

논문 2012-49-9-19

# ESPRIT을 이용한 효율적인 코히런트 신호의 도래각 추정

( Efficient DOA Estimation of Coherent Signals Using ESPRIT )

최 양 호\*

( Yang-Ho Choi )

## 요 약

센서 어레이(sensor array)가 천이불변(shift invariance) 성질을 가질 때, ESPRIT(Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques) 방식은 이를 이용하여 어레이에 도래하는 신호의 도래각을 추정한다. 본 논문에서는 ESPRIT 방식을 적용하여 코히런트 신호의 도래각을 효과적으로 추정하는 방법을 제시한다. ESPRIT 방식은 신호부공간(signal subspace)을 이용한다. 코히런트 신호가 존재할 때, 신호부공간을 구하는 방법으로 SS(spatial smoothing) 방식이 널리 알려져 있으나 계산이 매우 복잡하다. 최근에 발표된 CV(correlation vector)에 기초한 방식은 계산은 간단하지만 SS 방식보다 작은 수의 신호를 분해한다. 제안 방식은 상관행렬의 일부를 이용하여 신호부공간을 구성하여 도래각을 추정한다. SS 방식과 비교하여, 제안 방식에서는 분해 가능한 신호의 수는 동일하면서 계산량을 크게 줄일 수 있다.

## Abstract

ESPRIT(Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques) estimates DOAs(directions of arrival) of the incident signals on a sensor array by exploiting the shift invariance between its two subarrays. This paper suggests an efficient DOA estimation method based on ESPRIT when coherent signals impinge on the sensor array. When applying ESPRIT, it is necessary to find a signal subspace. Though the widely known SS(spatial smoothing) method allows us to obtain a signal subspace in the presence of coherent signals, its computational complexity is very high. Recently a CV(correlation vector) based method has been presented which is computationally simple. However, the number of resolvable signals in the method is smaller than that in the SS based method when multiple coherent signal groups are present. The proposed method in this paper, which obtains a signal subspace by utilizing only part of the correlation matrix, significantly reduces the computational complexity as compared with the SS based one, while the former is resolving the same number of coherent signals as the latter.

**Keywords :** DOA, coherent signals, ESPRIT, signal subspace, TLS

## I. 서 론

센서 어레이(sensor array)에 도래하는 신호의 도래각 추정을 위해 MUSIC(MUltiple SIgnal Classification) 방식<sup>[1-3]</sup>이 널리 사용되어 왔다. MUSIC에서는 도래하는 신호의 방향벡터(direction vector)가 잡음 부공간(noise subspace)에 직교한다는 사실을 이용하여 공간

각(spatial angle)에 대한 스펙트럼을 계산하고 그 첨두치(peak value)를 찾아 신호의 도래각을 구한다. MUSIC은 임의의 구조를 갖는 어레이에도 사용할 수 있어 넓은 적용범위를 가지지만, 공간각 스펙트럼을 구해야 하는 까닭에 큰 계산 부하를 요구한다. 이에 반해 ESPRIT(Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques)<sup>[3-7]</sup>에서는 스펙트럼 첨두치의 탐색 없이 도래각을 구할 수 있어 MUSIC보다 계산량 면에서 이점이 있다. ESPRIT은 센서 어레이의 두 부어레이(subarray)가 천이불변(shift invariance)을 가지는 구조를 이용하여 도래각을 추정한다.

\* 정회원, 강원대학교 전자통신전공  
(Dept. of Electronic and Communication  
Engineering, Kangwon National University)  
접수일자: 2012년3월19일, 수정완료일: 2012년6월7일

ULA(uniform linear array)는 이러한 구조를 가지고 있어 ESPRIT의 적용이 가능하다.

ESPRIT, MUSIC은 부공간에 기초한 방식으로 신호 부공간(signal subspace)이나 잡음 부공간을 구하는 것이 필요하다. 도래하는 신호가 코히런트(coherent)하지 않다면, 어레이 수신신호의 상관행렬(correlation matrix)을 고유분해(eigendecomposition) 하여 이들 부공간을 구할 수 있다. 그러나 코히런트 한 경우, 방향성 신호(directional signals)에 대한 상관행렬의 랭크(rank)가 감소되어 위와 같은 방법으로 부공간을 구할 수 없다. 감소된 랭크는 공간 평활(spatial smoothing, SS)[3, 8, 9]을 통해 회복시킬 수 있다. 공간 평활에 기초한 SS 방식은 상관행렬의 추정, 공간 평활 행렬의 고유분해를 해야 함에 따라 계산이 복잡하게 된다. 최근에 상관행렬이 아닌 상관벡터(correlation vector, CV)에 기초한 방법이 제안되었다<sup>[7]</sup>. CV 방식은 상관행렬의 추정이 필요하지 않고, 상관벡터를 이용하여 신호 부공간을 구함에 따라 계산이 간단하다. 그러나 여러 코히런트 신호 그룹이 존재할 때 분해할 수 있는 신호의 수가 SS 방법보다 작게 된다.

