

나노 스케일 판의 좌굴해석을 위한 비국소 탄성 이론의 적용

이원홍¹, 한성천², 박원태^{3*}

¹경남과학기술대학교 토목공학과, ²대원대학교 철도건설과, ³공주대학교 건설환경공학부

Application of nonlocal elasticity theory for buckling analysis of nano-scale plates

Won-Hong Lee¹, Sung-Cheon Han² and Weon-Tae Park^{3*}

¹Department of Civil Engineering, Gyeongnam National University of Science and Technology

²Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

³Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University

요약 Eringen의 비국소 탄성이론을 이용한 3차 전단변형이론을 정식화 하였고 비국소 탄성이론이 적용된 평형방정식을 유도하였다. 비국소 탄성 이론은 미소 규모 효과를 고려할 수 있고 3차원 전단변형이론은 나노 판의 두께방향으로의 전단변형률과 전단응력의 곡선변화 효과를 고려할 수 있다. 모든 변이 단순지지된 나노-스케일 판의 지배방정식을 풀기 위해 Navier 방법을 사용하였다. 비국소 변수의 효과를 나타내기 위한 나노-스케일 판의 해석적 좌굴하중을 제시하였다. 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 나노-스케일 판의 크기, (ii) 비국소 계수, (iii) 형상비 그리고 (iv) 모드 수 등이 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다. 본 연구의 결과를 검증하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교 분석하였으며 해석결과는 참고문헌의 결과들과 잘 일치함을 알 수 있었다. 비국소 이론에 의한 나노-스케일 판의 좌굴해석에 관한 연구는 향후 관련연구에 비교자료로 활용될 수 있을 것이다.

Abstract Third-order shear deformation theory is reformulated using the nonlocal elasticity of Eringen. The equation of equilibrium of the nonlocal elasticity are derived. This theory has ability to capture the both small scale effects and quadratic variation of shear strain through the plate thickness. Navier's method has been used to solve the governing equations for all edges simply supported boundary conditions. Analytical solutions of buckling of nano-scale plates are presented using this theory to illustrate the effect of nonlocal theory on buckling load of the nano-scale plates. The relations between nonlocal third-order and local theories are discussed by numerical results. Further, effects of (i) length (ii) nonlocal parameter, (iii) aspect ratio and (iv) mode number on nondimensional buckling load are studied. In order to validate the present solutions, the reference solutions are used and discussed. The present results of nano-scale plates using the nonlocal theory can provide a useful benchmark to check the accuracy of related numerical solutions.

Key Words : Nonlocal elasticity theory; Third-order shear deformation theory; Buckling analysis, Aspect ration, Nano-scale plates

1. 서론

20세기가 마이크로로 대별되는 시대였다면 21세기는 나노시대라 할 수 있다. "나노(nano)"란 그리스어의 "나장

이"란 의미에서 유래한 말로 10억분의 1을 가리키는 미세 단위이다. 1 나노미터(1 nm)는 머리카락 굵기의 10만분의 1에 해당하며 생물체의 DNA정도 크기이다. 나노기술을 응용분야별로 분류하면 크게 소재기술, 소자, 환경/

이 논문은 2012년도 경남과학기술대학교 기성회 연구비 지원에 의해 연구되었음.

*Corresponding Author : Weon-Tae Park

Tel: +82-10-9437-5914 email: pwtae@kongju.ac.kr

접수일 12년 08월 03일

수정일 (1차 12년 08월 28일, 2차 12년 09월 06일)

게재확정일 12년 11월 08일

생명공학 등으로 분류할 수 있다.

최근들어 나노구조에 관한 실험적인 부분과 이론적인 부분에 대한 관심이 증대되고 있다. 이러한 나노구조는 나노 보, 나노 링, 나노 판, 나노 시트, 나노 셸 등을 포함한다. 미소 스케일 구조들은 전통적인 구조 재료들에 비해 획기적인 역학적, 전기학적, 전자학적 그리고 열 특성들을 가지고 있다. 따라서 나노구조들의 새로운 응용이 예견되고 있는 현실이다. 이러한 응용분야에서 나노구조물들의 정확한 역학적, 물리학적 특성에 대한 이해와 성능과 신뢰도에 미치는 영향에 대한 이해가 반드시 필요하다.

