

풍 하중과 Pitch각 변화에 따른 풍력 터빈 블레이드의 안정성 해석 Stability Analysis of a Wind Turbine Blade Considering Wind Force and Variation of Pitch Angle

권 승 민* · 강 문 정** · 유 흥 희†

Seung Min Kwon, Moon Jeong Kang and Hong Hee Yoo

(Received June 29, 2012 ; Revised October 24, 2012 ; Accepted October 29, 2012)

Key Words : Wind Turbine Blade(풍력 터빈 블레이드), Stability Analysis(안정성 해석), Wind Force(풍 하중), Pitch Angel(Pitch각), Gravitational Force(중력)

ABSTRACT

Recently, researches related to the green energy generation systems have increased significantly. Among them wind turbines are the most spread practical green energy generation systems. In order to enhance the power generation capacity of the wind turbine blade, the length of wind turbine blade has increased. It might cause undesirable excessive dynamic loads. Therefore dynamic characteristics of a wind turbine blade system should be identified for a safe design of the system. In this study, the equations of motion of a wind turbine blade system undergoing gravitational force are derived considering wind force and pitch angle. Effects of wind speed, variation of pitch angle of the wind turbine blade, rotating speed, and the blade length on its stability characteristics are investigated.

1. 서 론

화석 에너지의 고갈과 화석 에너지 소비에 따른 지구 온난화로 인해 최근 친환경 에너지에 대한 관심이 고조되고 있다. 그 중 풍력 발전기는 전 세계적으로 그에 대한 연구가 증가하고 있는 추세이다. 풍력 발전에 대한 연구가 계속 진행될수록 발전기의 용량 증대를 위해 블레이드의 길이가 계속해서 증가하고 있으며 이는 블레이드에 예상하지 못한 과도한 하중을 부과할 수 있게 된다. 한편 국내 태풍횟수는 연간 20회 이상에 이른다. 최근의 기상변화에 따르면 연간 태풍의 횟수나 태풍의 최고 속도 또한 계속

해서 증가할 것으로 예측된다. 따라서 블레이드의 길이가 증가할수록 중력과 풍 하중의 영향이 고려된 구조물의 동적 특성을 정확히 파악 하는 것이 더욱 중요해진다.

회전하는 블레이드의 진동특성에 관한 연구는 Southwell과 Gough⁽¹⁾가 구조물의 회전에 따른 고유진동수 변화를 구하는 방정식을 구한 이후로 수많은 연구들이 진행되어 왔다. 그 후 Abbas⁽²⁾는 회전하는 구조물의 안정성 해석 방법을 소개 하였다. 풍력 터빈 블레이드의 안정성 해석에 관한 연구들은 주로 공기역학적인 관점^(3,4)에서 발전되어 왔기 때문에 시스템의 동적 특성을 정확히 구현해 내지 못하는 한계를 가진다. Ishida⁽⁵⁾ 등은 회전하는 풍력 발전기의

† Corresponding Author ; Member, School of Mechanical Engineering Hanyang University
E-mail : hhyoo57@gmail.com
Tel : +82-2-2220-0446, Fax : +82-2-2293-5070

* Member, School of Mech. Eng. Hanyang Univ.

** School of Mech. Eng. Hanyang Univ.

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

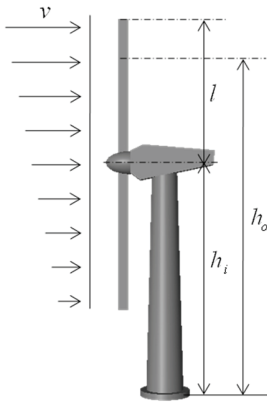


Fig. 1 Variation of wind turbine speed

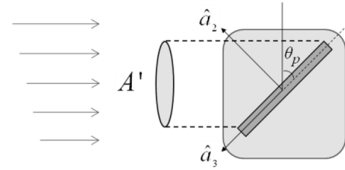


Fig. 2 Effective area of the blade

같은 관계식을 이용하여 나타낼 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$v_o = v_i \left(\frac{h_o}{h_i} \right)^\gamma \tag{1}$$

여기서 h_i 는 타워의 높이를 h_o 는 지표면으로부터 풍력 터빈 블레이드 임의의 점까지의 거리를, γ 는 지표형상 계수를 의미한다. 지표형상 계수는 구조물이 설치되는 장소에 따라 결정된다. v_i 와 v_o 는 각각 h_i 와 h_o 에서의 풍속을 의미한다. Fig. 1은 고도에 따른 풍속의 변화, 타워의 높이와 블레이드의 길이 l 을 나타낸 것이다.