본 논문에서는 분해 가능 신호수는 SS 방식과 같으면서, 계산량을 크게 절감시킬 수 있는 도래각 추정방식을 제안한다. 제안 방식에서는, 코히런트 신호 환경에서, 신호부공간을 얻기 위해 상관행렬의 일부만을 이용한다. 이 상관행렬의 일부를 일부 행렬이라 부르자. 일부행렬에서 잡음 성분을 제거한 후, 잡음이 제거된 행렬의 부행렬(submatrix)들을 더하여 신호부공간을 얻는다. 이와 같이 일부 행렬을 이용, 효과적으로 신호부공간을 계산하여 공간 평활에 따른 SS 방식에 비해 계산량을 크게 절감시키고 있다. 신호부공간이 구해지면, 양변 모두에서의 에러를 고려해서 해를 구하는 TLS(Total Least Square)<sup>[10]</sup> 방식에 따른 TLS-ESPRIT<sup>[4]</sup>에 기초하여 신호의 도래방향을 추정한다.

## II. 데이터 모델링

$M$ 개의 센서로 구성된 ULA 어레이를 생각하자.  $\mathbf{a}_m(\theta)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{a}_m(\theta) = [1, \phi(\theta), \phi^2(\theta), \dots, \phi^{m-1}(\theta)]^T \quad (1)$$

여기서  $T$ 는 전치(transpose)를 의미하고,  $\phi(\theta) = \exp$

$(j2\pi d \sin \theta / \lambda)$ 로  $d$ 는 센서 간 거리,  $\lambda$ 는 신호의 파장을 나타낸다.  $\mathbf{a}_m(\theta)$ 는  $m$  개의 센서로 구성된 ULA 어레이의 공간각  $\theta$ 에 대한 응답벡터와 같다.

센서 어레이에  $q$ 개의 코히런트 신호 그룹이 도래한다.  $i$ 번째 코히런트 그룹은  $\eta_i$ 개의 신호로 구성되며, 이들 신호의 복소포락선 벡터(complex envelope vector)은  $\mathbf{s}_i(t) = [s_{i1}(t), \dots, s_{i\eta_i}(t)]^T$ , 도래방향은  $\theta_i = \{\theta_{i1}, \dots, \theta_{i\eta_i}\}$ 이다. 여기서  $s_{ij}(t)$ ,  $\theta_{ij}$ 는 각각  $i$ 번째 그룹의  $j$ 번째 신호의 복소포락선과 도래각을 나타낸다. 도래하는 신호의 전체 수는

$$\eta = \sum_{i=1}^q \eta_i$$

이다. 어레이에 수신되는 신호를

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}_M \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_M(\theta_i) \mathbf{s}_i(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

와 같이  $M$ 차원 벡터로 나타낼 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m(\theta_i) &= [\mathbf{a}_m(\theta_{i1}), \dots, \mathbf{a}_m(\theta_{i\eta_i})] \\ \mathbf{A}_m &= [\mathbf{A}_m(\theta_1), \dots, \mathbf{A}_m(\theta_q)] \\ \mathbf{s}(t) &= [\mathbf{s}_1^T(t), \dots, \mathbf{s}_q^T(t)]^T \end{aligned}$$

이고,  $\mathbf{n}(t)$ 는 잡음벡터이다.

편의상 신호 그룹간은 서로 상관되어 있지 않다고 가정한다. 즉

$$E[\mathbf{s}_k(t) \mathbf{s}_l^H(t)] = \mathbf{0}, \quad k \neq l$$

여기서  $E$ ,  $H$ 는 각각 기댓값(expectation), 복소켤레 전치(complex conjugate transpose) 연산을 가리킨다. 이때, 수신신호에 대한 상관행렬(correlation matrix)은 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] \\ &= \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_M(\theta_i) \mathbf{R}_{s_i} \mathbf{A}_M^H(\theta_i) + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{R}_{s_i} = E[\mathbf{s}_i(t) \mathbf{s}_i^H(t)]$ ,  $\sigma^2$ 은 잡음전력,  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬(identity matrix)이다.

### III. ESPRIT에 기초한 새로운 도래방향 추정

#### 1. 부행렬을 이용한 신호부공간 추출

ESPRIT에 기초하여 도래각을 추정하기 위해서는 신호부공간을 구해야 한다. 신호부공간을 구하는 과정의 설명에 앞서 몇 가지 기호를 정의한다. 어떤 행렬  $\mathbf{M}$ 의 첫 번째 열부터  $p$ 번째 열까지  $p$ 개의 열로 구성되는 부분행렬을  $\mathbf{M}_{|p}$ 로 표시한다. 벡터  $\mathbf{v}$ 의 요소를 대각요소로 가지는 대각행렬을  $\mathbf{\Gamma}_v$ 로 나타낸다. 예를 들어  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_k]$  이라면  $\mathbf{\Gamma}_v$ 는

$$\mathbf{\Gamma}_v = \text{diag}[v_1, \dots, v_k] \quad (4)$$

인 대각행렬이다. 공분산 행렬  $\mathbf{R}_x$ 는 잡음 성분  $\sigma^2 \mathbf{I}$ 를 포함하고 있다.  $\mathbf{R}_x$ 로부터  $\sigma^2 \mathbf{I}$ 를 빼서 이를 제거한 행렬을  $\mathbf{R}'_x$ 로 표시한다.

$$\mathbf{R}'_x = \mathbf{R}_x - \sigma^2 \mathbf{I} \quad (5)$$

$\mathbf{R}'_{x|p}$ 는  $\mathbf{R}'_x$ 의  $p$ 개의 열로 구성되는  $M \times p$  행렬이다.  $\mathbf{R}'_{x|p}$ 는 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{R}'_{x|p} = \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_M(\theta_i) \mathbf{R}_{s_i} \mathbf{A}_p^H(\theta_i) \quad (6)$$

