2 Chebyshev BPF 설계의 예

Chebyshev BPF도 앞에서 설명한 설계과정을 거쳐서 설계 되어지며 3장에서 조합 Chebyshev BPF와의 성능비교와 분석을 위해 10차를 설계하였다. 본 장에서는 Chebyshev 10차 BPF의 설계를 나타내었다.

리플의 크기가 1dB인 5차 Chebyshev 저역통과필터함수  $H(S)$ 를 구해 보면

$$\frac{K}{s^5 + 0.9368201s^4 + 1.688816s^3 + 0.9743961s^2 + 0.5805342s + 0.1228267} \quad (7)$$

구해진 5차 Chebyshev 저역통과필터함수  $H(S)$ 를 주파수 변환하면 통과역이 93.567-106.628Hz이고 중심 주파수가 100Hz인 Chebyshev 10차 BPF의  $H(s)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{3707398432s^5}{s^{10} + 76.8192482s^9 + 504335.5988s^8 + 45981674.4s^7 + 1.005968092 \times 10^{11}s^6 + 4.586579952 \times 10^{12}s^5 + 9.584717434 \times 10^{15}s^4 + 1.524803814 \times 10^{17}s^3 + 4.833898365 \times 10^{20}s^2 + 7.259515793 \times 10^{21}s + 9.317437339 \times 10^{24}} \quad (8)$$

이것을  $H_{1(s)}H_{2(s)}H_{3(s)} \times \dots$ 의 형태로 나타내면

$$\frac{3707398432s^5}{(s^2 + 236.52s + 260.928^2)(s^2 + 17305s + 503.864^2)(s^2 - 58.82s + 192.944^2)(s^2 - 112.74s + 323.5^2)(s^2 - 315.28s + 317.939^2)} \quad (9)$$

이다. 이렇게 구한  $H(s)$ 를 다시 샘플링을 15배로 하여  $H(z)$ 로 변환 하게 되면 다음과 같다.

$$\frac{9.15 \times 10^{10}z^{10} - 4.575 \times 10^{-9}z^8 + 9.15 \times 10^{-9}z^6 - 9.15 \times 10^{-9}z^4 + 4.575 \times 10^{-9}z^2 - 9.15 \times 10^{-10}}{z^{10} - 9.301z^9 + 39.56z^8 - 101.2z^7 + 172.6z^6 - 204.7z^5 + 171z^4 - 99.45z^3 + 38.52z^2 - 8.975z + 0.9564} \quad (10)$$

### 2.3 조합 Chebyshev BPF 설계의 예

Chebyshev 필터는 리플이 일정한 필터로 잘 알려져 있다. 일정한 리플은 차수에 의하여 진동수가 결정이 된다. 본 논문에서는 이러한 특징을 갖는 Chebyshev 4차 BPF와 Chebyshev 6차 BPF의 조합필터를 설계하였다. 조합필터의 원리는 이렇다. 그림 3과 같이 2개의 필터의 리플 주기를 이용하여 상승일때는 하강을 맞추고 하강일 경우는 상승을 맞추어서 리플이 일어나는 반대쪽으로 리플을 조합하여 상쇄시키는 것이다. 빨간색은 Chebyshev 4차 BPF이고 파란색은 Chebyshev 6차 BPF이다. 리플이 상쇄되면 Butterworth 필터의 장점인 통과대역의 평탄성을 만들 수 있게 되고 또한, Chebyshev 필터의 장점인 급격한 경사도의 특성이 남아 있게 되어 이상적인 필터로 설계 할 수 있게 된다.

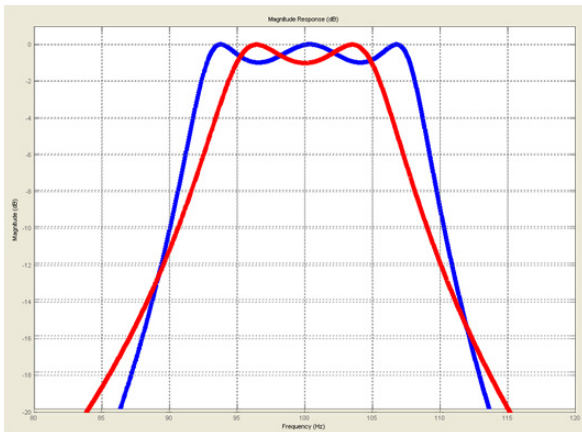


그림 3 Chebyshev 4차 BPF와 6차 BPF 조합의 예  
Fig. 3 Cascading of Chebyshev 4th BPF and 6th BPF

조합할 경우에 중요한 요소가 몇 가지 있다.