풍력 터빈 블레이드에 가해지는 풍 하중은 블레이드 위치에 따른 풍속을 이용하여 계산할 수 있다⁽⁵⁾. 풍속에 의한 하중은 아래의 항력 식을 이용하여 구하였다.

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D A' v_o^2 \tag{2}$$

여기서 ρ 는 공기 밀도, C_D 는 항력 계수, A' 는 유효 면적을 나타낸다. 이 연구에서는 pitch각 변화에 따른 항력 계수를⁽¹¹⁾ 사용하였고, 유효 면적 또한 pitch각에 따라 변하는 값을 사용하였다. Fig. 2는 pitch각에 따른 유효면적을 나타낸다. 이 연구에서는 flutter와 stall 등의 공기역학적인 문제들은 고려하지 않고 해석을 수행하였다.

풍 하중은 블레이드에 분포하중으로 가해지게 되는데 풍속에 의한 블레이드의 분포하중은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x, \theta) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2l} x \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \tag{2}$$

여기서 x 와 θ 는 각각 블레이드 위 임의의 점의 위치와 블레이드의 회전 각도를 의미하고, a 와 b 는 각

과도응답을 실험을 통하여 구하고 1자유도 모델을 만들어 실험 결과와 비교하였다. 하지만 이 모델 또한 블레이드의 구조적인 진동을 정확히 구현하지 못한다. 따라서 이 연구에서는 회전하는 구조물의 진동 특성을 정확히 구현해 낼 수 있는 모델을 이용하여 안정성 해석을 수행하였다. 회전하는 외팔 보 형태의 구조물의 운동 방정식을 복합 변형변수를 이용하여 구하였다⁽⁶⁻⁸⁾. 최근에 Jung 등은⁽⁹⁾ 복합 변형변수를 이용하여 중력의 영향이 고려된 풍력 터빈 블레이드의 운동방정식을 구하였다.

이 연구에서는 참고문헌⁽⁹⁾을 바탕으로 풍하중과 풍력 터빈 블레이드의 pitch각을 고려한 모델을 이용하여 시스템의 안정성 해석을 수행하였다. 풍속은 고도가 높아짐에 따라 증가하기⁽¹⁰⁾ 때문에 고도에 따른 풍속의 변화를 고려하여 풍력 터빈 블레이드에 작용하는 풍 하중을 모델링 하였다. 풍력 터빈 블레이드의 pitch각은 풍속에 따라 제어되기 때문에 시스템의 안전한 설계를 위해서 풍속과 pitch각 변화에 따른 안정성 특성을 정확히 파악해야 한다. 이러한 모델을 이용하여 구조물의 회전속도와 블레이드의 길이 변화에 따른 안정성 해석 결과를 도출 하였다.

2. 시스템 모델링

2.1 풍 하중 모델링

풍속은 고도가 높아짐에 따라 증가하게 된다. 따라서 블레이드가 회전하면서 고도가 계속해서 변하기 때문에 블레이드에 작용하는 풍 하중 또한 계속해서 변하게 된다. 고도에 따른 풍속의 변화는 다음과

각 h_i+l 과 h_i-l 높이에서의 풍속에 의한 하중을(F_D) 의미한다. Fig. 3은 x 와 θ 에 대해 나타낸 그림이고 Fig. 4는 블레이드가 한 바퀴 회전 하는 경우에 대해 각 블레이드 위치에 작용하는 하중 분포를 나타낸 것이다. Fig. 4에서 알 수 있듯이 블레이드가 180° 위치에 있을 때 블레이드 끝 단에 작용하는 힘의 크기가 가장 크고 블레이드가 0° 위치에 있을 때 블레이드 끝 단에 작용하는 힘의 크기가 가장 작은 것을 알 수 있다. 풍 하중은 θ 에 따라 블레이드에 가해지는 분포하중의 합력이 블레이드 위의 분포하중 면적의 도심인 블레이드 위의 한 점에 작용한다고 가정할 수 있다. 풍력 터빈 블레이드의 θ 에 따라 작용하는 바람에 의한 합력과 그 작용점은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_w(\theta) = \left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] l \quad (3)$$

$$\bar{r} = \frac{\frac{a+b}{4} + \frac{a-b}{6} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} l \quad (4)$$