$p \geq \eta$  일 때,  $\mathbf{R}'_{x|p}$ 의 랭크(rank)는  $\eta$ 보다 작은  $q$ 로  $\mathbf{R}'_{x|p}$ 의 행렬의 열은 신호부공간을 생성하지 못한다. 신호부공간은 아래와 같이 정의되는  $\mathbf{R}'_{x|p}$ 의 ( $D \times L$ ) 부행렬  $\mathbf{R}_{DL,k}^f$ 들을 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{R}_{DL,k}^f = \begin{bmatrix} r'_{kk} & \cdots & r'_{k(k+L-1)} \\ & \vdots & \\ r'_{(k+D-1)k} & \cdots & r'_{(k+D-1)(k+L-1)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $r'_{ij}$ 은  $\mathbf{R}'_x$ 의 ( $i, j$ ) 요소이다. 식 (7)로부터  $\mathbf{R}_{DL,k}^f$ 는

$$\mathbf{R}_{DL,k}^f = \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_D(\theta_i) \Omega_i^{<k-1>} \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \quad (8)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서

$$\Omega_i^{<m>} = \mathbf{\Gamma}_{\phi_i}^m \mathbf{R}_{s_i} \mathbf{\Gamma}_{\phi_i}^m \quad (9)$$

$$\phi_i = [\phi(\theta_{i1}), \dots, \phi(\theta_{in_i})]^T$$

이고,  $\mathbf{\Gamma}_{\phi_i}$ 는 (4)에서  $\mathbf{v} = \phi_i$ 인 대각 행렬이다. 이러한  $\mathbf{R}_{DL,k}^f$ 들을  $K$ 개를 더하여  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 을 구성한다.

$$\mathbf{R}_{DL}^f = \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{DL,k}^f \quad (10)$$

식 (8)을 (10)에 대입하면 (11)처럼 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{DL}^f &= \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_D(\theta_i) \Omega_i^{<k-1>} \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \\ &= \sum_{i=1}^q \mathbf{R}_{DL}^f(\theta_i) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{R}_{DL}^f(\theta_i) = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_D(\theta_i) \Omega_i^{<k-1>} \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \quad (12)$$

$\mathbf{R}_{s_i}$ 는 랭크 1 행렬로

$$\mathbf{R}_{s_i} = \xi_i \xi_i^H \quad (13)$$

와 같이 쓸 수 있고,  $\xi_i$ 는  $\eta_i$  차원 벡터이다. 식 (13)을 (9)에 대입하여  $\eta_i \times \eta_i$  행렬  $\Omega_i^{<m>}$ 을 (14)처럼 쓸 수 있다.

$$\Omega_i^{<m>} = \mathbf{\Gamma}_{\phi_i}^m \xi_i \xi_i^H \mathbf{\Gamma}_{\phi_i}^m \quad (14)$$

$\phi_i^{<m>}$ 을 다음처럼 정의한다.

$$\phi_i^{<m>} = [\phi^m(\theta_{i1}), \dots, \phi^m(\theta_{in_i})]^T \quad (15)$$

$\mathbf{\Gamma}_{\phi_i}^m \xi_i = \mathbf{\Gamma}_{\xi_i} \phi_i^{<m>}$  이므로  $\Omega_i^{<m>}$ 은

$$\Omega_i^{<m>} = \mathbf{\Gamma}_{\xi_i} \phi_i^{<m>} \phi_i^{<m>H} \mathbf{\Gamma}_{\xi_i}^H \quad (16)$$

같이 표현된다. 식 (12), (16)을 이용하여,  $\mathbf{R}_{DL}^f(\theta_i)$ 를 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{DL}^f(\theta_i) &= \mathbf{A}_D(\theta_i) \left[ \sum_{k=1}^K \Omega_i^{<k-1>} \right] \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \\ &= \mathbf{A}_D(\theta_i) \mathbf{\Gamma}_{\xi_i} \left[ \sum_{k=1}^K \phi_i^{<k-1>} \phi_i^{<k-1>H} \right] \mathbf{\Gamma}_{\xi_i}^H \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \\ &= \mathbf{A}_D(\theta_i) \mathbf{\Gamma}_{\xi_i} \Psi_i^{<K>} \mathbf{\Gamma}_{\xi_i}^H \mathbf{A}_L^H(\theta_i) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{<K>} = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\phi}_i^{<k-1>} \boldsymbol{\phi}_i^{<k-1>H} \quad (18)$$

식 (15)의 정의에 따라  $\boldsymbol{\Psi}_i^{<K>}$ 는

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{<K>} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_{i1} & \cdots & \phi_{i1}^{K-1} \\ 1 & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{i2}^{K-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & \phi_{in_i} & \cdots & \phi_{in_i}^{K-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \phi_{i1} & \cdots & \phi_{i1}^{K-1} \\ 1 & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{i2}^{K-1} \\ & & \ddots & \\ 1 & \phi_{in_i} & \cdots & \phi_{in_i}^{K-1} \end{bmatrix}^H \quad (19)$$

$$= \mathbf{A}_K^T(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{A}_K^*(\boldsymbol{\theta}_i)$$