나노구조에 대한 대부분의 연구는 카본 나노 튜브 [1-2]에 집중되어 왔고 나노 스케일 판에 대한 연구는 거의 없는 실정이다. 몇몇 연구자들이 나노 스케일 판의 전기학적 거동에 대하여 연구하였다. 이러한 결과로 인해 역학적 거동의 정확한 예측을 위한 적절한 수학적, 이론적 모델을 개발이 필요하게 되었다. 그러나 나노 스케일 판의 역학적 현상에 관해서는 매우 적은 연구들만이 보고되었다 [3-4].

마이크로 및 나노 규모 분야에서 빠른 기술 발달로 인해 미소 규모 효과 및 원자간 힘들의 고려가 반드시 필요하지만 이러한 연구에서는 수많은 방정식이 필요하게 되어 해석에 엄청난 노력과 시간이 소모되었다. 따라서 연속체 역학의 개념이 방대한 시스템의 해석에 적용되었다. 이러한 연속체 역학 이론 중에 미소 규모 효과를 포함하며 잘 알려진 방법 중의 하나가 Eringen[5-6]의 비국소 탄성 이론이다. 기존의 고전적 연속체 역학 이론들과 비교하여 Eringen[5-6]의 비국소 탄성 이론은 수많은 방정식을 풀지 않고 나노 구조물의 거동을 정확하게 예측할 수 있다.

최근들어 몇몇 연구자들이 마이크로 및 나노 구조의 연구를 수행하였다[8-9]. 이러한 연구들은 고전적 판 이론 혹은 1차 전단변형 이론을 적용하였다. 이원홍 등[10]은 점진기능재료(FGM)의 처짐에 관하여 1차원 전단변형을 고려한 해석적 결과를 제시하였다. 그러나 2차원 나노 판의 정확한 응력장을 해석하기 위하여 개선된 연구가 필요하다.

3차 전단변형이론은 Reddy[11]에 의해 변위장에서 두 계방향 3차식으로 유도되었다. 전단변형률과 전단응력은 판의 두계방향을 따라 곡선 분포 하는 것으로 표현되었고 판의 상면과 하면에서 0으로 적용되었다. 따라서 전단 보정계수가 필요하지 않게 되었다. 복잡한 평형방정식과 계산과정에도 불구하고 고전적 이론과 1차 전단변형 이론에 비하여 3차 전단변형이론에 의한 결과는 3차원 탄성해석에 수렴된 결과를 나타낸다. 따라서 미소 규모 효

과를 포함하는 3차 전단변형 판 이론의 확장 연구가 필요하다. 본 연구에서는 비국소 탄성 이론을 이용하여 3차 전단변형이 고려된 나노 구조물의 해석을 수행하고자 한다.

판 구조에 면내 압축력이 작용하면 판은 좌굴현상이 발생하게 된다. 이러한 좌굴하중에 대한 이해는 설계분야에서 매우 중요한 부분이다. 따라서 판 구조의 탄성 좌굴에 대한 수많은 연구결과들이 발표 되었다. 나노-스케일 판 역시 면내 압축하중이 재하되면 면내 좌굴하중은 미소 규모 효과에 의해 영향을 받게 된다. 나노-스케일 판의 효과적인 사용을 위해서는 면내 압축력에 대한 구조적 안정 응답에 관한 연구가 반드시 필요하다. 미소 규모 효과가 고려된 나노-스케일 판에 대한 좌굴해석이 매우 부족한 상황이므로 본 연구에서는 비국소 탄성이론을 이용한 나노-스케일 판의 정식을 제시하였다.

가상일의 원리를 이용한 2차원 비국소 지배 방정식을 유도하고 비국소 미소 규모 변수는 적합조건식에 고려하였다. 본 연구에서는 국소 탄성이론과의 관계를 수치해석 결과를 통하여 고찰하였다. 또한 (i) 나노-스케일 판의 크기, (ii) 비국소 계수, (iii) 형상비 그리고 (iv) 모드 수 등이 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중에 미치는 효과에 대하여 관찰하였다.

2. 비국소 탄성 이론

2.1 비국소 탄성 이론

Eringen[7]에 따르면 탄성 연속체의 한 점 x 에서의 응력장은 그 점에서의 변형률장에만 관련 있는 것이 아니고 연속체의 다른 모든 점들에 관련 있는 것이다. Eringen[7]은 식(1)과 같은 비국소 응력 텐서를 제안하였다.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau) t_{ij}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1)$$

여기서 $t_{ij}(\mathbf{x})$ 는 고전적 응력텐서의 성분이고 커널 함수 $K(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tau)$ 는 비국소 탄성계수를 나타내며, $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 는 유클리디안 놈으로 거리가 되고 τ 는 재료 상수이다. 일반적인 후크의 법칙에서 응력 \mathbf{t} 는 식(2)와 같다.