먼저 조합을 위한 필터는 차수가 정확히 2차의 차이가 나야한다. 그래야만 리플의 상쇄를 이룰 수 있다. 설계 순서는 다음과 같다.

2n차에 대하여 리플( $\epsilon_1$ )을 정하게 된다. 중심주파수를 정하고  $\Delta\omega_{pass}$ 를 정한다. 이렇게 정하고 나면 2차방정식으로  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 가 정해지게 된다.

2n차가 정해지면 2(n+1)차를 구할 수 있게된다. 중심주파수는 같은 값을 가지며 2n차에 대한  $\Delta\omega_{pass}$ 가 정해지면 2(n+1)차에 대한  $\Delta\omega_{pass}$ 도 구할 수 있다. 구해진 2(n+1)차에 대한  $\Delta\omega_{pass}$ 으로 위의 식을 반복하면 2(n+1)차의  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 도 구할 수 있다. 식으로 보면

$$\begin{aligned} 2(n+1) : \epsilon_1 &= 1dB \\ \omega_0 &= \omega_{0(2n)} \\ \Delta\omega_{pass} &\approx \Delta\omega_{pass(2n)} \times \frac{2(n+1)}{2n} \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

설계과정을 따라 계산하여 보면,

첫째로 기준조건을 정해준다. 본논문은 중심주파수 100Hz, 통과역 파형1dB, 통과역은 4차 Chebyshev BPF가 95-105Hz, 6차 Chebyshev BPF가 92.78-107.78Hz를 갖도록 계산되어진다.

둘째로 1dB의 리플을 갖는 저역통과필터의 식을 구한다.

$$\begin{aligned} 2차 : & \frac{K}{s^2 + 1.0977343s + 1.1025103} \\ 3차 : & \frac{K}{s^3 + 0.9883412s^2 + 1.2384092s + 0.4913067} \\ 4차 : & \frac{K}{s^4 + 0.9528114s^3 + 1.4539248s^2 + 0.7426194s + 0.2756276} \end{aligned} \quad (12)$$

이렇게 구한 저역통과필터식을 이용하여 필터의 설계과정을 따라 주파수 변환을 하게 된다.

주파수 변환을 한 Chebyshev BPF를 보면

$$\begin{aligned} 4차 : & \frac{9847.8418Ks^2}{s^4 + 68.97268s^3 + 793920.888s^2 + 27229322.4s + 1.55854 \times 10^{11}} \\ 6차 : & \frac{837169.4704Ks^3}{s^6 + 93.1489636s^5 + 800568.6983s^4 + 73958780.65s^3 + 3.16 \times 10^{11}s^2 + 1.45177 \times 10^{13}s + 6.15289 \times 10^{16}} \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)의 4차, 6차  $H(s)$ 를  $H_{1(s)}H_{2(s)}H_{3(s)} \times \dots$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} 4차 : & \frac{9847.8418Ks^2}{(s^2 - 36.02s + 657.087^2)(s^2 - 32.94s + 600.81^2)} \\ 6차 : & \frac{837169.4704Ks^3}{(s^2 + 574.1s + 628.26^2)(s^2 - 668.324s + 628.27^2)(s^2 + 1.08s + 628.42^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

지금까지  $H(s)$ 를 구하였다. 여기서 다시  $H(z)$ 로 변환하여 시뮬레이션을 해야한다. 1725Hz로 15배의 샘플링 주파수를 결정하였고 변환된  $H(z)$ 를 보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 \text{4차 : } & \frac{0.0003195z^4 - 0.000639z^2 + 0.0003195}{z^4 - 3.7z^3 + 5.383z^2 - 3.627z + 0.9608} \\
 \text{6차 : } & \frac{9.751 \times 10^{-6}z^6 - 2.925 \times 10^{-5}z^4 + 2.925 \times 10^{-5}z^2 - 9.751 \times 10^{-6}}{z^6 - 5.554z^5 + 13.23z^4 - 17.25z^3 + 12.99z^2 - 5.357z + 0.9474}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

### 3. 설계된 필터 성능비교 및 분석

통과대역은 최대평탄한 장점을 가지고 천이대역에서 감쇠 특성이 좋지 못한 단점을 가진 Butterworth 10차 BPF를 설계하였다. 그림 4와 같이 중심주파수는 100dB이고 통과대역을 93.567-106.628Hz로 설계하였고  $\epsilon_1$ 은 3dB이며  $\epsilon_2$ 는 30dB이다. Butterwoeth 필터는 리플이 없으므로 리플의 크기는 0dB이고, 천이대역에서 하한 주파수  $\omega_3$ 는 86.95Hz가 측정되었고 상한주파수  $\omega_4$ 는 112.47Hz가 측정되어 천이대역의 저주파영역은 6.617Hz이고 고주파영역은 5.842Hz가 이다.