와 같이 표현되며, \* 는 켈레복소 연산을 나타낸다. 식 (19)를 (17)에 대입하면 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{B}_{DK}^f(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{B}_{LK}^{fH}(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (20)$$

여기서

$$\mathbf{B}_{mn}^f(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\Gamma}_\xi \mathbf{A}_n^T(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (21)$$

식 (20)으로부터  $\mathbf{B}_{DK}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ ,  $\mathbf{B}_{LK}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 랭크가 모두  $\eta_i$  이면  $\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 랭크가  $\eta_i$ 임을 알 수 있다.  $m, n \geq \eta_i$  이면,  $\mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}_i)$ 와  $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\theta}_i)$ 는 랭크  $\eta_i$  행렬이고  $\mathbf{B}_{mn}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의  $\eta_i$ 개 열들은 선형독립이게 된다. 따라서  $D, L, K \geq \eta_i$  이면,  $\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 랭크는  $\eta_i$ 로  $\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 열은  $\mathbf{A}_D(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 열공간을 생성한다.

$m, K \geq \eta_q$  이면  $\mathbf{B}_{mK}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 은 선형독립인 열을  $\eta_i$ 개 가진다. 따라서  $K \geq \eta_q$ 이고,  $D, L \geq \eta$  이면  $\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$  ( $i = 1, \dots, q$ )의 랭크는  $\eta_i$ 이고, 각 코히런트 그룹은 다른 그룹과 상관되어 있지 않으므로 (11)로부터  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 의 랭크는  $\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)$ 의 랭크 합과 같게 된다.

$$\text{rank}(\mathbf{R}_{DL}^f) = \sum_{i=1}^q \text{rank}[\mathbf{R}_{DL}^f(\boldsymbol{\theta}_i)] = \eta$$

결론적으로  $K \geq \eta_q$ ,  $D, L \geq \eta$  이면  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 의 열은  $D$  차원 신호부공간,  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간을 생성한다.

$\mathbf{R}_{x|p}^f$ 의  $K$ 개의 부행렬을 이용하여  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 를 구성함에 따라  $D = M - K + 1$ 과 같이 주어진다.  $K = \eta_q$ 로 선택하면  $D$ 는 최댓값을 가진다. 이때, 최댓값  $D_{\max}$ 은  $D_{\max} = M - \eta_q + 1$ 로 주어진다.  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 의 역방향 행렬을 이용하여 이보다 더 큰  $D_{\max}$  값을 얻을 수 있다.

## 2. 역방향 행렬의 이용

$\mathbf{R}_{DL}^f$ 의 역방향 행렬  $\mathbf{R}_{DL}^b$ 은 (22)처럼 정의된다.

$$\mathbf{R}_{DL}^b = \mathbf{J}_M \mathbf{R}_{DL}^{f*} \mathbf{J}_L \quad (22)$$

여기서  $\mathbf{J}_m$ 은 역대각(anti-diagonal) 요소가 1인  $m \times m$  역대각 행렬이다.

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (11)를 (22)에 대입하면 다음처럼 주어진다.

$$\mathbf{R}_{DL}^b = \sum_{i=1}^q \mathbf{R}_{DL}^b(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (23)$$

여기서

$$\mathbf{R}_{DL}^b(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{J}_M \mathbf{R}_{DL}^{f*}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{J}_L \quad (24)$$

$\mathbf{J}_m \mathbf{A}_m^*(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\Gamma}_{\phi_i}^{(m-1)}$  이므로 (20), (24)를 이용하여,  $\mathbf{R}_{DL}^b(\boldsymbol{\theta}_i)$ 는

$$\mathbf{R}_{DL}^b(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{B}_{DK}^b(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{B}_{LK}^{bH}(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (25)$$

와 같이 쓸 수 있고, 여기서

$$\mathbf{B}_{mn}^b(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{J}_m \mathbf{B}_{mn}^{f*} = \mathbf{A}_m(\boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\Gamma}_{\phi_i}^{(m-1)} \boldsymbol{\Gamma}_\xi^* \mathbf{A}_n^H(\boldsymbol{\theta}_i) \quad (26)$$

이다. 식 (23) - (26)에서 보듯이,  $\mathbf{R}_{DL}^b$ 의 각 열들도  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간에 놓여있어  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간을 생성할 수 있다. 이러한 사실에 따라 다음과 같이  $\mathbf{R}_{DL}$ 을 구성한다,

$$\mathbf{R}_{DL} = [\mathbf{R}_{DL_f}^f, \mathbf{R}_{DL_b}^b] \quad (27)$$

여기서  $L = L_f + L_b$  이다.