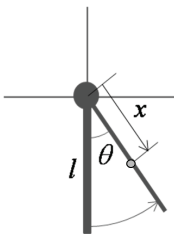


Fig. 3 Variation of wind turbine speed

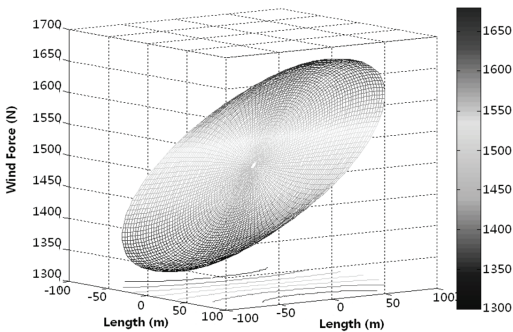


Fig. 4 Distributed wind force over the rotating angle and length of the blade

여기서 $F_w(\theta)$ 는 분포하중의 합력을 나타내고 \bar{r} 는 합력의 작용점을 나타낸다. 이 연구에서는 분포하중의 합력을 사용하여 해석을 수행하였다.

2.2 풍 하중과 pitch각을 고려한 시스템의 운동 방정식 유도

이 장에서는 참고문헌(9)의 모델을 바탕으로 풍하중과 pitch각을 고려하여 시스템의 운동방정식을 유도하였다. Fig. 5는 허브에 연결 되어 있는 블레이드의 좌표계와 변형된 형상을 나타낸다. 여기서 P_0 는 블레이드 위의 임의의 점의 변형 전 위치를 P 는 변형 후의 위치를 나타낸다. 또한 \hat{a}_1, \hat{a}_2 과 \hat{a}_3 은 강체인 허브 D 에 부착된 단위벡터를 이고, x 는 고정 점 O 로부터 P_0 까지의 거리를, u_1 는 탄성변위벡터를, s 는 P 위치에서 보가 인장된 길이를 나타낸다. Rayleigh-Ritz 가상 모드 방법을 사용하여 인장방향 변위, 면내 굽힘 방향 변위, 면 외 굽힘 방향 변위들을 각각 s, u_2, u_3 과 같이 나타낼 수 있다(12). 이 연구에서 비틀림 방향 모드는 고려하지 않았다.

$$s = \sum_{i=1}^{n_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (5)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (6)$$

$$u_3 = \sum_{i=1}^{n_3} \phi_{3i}(x) q_{3i}(t) \quad (7)$$

여기서 $\phi_{1i}, \phi_{2i}, \phi_{3i}$ 는 s, u_2, u_3 을 표현하기 위한 가상모드들이며 q_{1i}, q_{2i}, q_{3i} 는 일반좌표들을 나타내고 u_1, u_2, u_3 은 각각의 가상모드의 개수이다. Fig. 6은 풍력 터빈 블레이드의 pitch각 θ_p 를 나타낸다.

앞장에서 구한 풍 하중과 pitch각을 고려하여 Kane's method(13) 이용하여 다음과 같은 면내, 면 외

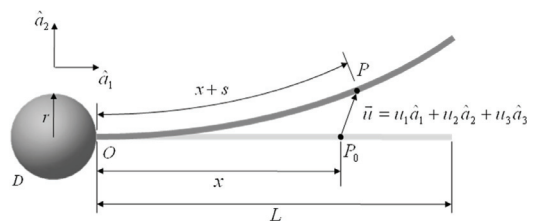


Fig. 5 Coordinate system for the blade

급힘 방향 두 개의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \left(k_{ij}^{B2} - \omega^2 \sin^2 \theta_p m_{ij}^{22} + (r\omega^2 + g \cos \theta) k_{ij}^{GA2} + \omega^2 k_{ij}^{GB2} \right) q_{2j} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_2} (\omega^2 \sin \theta_p \cos \theta_p m_{ij}^{23}) q_{3j} + g \sin \theta_p \sin \omega t P_{2i} = \cos \theta_p F_w(\theta) \phi_{2i}(\bar{r}) \quad (i = 1, \dots, \mu_2) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_3} \left[m_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + \left(k_{ij}^{B3} - \omega^2 \cos^2 \theta_p m_{ij}^{33} + (r\omega^2 + g \cos \theta) k_{ij}^{GA3} + \omega^2 k_{ij}^{GB3} \right) q_{3j} \right] + \sum_{j=1}^{\mu_3} (\omega^2 \sin \theta_p \cos \theta_p m_{ij}^{32}) q_{2j} + g \sin \theta_p \sin \omega t P_{3i} = \sin \theta_p F_w(\theta) \phi_{3i}(\bar{r}) \quad (i = 1, \dots, \mu_3) \tag{9}$$