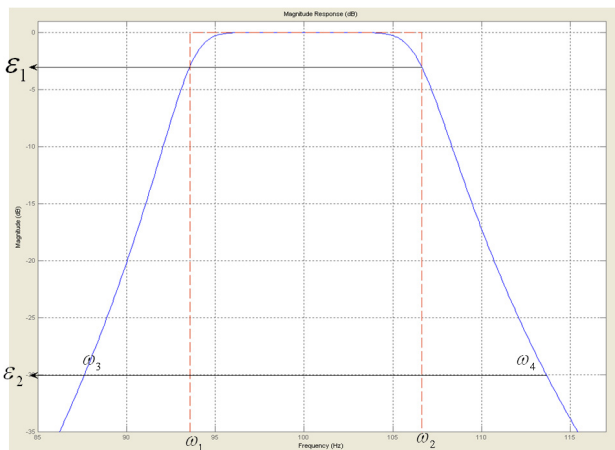


그림 4 Butterworth 10차 BPF  
Fig. 4 10th Butterworth BPF

천이대역에서 감쇠도가 좋은 장점이 있으나 통과대역에 일정크기의 리플이 생기는 단점이 있는 Chebyshev 10차 BPF를 설계하였다.

그림 5와 같이 중심주파수는 100dB이고 통과대역을 93.567-106.628Hz로 설계하였고  $\epsilon_1$ 은 1dB이며  $\epsilon_2$ 는 30dB이다.

Chebyshev 필터는  $\epsilon_1$ 이 리플의 크기와 같으므로 리플의 크기는 1dB이고, 천이대역에서 하한 주파수  $\omega_3$ 는 90.19Hz가 측정되었고 상한주파수  $\omega_4$ 는 109.55Hz가 측정되어 천이대역의 저주파는 3.377Hz이고 고주파는 2.922Hz가 나와 Butterworth 10차 BPF보다 훨씬 좋은 경사도를 보이는 것을 확인할 수 있다.

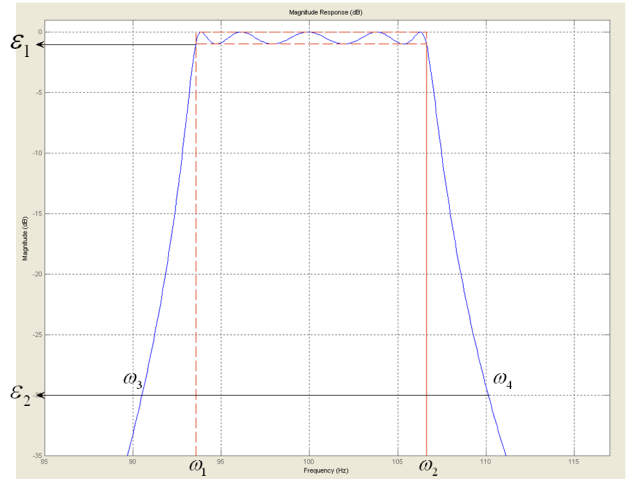


그림 5 Chebyshev 10차 BPF  
Fig. 5 10th Chebyshev BPF

조합 Chebyshev 10차 BPF는 Chebyshev 4차 BPF와 Chebyshev 6차 BPF를 종속연결하여 만든 필터이다. 4차의 중심주파수는 100dB이고 통과대역은 95-105Hz로 설계할 때  $\Delta\omega_{pass}$ 를 10Hz로 정하여 진다. 이때의 리플은 1dB다.

6차의 중심주파수도 100dB로 정하였고  $\Delta\omega_{pass}$ 를 수식에 의해 15dB로 정하였으며 통과대역을 구할 수 있다. 통과대역은 92.78-107.78Hz이며 리플은 1dB다.

두 Chebyshev BPF가 종속연결된 Chebyshev 10차 BPF은 그림 6에 나타내었고 중심주파수는 변함없이 100dB이고 리플의 크기는 서로 상쇄되어서 0.15dB(Max)로 크게 줄어들었고 천이대역에서 하한 주파수  $\omega_3$ 는 88.76Hz가 측정되었고 상한주파수  $\omega_4$ 는 110.81Hz가 측정되어 천이대역의 저주파는 4.807Hz이고 고주파는 4.182Hz가 나와 Butterworth 10차 BPF보다 훨씬 좋은 경사도를 보이고 Chebyshev 10차 BPF와 근접한 것을 확인할 수 있다.