$\mathbf{R}_{DL}$ 의 열들은  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간에 놓여 있고,  $D, L \geq \eta$  이면  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간을 생성할 수 있다. 순방향 행렬만 이용하는 경우는  $L_b = 0$  이므로  $L = L_f$  이다. 역방향 행렬도 같이 이용함에 따라  $\mathbf{R}_{DL}^f$ 만 이용하는 경우에 비해 소요 부행렬  $\mathbf{R}_{DL,k}^f$ 의 수를 반으로 줄일 수 있다.  $K$ 를

$$K_s = \left\lfloor \frac{\eta_q + 1}{2} \right\rfloor \quad (28)$$

와 같이 선택한다.  $[\gamma]$ 은  $\gamma$ 를 초과하지 않는 최대 정수를 의미한다. 이때,  $D$ 는

$$D_s = M - K_s + 1 \quad (29)$$

와 같이 주어진다.  $L_f$ 는

$$L_{fs} = \left\lfloor \frac{\eta + 1}{2} \right\rfloor \quad (30)$$

$L_b$ 는  $L = \eta$ 가 되도록 다음처럼 선택한다.

$$L_{bs} = \eta - L_{fs} \quad (31)$$

이들 선택된  $K_s$ ,  $L_{fs}$  값에 따라, 일부행렬  $\mathbf{R}_{x|p}$ 의 열의 개수  $p$ 는

$$p_s = K_s + L_{fs} - 1 \quad (32)$$

과 같이 주어진다.

### 3. 도래방향 추정

식 (27)에서  $L = \eta$ 인  $\mathbf{R}_{DL}$ 을 생각하자.  $\mathbf{R}_{D\eta}$ 의 첫 번째 행부터  $(D-1)$ 개의 행으로 구성되는 행렬  $\mathbf{R}_{(1)}$ , 두 번째 행부터 마지막 행까지로 구성되는 행렬을  $\mathbf{R}_{(2)}$ 라 하자.  $\mathbf{R}_{D\eta}$ 의 각 열은  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간에 놓여있으므로  $\mathbf{R}_{D\eta}$ 은

$$\mathbf{R}_{D\eta} = \mathbf{A}_D \mathbf{G} \quad (33)$$

처럼 쓸 수 있고,  $\mathbf{G}$ 는 적절한  $\eta \times \eta$  행렬이다. 식 (33)으로부터  $\mathbf{R}_{(1)}$ ,  $\mathbf{R}_{(2)}$ 는 다음처럼 표현된다.

$$\mathbf{R}_{(1)} = \mathbf{A}_{D-1} \mathbf{G} \quad (34)$$

$$\mathbf{R}_{(2)} = \mathbf{A}_{D-1} \Gamma_\phi \mathbf{G} \quad (35)$$

여기서

$$\phi = [\phi_1^T, \dots, \phi_q^T]^T \quad (36)$$

식 (34), (35)로부터

$$\mathbf{R}_{(2)} = \mathbf{R}_{(1)} \mathbf{Z} \quad (37)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}^{-1} \Gamma_\phi \mathbf{G} \quad (38)$$

의 관계를 유도할 수 있다. 식 (38)에 따르면  $\Gamma_\phi$ 는  $\mathbf{Z}$ 의

고유치 행렬임을 나타내고, 따라서  $\mathbf{Z}$ 의 고유치를 구하면 도래방향을 알 수 있다.

실제의 경우 어레이 수신신호에 대한 공분산 행렬  $\mathbf{R}_x$ 는 알려져 있지 않고 어레이 샘플로부터 추정해야 한다.  $N$ 번째 샘플에서,  $\mathbf{R}_x$ 의 추정  $\hat{\mathbf{R}}_x$ 을

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \quad (39)$$

와 같이 구한다. 제안방식에서는  $\hat{\mathbf{R}}_x$ 의 전부가 필요하지 않고,  $p$ 개의 열로 구성되는 일부행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 만 필요하다.  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 로부터 잡음성분을 제거하기 위해 잡음전력  $\sigma^2$ 을 추정해야 한다.  $\hat{\mathbf{R}}_x$ 의 첫 번째 행, 첫 번째 열부터 각각  $u$ 개의 행과 열로 구성되는  $u \times u$  행렬을  $\hat{\mathbf{R}}_{x/u}$ 로 나타낸다.

$$\hat{\mathbf{R}}_{x/u} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{11} & \cdots & \hat{r}_{1u} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_{u1} & \cdots & \hat{r}_{uu} \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기서  $\hat{r}_{ij}$ 은  $\hat{\mathbf{R}}_x$ 의  $(i, j)$  요소이고  $u > q$  이다.  $\sigma^2$ 은

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{u - q} \sum_{m=q+1}^u \hat{\lambda}_m \quad (41)$$

과 같이 추정되며,  $\hat{\lambda}_m$ 은  $\hat{\mathbf{R}}_{x/u}$ 의 고유치로, 고유치는 크기의 내림차순으로 배열되어 있다.

$\hat{\sigma}^2$ 이 구해지면,  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 의  $(1, 1), \dots, (p, p)$ 의 요소에서 이를 빼서  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}'$ 를 구한다.  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}'$ 의 부행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f, k}^f$ 들을 서로 더해  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f}^f$ 을 구하고  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^f$ 의 행의 순서와 열의 순서를 바꾸어서  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^b$ 를 얻는다.  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f}^f$ 의 마지막 열 다음에  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^b$ 를 연결하면  $\hat{\mathbf{R}}_{D\eta}$ 이 구해진다.  $\hat{\mathbf{R}}_{D\eta}$ 로부터  $\mathbf{R}_{(1)}$ ,  $\mathbf{R}_{(2)}$ 에 대한 추정  $\hat{\mathbf{R}}_{(1)}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{(2)}$ 이 구성된다.  $\hat{\mathbf{R}}_{(1)}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{(2)}$ 의 각 열이  $\mathbf{A}_D$ 의 열공간에 정확히 놓여있지 않으므로 다음처럼 근사적인 관계를 가진다..