여기서

$$m_{ij}^{ab} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \tag{10}$$

$$k_{ij}^S \equiv \int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \tag{11}$$

$$k_{ij}^B \equiv \int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \tag{12}$$

$$k_{ij}^{GA} \equiv \int_0^L \rho(L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \tag{13}$$

$$k_{ij}^{GB} \equiv \int_0^L \frac{1}{2} \rho(L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \tag{14}$$

$$P_{ai} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} dx \tag{15}$$

식 (8)과 (9)를 이용하여 풍 하중과 pitch각 변화에

따른 풍력 터빈 블레이드의 안정성 해석을 수행하였다.

3. 수치해석

이 장에서는 2.2장에서 유도된 운동방정식을 이용하여 풍 하중과 pitch각 변화를 고려하여 풍력 터빈 블레이드의 안정성 해석을 수행하였다. 유도된 운동방정식은 비 제차 미분방정식이기 때문에 안정성 해석에 주로 이용되는 Floquet's theory와 multiple scale method을 이용하지 않고 direct numerical integration method을 이용하여 안정성 해석을 수행하였다. 해석에 수행된 풍력 터빈 블레이드는 해안가에 설치되어 있다고 가정하여, 식 (1)에서 사용된 지표형상 계수 γ 는 1.5로 하여 해석을 수행하였다. 각 조건에서 허브의 회전속도와 블레이드 길이 변화에 따라 불안정한 거동이 발생하는 영역을 조사해보았다. 해석에 사용된 블레이드의 물성치는 Table 1⁽¹⁴⁾과 같다. 해석 시 시스템은 정지 상태에서 허브의 각속도가 spin-up motion 형태로 15초 동안 증가하여 구동 속도에 도달한다. Fig. 7은 시간에 따른 허브의 회전속도 변화를 나타낸다. 안정성 해석은 블레이드 길이와 회전속도를 변화시켜 가면서 각 조건에서 100초 동안 해석을 수행하여 정상상태에서 얻어진 블레이드 끝 단의 응답 중 최대값을 블레이드 변위로 나눈 정규화된 최대 변위를 이용하여 안정성 도표를 구하였다.

Fig. 8은 풍 하중이 작용하지 않을 때 pitch각 변화에 따른 시스템의 안정성 도표이다. 안정성 도표에서 나타난 색은 블레이드 끝 단의 정규화된 최대 변위를 나타낸다. 안정성 도표에서 주로 나타나는 불안정 영역은 회전하는 풍력 터빈 블레이드의 첫 번째 고유진동수 부근이다. Pitch각이 증가 할수록 $\theta_p=0^\circ$ 에서 나타나지 않던 불안정한 영역이 나타나는

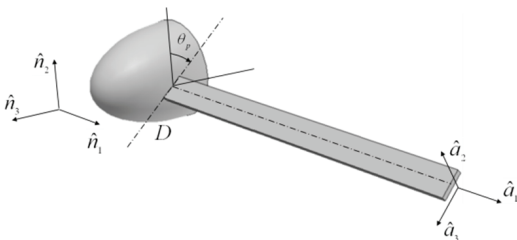


Fig. 6 Pitch angle for the blade

Table 1 Numerical data of wind turbine blade

Notation	Description	Numerical data
E	Young's modulus	51.7 GPa
ρ	Mass per unit length	288.455 kg/m
I_2	Moment of inertia	6.69E-4 m ⁴
I_3	Moment of inertia	9.53E-3 m ⁴