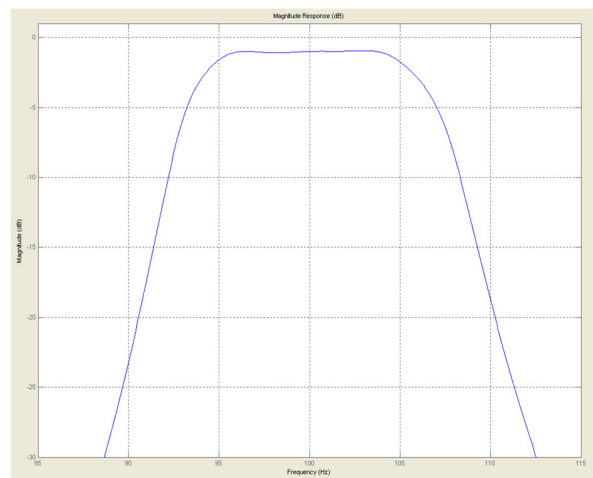


그림 6 조합 Chebyshev 10차 BPF  
Fig. 6 10th Cascading Chebyshev BPF

**표 1** n=10인 경우의 필터성능비교

**Table 1** Filter performance comparison in case of n=10

n=10	Butterworth BPF	Chebyshev BPF	Chebyshev4차 × Chebyshev6차
Ripple	0dB	1dB(Max)	0.15dB(Max)
천이대역폭 (저주파영역)	6.617Hz	3.377Hz	4.807Hz
천이대역폭 (고주파영역)	5.842Hz	2.922Hz	4.182Hz

**4. 결 론**

본 논문에서는 이상적인 필터에 근접하게 만들고자 Chebyshev 필터와 Butterworth 필터 각각의 장점을 가진 조합 Chebyshev BPF를 제안하였다. 제안된 필터의 성능비교를 위하여 같은 차수의 Butterworth BPF와 Chebyshev BPF를 설계하였다. 조합 Chebyshev BPF설계시 새로운 식을 도입하였고 설계과정을 정리하였다.

제안된 필터와 성능비교를 위한 필터들의 설계과정을 설명하였고 성능평가 지표를 예를 들어 성능을 평가하였다.

그 결과 조합 Chebyshev BPF의 리플의 크기는 10차가 0.15dB, 14차가 0.22dB로 설계시 사용한 1dB보다 1/4이상 줄어 Butterworth BPF의 통과대역과 근접한 평탄성을 가짐을 확인하였다.

천이대역의 경우는 10차인 경우 하한주파수가 4.807Hz, 상한주파수가 4.182Hz로 나타나 Butterworth 10차 BPF의 하한주파수 6.671Hz, 상한주파수 5.842Hz 보다는 훨씬 작고 Chebyshev 10차 BPF의 하한주파수 3.377Hz, 상한주파수 2.922Hz와는 근접하게 나타남을 확인 하였다.

14차인 경우도 하한주파수 3.22Hz, 상한주파수 2.566Hz이고 Butterworth 14차 BPF는 하한주파수 5.53Hz, 상한주파수 4.69Hz 이며 Chebyshev 14차 BPF의 하한주파수 2.24Hz, 상한주파수 1.756Hz로 나오게 되어 같은 양상을 보였다. 이렇게 측정되고 분석된 데이터는 BPF필터의 연구에 있어 도움이 될 것이라고 사료된다.

**참 고 문 헌**

[1] 황진홍, 유창식, “SDR을 위한 광대역 주파수 가변 active-RC 채널 선택 필터”, 대한전자공학회, 텔레콤 제 21권 제2호, pp.91-99, 2005.12

[2] 박준석, 장병준, 오하령, 임재봉, 조홍구, “이동통신 단말기용 초소형 필터연구동향”, 한국전자파학회, 전자파 기술 제16권 제4호, pp.24-37, 2005. 10

[3] <http://www.rfdh.com>

[4] 김형갑, “회로망 합성론과 필터설계”, 대한전기협회, 제 1판, pp33-87, 1983.3

[5] Yiping Fan, “Method and system for passband ripple cancellation in cascading filters”, Unite States Patent application publication, 2006

[6] 방인대, 전영훈, 이재룡, 윤상원, “통과대역 평탄도를 개선한 4단 저잡음 능동대역통과 여파기 설계”, 대한전기

학회논문지 제 6권, pp.590-598, 2004.6

[7] 윤영로, 송태경, 임재중 공역, “디지털 신호처리”, WILEY, 1994

**저 자 소 개**



**강 두 병 (姜斗秉)**

2008년 2월 숭실대 전기공학부 졸업(공학사)  
 2010년 2월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업(공학석사)  
 현재 (주) 한일전기 연구원



**신 승 식 (申承湜)**

1997년 2월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업(공학석사)  
 2004년 8월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업(공학박사)  
 2000~2004년 인덕대학 겸임전임강사  
 2004~2009년 서일대학 겸임전임강사  
 2009년~현재 동양미래대학 전기시스템 전임강사