$$\hat{\mathbf{R}}_{(2)} \approx \hat{\mathbf{R}}_{(1)} \mathbf{Z} \quad (42)$$

$\hat{\mathbf{R}}_{(1)}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{(2)}$  모두에 에러가 있을 때, TLS 방법<sup>[10]</sup>을 적용하여 에러 제곱을 최소로 하는 해를 구할 수 있다.  $(D-1) \times 2\eta$  행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)}$ 를 정의한다.

$$\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)} = [\hat{\mathbf{R}}_{(1)}, \hat{\mathbf{R}}_{(2)}] \quad (43)$$

$\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)}$ 의 SVD는 다음처럼 쓸 수 있다<sup>[10]</sup>.

$$\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (44)$$

$\mathbf{U}$ :  $(D-1) \times (D-1)$  좌 특이벡터

$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\eta}]$ :  $2\eta \times 2\eta$  우 특이벡터

$\mathbf{\Sigma}$ : 특이값을 요소로 가지는  $(D-1) \times 2\eta$  행렬

특이값은 0 이상인 실수로 내림차순 배열되어 있다. TLS 해는  $2\eta \times \eta$  행렬  $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_{\eta+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\eta}]$ 로부터 구해진다.  $\mathbf{V}_1$ 을

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} \\ \mathbf{V}_{12} \end{bmatrix} \quad (45)$$

와 같이 나누어서 나타내자.  $\mathbf{V}_{11}$ ,  $\mathbf{V}_{12}$ 는 모두  $\eta \times \eta$  행렬이다. TLS 해  $\mathbf{Z}_s$ 는 다음처럼 주어진다<sup>[10]</sup>.

$$\mathbf{Z}_s = -\mathbf{V}_{11} \mathbf{V}_{12}^{-1} \quad (46)$$

TLS-ESPRIT<sup>[4]</sup>에서는  $\phi$ 를

$$\hat{\phi} = \text{ang}[\text{EV}(\mathbf{Z}_s)] \quad (47)$$

와 같이 추정한다. 여기서  $\text{EV}(\mathbf{Z}_s)$ 는 행렬  $\mathbf{Z}_s$ 의 고유치,  $\text{ang}$ 는 각도를 나타낸다.

제안방식의 계산과정을 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 1) 수신 샘플을 이용하여  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 와  $\hat{\mathbf{R}}_{x/u}$ 을 구함
- 2)  $\hat{\mathbf{R}}_{x/u}$ 를 이용,  $\hat{\sigma}^2$  계산;  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 의 해당요소로부터  $\hat{\sigma}^2$ 을 빼서  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}'$  구함
- 3)  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}'$ 의 부행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f,k}^f$ 를  $K$ 개 더하여  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f}^f$ 를 구하고,  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^f$ 의 열의 순서와 행의 순서를 바꿔  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^b$ 를 구함;  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_f}^f$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_{DL_b}^b$ 를 나란히 배열하여  $\hat{\mathbf{R}}_{D\eta}$ 를 구성
- 4)  $\hat{\mathbf{R}}_{D\eta}$  이용,  $\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)}$ 를 구성하고  $\hat{\mathbf{R}}_{(1,2)}$ 를 SVD 하여  $\mathbf{V}_1$ 을 얻음
- 5)  $\mathbf{V}_1$ 를 이용,  $\mathbf{Z}_s$ 를 계산
- 6)  $\mathbf{Z}_s$ 의 고유치를 구하여 도래각 추정

여기서  $K$ ,  $L_f$ ,  $L_b$ ,  $p$ 의 값은 각각 (28), (30) - (32)에 주어진 값을 사용한다.

#### 4. 기존방식과 비교

제안방식을 상관벡터에 기초한 CV 방식<sup>[2]</sup>, 순방향/역방향 공간 평활을 하는 SS 방식<sup>[9]</sup>과 분해할 수 있는 신호의 수, 계산량 면에서 비교한다. 비교의 간편함을 위해  $\eta$ ,  $\eta_q$ 는 짝수라 가정한다.

CV 방식에서 최대  $D$ 는  $D_{\max} = M - \eta/2 + 1$ 로 주어진다.  $D \geq \eta + 1$  이어야 하므로 분해 가능한 최대 신호의 수  $r_{\max}$ 는  $r_{\max} = 2M/3$ 과 같다. 제안방식에서  $D_{\max} = M - \eta_q/2 + 1$  이고, 따라서  $r_{\max} = M - \eta_q/2$ 로 주어진다.  $\eta_r = \eta$  이면 CV 방식과 제안방식에서  $r_{\max} = 2M/3$ 으로 같지만,  $\eta_q = 2$ 인 경우, 제안방식에서는  $r_{\max} = M - 1$ 이다. 제안방식과 SS 방식에서  $D_{\max}$ 와  $r_{\max}$ 는 동일하다.