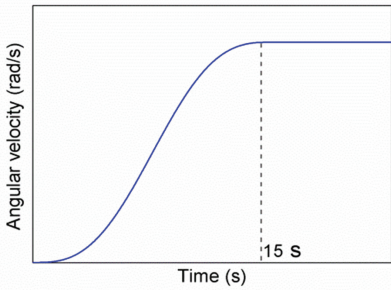
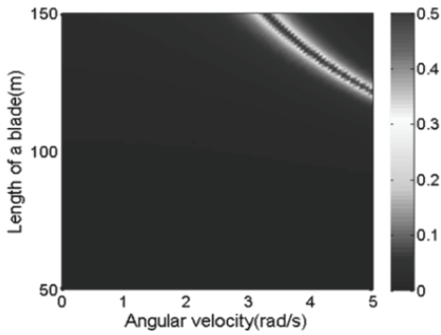
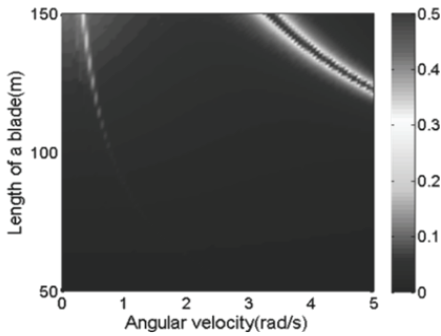


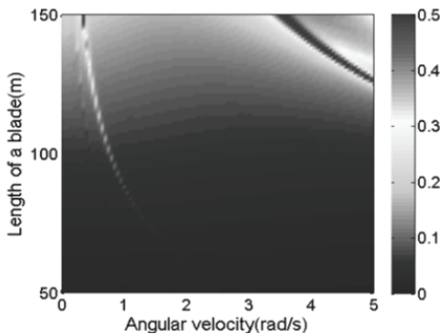
Fig. 7 Angular speed of hub



(a) $\theta_p=0^\circ$



(b) $\theta_p=10^\circ$



(c) $\theta_p=20^\circ$

Fig. 8 Stability diagrams considering the pitch angles ($v_i=0$ m/s)

것을 알 수 있다. 희미하게 나타나는 불안정한 영역은 첫 번째 고유진동수의 1/4 부근에서 나타나며 pitch각이 증가 할수록 불안정성의 세기가 점점 강해지는 것을 알 수 있다.

Fig. 9는 pitch각이 0°인 경우 허브의 회전속도에 따른 시스템의 1차 고유진동수 변화를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 블레이드의 길이가 줄어들고 허브의 회전속도가 증가할수록 시스템의 고유진동수가 증가하는 것을 알 수 있다. 점선으로 표시된 지점은 시스템의 회전속도와 1차 고유진동수가 만나는 지점이다.

Fig. 10은 pitch각이 0°이고 블레이드 길이가 130 m 인 경우, 시스템의 1차 고유진동수 4.216 rad/s로 회전 시켰을 때 블레이드 끝 단의 정규화된 과도 응답을 나타낸 것이다. 그림을 통해 불안정 영역에서 시

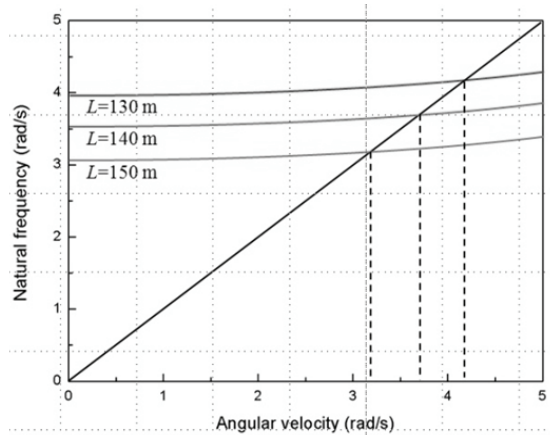


Fig. 9 Variation of first natural frequency

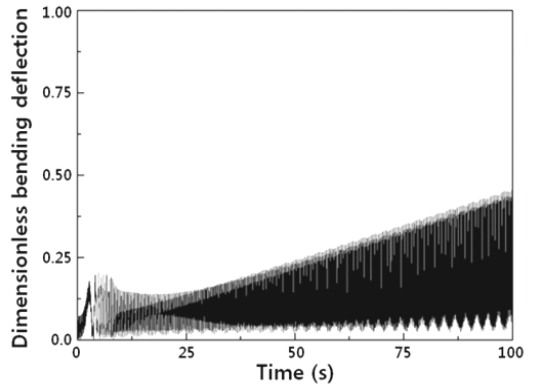


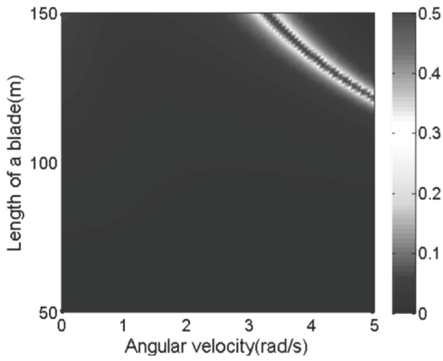
Fig. 10 Transient response at unstable region

시스템이 구동되는 경우 응답이 발산하는 것을 알 수 있다. 이와 반대로 Fig. 8에서 나타난 파란색 영역은 안정된 영역이므로 그 곳에서 얻은 응답들은 모두 수렴할 것이라곤 것을 예측할 수 있다.