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad \text{or} \quad t_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

여기서 \mathbf{C} 는 4차 탄성 텐서이다.

비국소 탄성 이론에서 운동방정식은 비국소 균형 법칙으로부터 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (3)$$

여기서 i, j 는 x, y, z 으로 표현되고 f_i, ρ 그리고 u_i 는 체적력, 밀도 그리고 변위 벡터를 의미한다. 식(1)을 식(3)에 대입하면 적분형태의 비국소 적합 조건식을 얻을 수 있다. 하지만 적분 형태의 방정식은 미분 방정식에 비해 해를 구하기 어렵다. Eringen[7]은 비국소 적합 조건식을 식(4)와 같이 미분 형태로 제안하였다.

$$t_{i,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0, \quad (4)$$

여기서 선형 미분 연산자 \mathcal{L} 은 식(5)로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2, \quad (5)$$

여기서 μ 는 비국소 변수, e_0 는 실험으로 정해지는 재료 상수이고 \bar{a} 는 내적 특성 길이이다.

식(5)의 연산자를 식(1)에 적용하면 적합 조건식이 식(6)과 같이 간단해진다.

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

식(6)은 적분 관계식인 식(1)에 비해 선형 탄성 문제들의 적용에서 더 간단하고 편리하다(Eringen[7]).

2.2 비국소 탄성 판

식(2)와 식(6)을 이용하여 응력 관계식은 비국소 이론을 위한 변형률 항들로 재정리할 수 있다. 평면응력 가정에 기초한 판 이론에서 $\sigma_{zz} = 0$ 이 되고 2차원 문제로 해석된다. (x, y, z) 좌표계에서 xy -면은 판의 중립면이다. 따라서 평면응력 상태에서의 응력-변형률 관계식은 식(7)과 같다.

$$t_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (7)$$

여기서 $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta z z} C_{z z \gamma \delta} / C_{z z z z}$ 이다.

그리고 수직 전단응력-변형률 관계는 식(8)과 같다.

$$t_{\alpha z} = 2\bar{C}_{\alpha z \gamma z} \varepsilon_{\gamma z}, \quad (8)$$

여기서 α, β, γ 그리고 δ 는 x, y 로 표현된다.

국소 이론과 비국소 이론에서 면내력들의 관계는 식(6)을 판의 두께방향으로 적분하여 식(9)와 같이 얻을 수 있다.

$$\mathcal{L}(N_{ij}) = N_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(M_{ij}) = M_{ij}^L, \quad \mathcal{L}(P_{ij}) = P_{ij}^L, \quad (9)$$

여기서

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}^L \\ M_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}^L \\ P_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{\alpha\beta}, t_{\alpha\beta}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha z}, N_{\alpha z}^L \\ R_{\alpha z}, R_{\alpha z}^L \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{\alpha z}, t_{\alpha z}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} dz. \quad (11)$$

덧셈자 L 은 국소 3차 전단변형 이론을 나타내고 h 는 판의 두께이다. 비국소 이론에서 판의 평형방정식은 식(3)을 두께방향으로 적분하고 시간에 관한 미분항을 무시하면 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{i\alpha,\alpha} + F_i = 0, \quad (12)$$

여기서 $F_i = \int_{-h/2}^{h/2} q_i dz$ 이다. 식(3)에 z 를 곱하고 두께 방향으로 적분한 다음 시간에 관한 미분항을 무시하고 부분적분법을 사용하면 식(13)을 얻을 수 있다.

$$M_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} = 0. \quad (13)$$

비슷한 방법으로 식(3)에 z 의 곱차항을 곱하고 적분한 다음 시간에 관한 미분항을 무시하면 곱차 면내력에 관한 식(14)를 얻을 수 있다.

$$P_{\alpha\beta,\beta} - 3R_{\alpha z} = 0. \quad (14)$$

일반적으로 식(5)의 미분 연산자 ∇ 는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자 ∇ 는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 식(15)와 같다.

$$\bar{\mathcal{L}} = 1 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 z 방향에 대해 독립적이다.