신호부공간을 얻은 후, TLS-ESPRIT에 따라 도래각을 구할 때, 이후의 계산과정은 방식에 관계없이 동일하다. 따라서 신호부공간을 구하기까지의 계산량을 비교한다. 제안방식에서  $N$ 개의 수신 샘플로부터  $\hat{\mathbf{R}}_{x|p}$ 를 구하는 데  $O(NM\eta)$ 의 복소 곱셈이 필요하고,  $\hat{\mathbf{R}}_{x/u}$ 로부터 잡음전력을 추정하는데  $O(u^3)$ 이 필요하다.  $u \ll N$  이고,  $u$ 는  $\eta$ 보다 작은 값으로 선택할 수 있으므로  $O(u^3)$ 의 계산량은  $O(NM\eta)$ 에 비해 무시할 수 있다. 이를 무시하면, 신호부공간을 구하기까지 소요 계산량은  $O(NM\eta)$ 이다. 이 계산량은 CV 방식의  $O(NM)$ 보다 약간 크지만 SS의  $O(NM^2 + M^3)$ 에 비해 매우 작다. 표 1에 이들 방식 간  $D_{\max}$ ,  $r_{\max}$ , 신호부공간의 추정을 구하는 데 필요한 계산량을 요약하였다.

표 1. 제안 방식, CV, SS 방식 간 특성 비교  
Table 1. Comparison of characteristics of the proposed, the CV, and the SS methods

	$D_{\max}$	$r_{\max}$	계산량
제안	$M - \eta_q/2 + 1$	$M - \eta_q/2$	$O(NM\eta)$
CV	$M - \eta/2 + 1$	$2M/3$	$O(NM)$
SS	$M - \eta_q/2 + 1$	$M - \eta_q/2$	$O(NM^2 + M^3)$

IV. 시뮬레이션

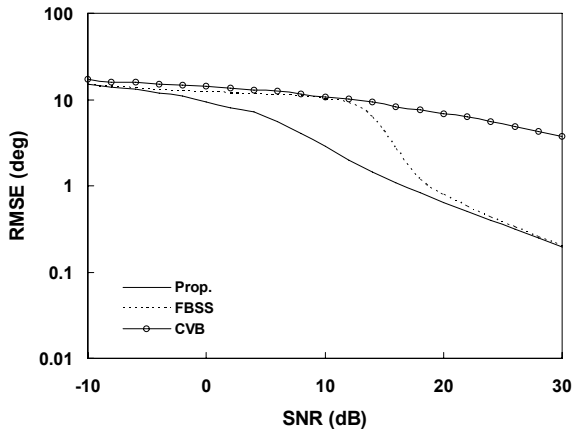
제안방식을 CV 방식<sup>[2]</sup>, SS 방식<sup>[9]</sup>과 추정성능 면에서 비교한다. 참고문헌 [9]에선 순방향/역방향 공간 평활을 하고 잡음부공간 추정을 구한 후 MUSIC 방식으로 도래각을 구하는 데, 여기서는 순방향/역방향 공간 평활을 하고 공간평활된 행렬을 고유분해하여 신호 부공간을 추정한 다음, TLS-ESPRIT를 적용하였다. 어레이로 12 개의 센서로 구성된 ULA를 사용하였으며, 2개의 코히런트 신호그룹이 어레이에 도래한다. 각 코히런트 그룹은 4개의 신호로 구성되고, 첫 번째 그룹의 도래각은  $\theta_1 = \{3^\circ, -17^\circ, -35^\circ, -42^\circ\}$ , 두 번째 그룹의 도래각은  $\theta_2 = \{-5^\circ, 9^\circ, 22^\circ, 30^\circ\}$ 이며, 입사하는 8 개의 신호의 세기는 동일하다. 추정성능을 RMSE(root

mean square error)로 평가하였고, 100번의 모의실험을 통해 평균값을 구하였다. RMSE는 다음처럼 정의된다.

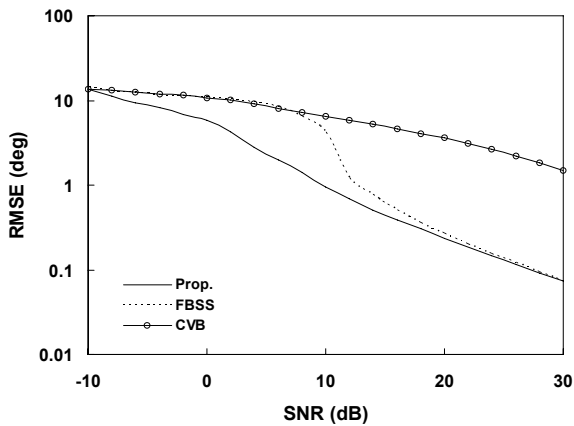
$$\sqrt{\frac{1}{100\eta} \sum_{k=1}^{100} \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 (\hat{\theta}_{ij,k} - \theta_{ij})^2 \right)}$$

여기서  $\hat{\theta}_{ij,k}$ 는  $k$ 번째 모의실험에서  $\theta_{ij}$ 에 대한 추정값,  $\eta = 8$  이다.