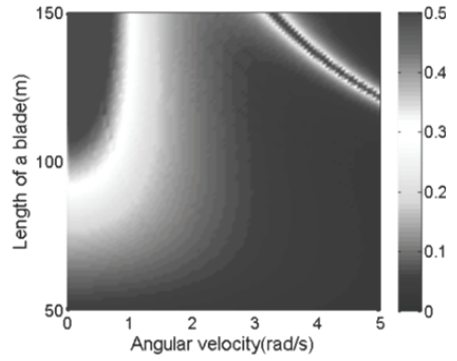
Fig. 11은 풍속이 $v_f=10$ m/s인 일반적인 구동 조건에서의 안정성 도표이다. 일반적인 구동 조건에서의 안정성 도표는 풍 하중이 작용하지 않을 때와 비교

하여 큰 차이를 보이지 않는 것을 알 수 있다. 일반적으로 풍력 터빈 블레이드의 구동 속도는 0~3 rad/s인데 pitch각이 증가 할수록 저속에서 불안정 영역 또한 증가하기 때문에 불안정 영역을 피해 시스템을 운영하는 것이 매우 중요하다.

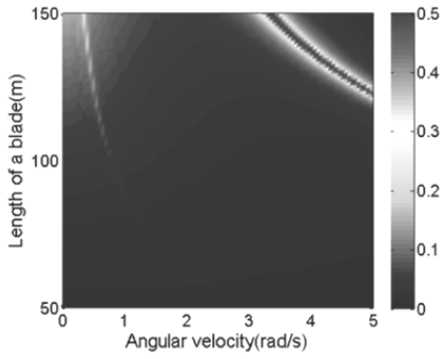
Fig. 12는 태풍이 부는 상황을 가정하여 $v_f=50$ m/s인 조건에서 안정성 해석을 수행한 결과이다. 풍속이



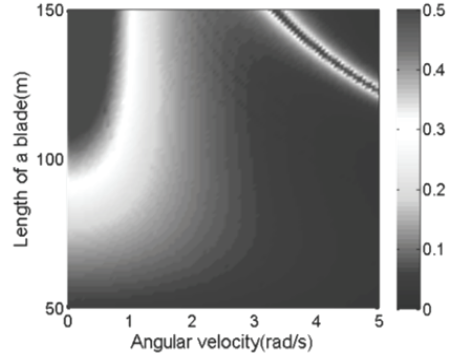
(a) $\theta_p=0^\circ$



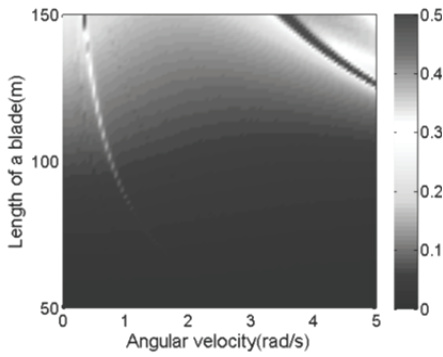
(a) $\theta_p=0^\circ$



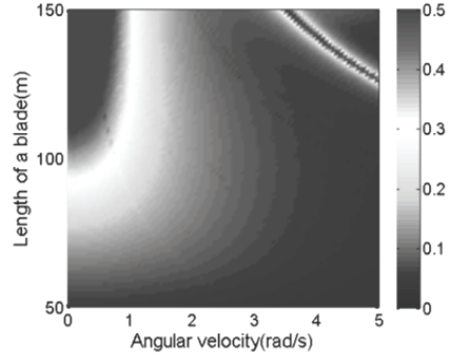
(b) $\theta_p=10^\circ$



(b) $\theta_p=10^\circ$



(c) $\theta_p=20^\circ$



(c) $\theta_p=20^\circ$

Fig. 11 Stability diagrams considering the pitch angles($v_f=10$ m/s)

Fig. 12 Stability diagrams considering the pitch angles($v_f=50$ m/s)