그림 1은 SNR에 대한 RMSE 성능을 보여준다. 그림 1(a)에서 사용한 샘플의 수가  $N=50$ , 그림 1(b)에서는  $N=500$  이다. 그림 1(a)를 보면 CV 방식에서 SNR이 증가함에 따라 RMSE가 감소하지만 그 감소율이 완만하고, SS 방식에서는 대략 SNR이 14 dB까지 완만한 감소율을 보이다가 이후에 급격히 감소한 뒤 20 dB 이

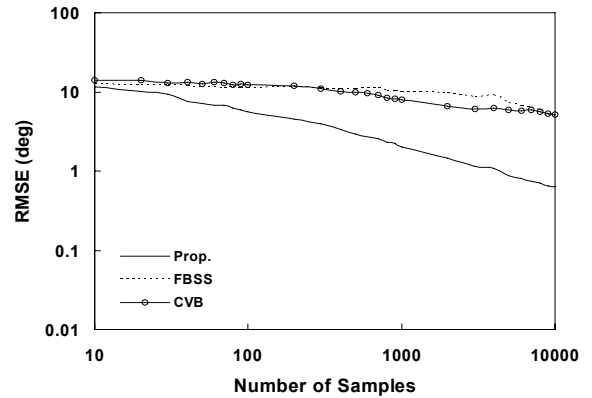


(a)

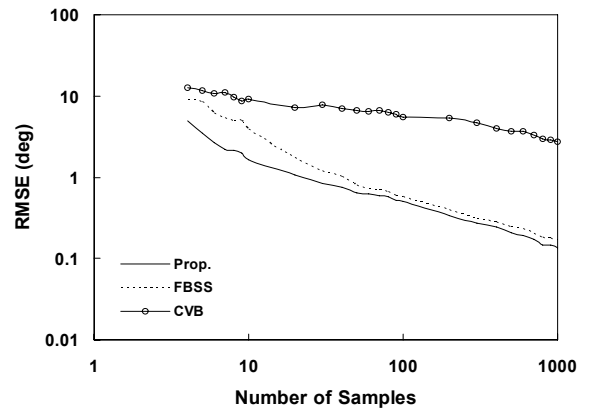


(b)

그림 1 SNR에 따른 RMSE (a)  $N=50$  (b)  $N=500$   
Fig. 1. RMSE versus SNR (a)  $N=50$  (b)  $N=500$ .



(a)



(b)

그림 2  $N$ 에 따른 RMSE  
(a) SNR = 3 dB (b) SNR = 20 dB  
Fig. 2. RMSE versus  $N$ .  
(a) SNR = 3 dB (b) SNR = 20 dB

후 제안 방식과 거의 같은 성능을 보인다. 제안방식은 기존방식보다 큰 감소율을 보이면서 좋은 성능을 나타낸다. 그림 2(b)는 전체적으로 그림 1(a)와 유사한 경향을 보이며 제안방식의 우수함을 보여준다. 그림 1(a)보다 큰 샘플 수를 사용함에 따라 각 방식에 따라 RMSE가 작아졌음을 볼 수 있다.

그림 2는  $N$ 에 따른 성능을 예시한다. 그림 2(a)는 SNR이 3 dB, 그림 2(b)는 20 dB인 경우이다. 그림 2(a)에 따르면 SNR이 비교적 작을 때, 기존 두 방식은 비슷한 성능을 보이고  $N$ 의 증가에 대해 작은 RMSE의 감소를 나타낸다. 제안방식은  $N$ 이 작지 않으면 기존방식보다 큰 감소율을 보이면서 SNR이 작은 경우에도 잘 동작함을 보여준다. 그림 2(b)를 보면 큰 SNR에서 SS 방식은 비교적 잘 동작하지만 제안방식보다 열등한 성능을 보인다. 그림 2(a)와 비교하면 SNR이 증가함에 따라 각 방식들의 RMSE가 작아졌음을 나타낸다.

## V. 결 론

일반적으로 전체 상관행렬을 이용하여 신호 부공간을 구하는 데 반하여, 제안된 방식에서는 상관행렬의 일부를 이용하여 효과적으로 이를 얻는다. 신호부공간을 얻는 과정에서 부공간의 차원이 어레이의 개수보다 작은 값으로 감소하게 되는 데 기존의 CV 방식에 비해 그 감소를 줄일 수 있어 더 많은 코히런트 신호를 분해해 낼 수 있다. SS 방식과 비교해서는 분해 가능한 신호수는 동일하면서 계산량을 크게 절감시킬 수 있다. 시뮬레이션 결과는 기존방식보다 좋은 추정성능을 보이면서, 제안방식의 우수성을 나타내었다.

## 참 고 문 헌

[1] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.

[2] 최양호, "간단한 신호 부공간 추정을 통한 MUSIC 기반의 효과적인 도래방향 탐지," 대한전자공학회 논문지 제48권SP편 4호, pp. 507-604, 2011년 7월

[3] H. Krim, and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 13, no. 4, pp. 67-94, July 1996.

[4] R. Roy, and T. Kailath, "ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, July 1989.

[5] A. L. Swindlehurst, B. Ottersten, R. Roy, and T. Kailath, "Multiple invariance ESPRIT," *IEEE Trans Signal Process.*, vol. 40, no. 4, pp. 867-879, Apr. 1992.

[6] F.-M. Han and X.-D. Zhang, "An ESPRIT-like algorithm for coherent DOA estimation," *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.*, vol. 4, pp. 443-446, Apr. 2005.

[7] Y.-H. Choi, "ESPRIT-based coherent source localization with forward and backward vectors," *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 58, no. 12, pp. 6416-6420, Nov. 2010.

[8] T. J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, "On spatial smoothing for estimation of coherent signals," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, Aug. 1985.

[9] R. T. Williams, S. Prasad, A. K. Mahalanabis, and L. H. Sibul, "An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 36, no. 4, pp. 425-432, Apr. 1988.

[10] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996.

— 저 자 소 개 —

최 양 호(정회원)  
대한전자공학회 논문지  
제48권 5호 참고