크게 증가하게 되면 일반적인 구동 조건에서 나타나던 불안정한 영역 외에 블레이드의 변위가 매우 크게 발생하는 영역이 나타나는 것을 알 수 있다. 이는 블레이드의 고유진동수 영역에서 나타나는 불안정한 영역이 아니며 풍력에 의해 단순히 블레이드의 동적 응답이 증가하는 영역이다. 특히 블레이드 길이가 증가하고 저속으로 회전하는 영역에서 나타나는 것을 확인 할 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 풍 하중과 풍력 터빈 블레이드의 pitch각이 고려된 모델링 방법을 제안하고 제안된 모델을 이용하여 풍속과 pitch각 변화에 따른 안정성 해석을 수행하였다. Pitch각 변화에 따라 회전하는 풍력 터빈 블레이드의 고유진동수가 변하기 때문에 불안정한 영역의 위치도 변하게 된다. 또한 pitch각이 증가하게 되면 $\theta_p=0^\circ$ 에서 나타나지 않던 불안정한 영역이 나타나게 된다.

풍속이 크게 증가하게 되면 풍력 터빈 블레이드의 고유진동수 부근에서 나타나는 불안정한 영역 외에 블레이드의 동적 응답이 크게 나타나는 영역이 생기는 것을 알 수 있다. 이는 풍력 터빈 블레이드의 고유진동수 부근에서 불안정한 동적 거동을 나타내는 것이 아니고 풍 하중에 의해 동적 응답이 증가하는 현상이다. 특히 블레이드 길이가 증가하고 시스템이 저속으로 회전하는 영역에서 나타나는 것을 확인할 수 있다.

후 기

이 논문은 2012년도 2단계 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

이 연구는 2011년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades, British A. R. C. Reports and Memoranda, No. 766.

(2) Abbas, B. A. H., 1986, Dynamic Stability of a Rotating Timoshenko Beam with a Flexible Root, Journal of Sound and Vibration, Vol. 108, No. 1, pp. 25~32.

(3) Hansen, M. H., 2004, Aeroelastic Stability Analysis of Wind Turbines Using an Eigenvalue Approach, Wind Energy, Vol. 7, No. 2, pp. 133~143.

(4) Riziotis, V. A. and Voutsinas, S. G., 2004, Aeroelastic Stability of Wind Turbine, Wind Energy, Vol. 7, No. 4, pp. 373~392.

(5) Ishida, Y., Inoue, T. and Nakamura, K., 2009, Vibration of a Wind Turbine Blade(theoretical analysis and experiment using a single rigid blade model), Journal of Environment and Engineering, Vol. 4, No. 2, pp. 443~454.

(6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, No. 2, pp. 139~151.

(7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion, Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(8) Yoo, H. and Shin, S., 1998, Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.

(9) Jung, K. I. and Yoo, H. H., 2010, Dynamic Stability Analysis of a Rotating Blade Considering Gravity Effect, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 11, pp. 1052~1057.

(10) Spera, D. A., 1994, Wind Turbine Technology, America Society of Mechanical Engineering.

(11) Lanzafame, R. and Messina, M., 2007, Fluid Dynamics Wind Turbine Design: Critical Analysis, Optimization and Application, Vol. 32, No. 14, pp. 2291~2305.

(12) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion, Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.

(13) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics, Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co.

(14) Murtagh, P. J., Basu, B. and Broderick, B. M., 2005, Along Wind Response of a Wind Turbine Tower

with Blade Coupling Subjected to Rotationally Sampled Wind Loading, *Engineering Structures*, Vol. 27, No. 8, pp. 1209~1219.



Seung Min Kwon received his B.S. degrees in the Department of Mechanical Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea in 2008. He is working as a ph.D. candidate in the Department of Mechanical Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include structural vibration and multi-body dynamics.



Moon Jeong Kang received her B.S. degrees in the Department of Mechanical Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea in 2012. She is working as a M.S. candidate in the Department of Mechanical Engineering in Hanyang University, Seoul, Korea. Her research interests include vi-

bration and multi-body dynamics.



Hong Hee Yoo received his B.S. and M.S. degrees in the Department of Mechanical Design in Seoul National University in 1980 and 1982. He received his Ph.D. degree in the Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics in the University of Michigan at Ann Arbor in 1989. He is a professor in the Department of Mechanical Engineering at Hanyang University, Seoul, Korea. His research interests include multi-body dynamics, structural vibration, and statistical uncertainty analysis in mechanics.