2.3 비국소 3차원 전단변형 이론

3차 전단변형 이론은 1차 전단변형 이론에서 판의 두께전체에서 상수로 가정된 전단변형률과 전단응력을 상수가 아닌 일반적인 곡선분포로 가정하여 확장한 것이다 (Reddy, [11]). 판의 3차 전단변형 이론에서 변위장은 식(16)과 같다.

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + z\phi_\alpha - c_1 z^3 (\phi_\alpha + u_{,\alpha}^0), \quad u_z = w^0, \quad (16)$$

여기서 u_α 는 중립면($z=0$)의 한 점에서의 면내 변위들 이고, $c_1 = 4/3h^2$, u_z 는 판의 중립면에서 수직방향 변위 이다. 그리고 ϕ_α 는 중립면에서 전단변형각이다.

3차원 전단변형 이론을 고려한 변위장을 식(12)-(14)에 대입하고 비국소 3차원 전단변형 이론의 굽힘 응답을 위한 평형방정식을 유도하기 위해 식(12)와 식(13)을 식(19)와 조합하면 식(17)과 식(18)을 얻을 수 있다.

$$N_{\alpha z,\alpha} - c_2 R_{\alpha z,\alpha} + q_z + c_1 P_{\alpha\beta,\alpha\beta} = 0, \quad (17)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - c_1 P_{\alpha\beta,\beta} - N_{\alpha z} + c_2 R_{\alpha z} = 0, \quad (18)$$

여기서 $c_2 = 3c_1$ 이다.

2.4 비국소 탄성 평형방정식

Hamilton[12]의 가상변위의 원리에서 3차원 비국소 판

이론에 의한 동적 평형방정식을 식(19)와같이 구할 수 있다.

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt. \quad (19)$$

식(19)에 비국소 면내력을 대입하고 부분적분하면 식(20)-(24)와 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u_x : N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \quad (20)$$

$$\delta u_y : N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta w^0 : & N_{zx,x} + N_{zy,y} - c_2(R_{zx,x} + R_{zy,y}) \\ & + c_1(P_{xx,xx} + P_{yy,yy} + 2P_{xy,xy}) \\ & - \bar{\mathcal{L}} [q_z + N_{xx,xx}^0 + N_{yy,yy}^0] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_x : & M_{xx,x} + M_{xy,y} - c_1(P_{xx,x} + P_{xy,y})N_{zx} + c_2R_{zx} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_y : & M_{xy,x} + M_{yy,y} - c_1(P_{xy,x} + P_{yy,y})N_{zy} + c_2R_{zy} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, N_{xx}^0, N_{yy}^0 는 각각 x 방향 면내 압축력, y 방향 면내 압축력이다.

2.5 Navier 해법

나노 판의 처짐에서 미소 규모 효과를 연구하기 위해 비국소 3차원 전단변형이론을 이용한 단순지지 판의 휨 해석 결과를 제시하였다. 4변이 단순지지된 경우에 Navier방법으로 해석결과를 구할 수 있다. Navier해법에서 판의 중립면에서의 변위는 이중 푸리에 급수로 식(25)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} A_1, & u_y^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} A_2, \\ w^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} A_3, & \phi_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} A_1, \\ \phi_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} A_2, & q_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} A_3, \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y$, $A_2 = \sin \xi x \cos \eta y$,

$A_3 = \sin \xi x \sin \eta y$ 그리고 $\xi = \frac{m\pi}{a}$, $\eta = \frac{n\pi}{b}$ 이다.

나노 스케일 판의 좌굴 해석을 위하여 식(25)를 식(20)-(24)에 대입하고 행렬형태로 정리하면 평형방정식 식(26)을 얻을 수 있다.

$$[\Gamma] \{\Delta\} = \{0\}, \quad (26)$$

여기서 $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$ 그리고 $[\Gamma]$ 는 식(27)과 같다.

$$[\Gamma] = [\mathbf{K}] - \lambda_{mn} [\mathbf{G}]. \quad (27)$$

여기서 $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬, λ_{mn} 은 좌굴하중 그리고 $[\mathbf{G}]$ 는 기하강성행렬이다.

3. 해석 결과

본 해석 기법의 성능을 검증하기 위하여 나노 스케일 보의 해석결과를 참고문헌[13, 14]의 무차원 임계하중 해석 결과와 비교하였다. 등방성 보의 재료 및 기하학적 성질은 표 1 그리고 그림 1과 같다.

3.1 해석 결과 검증

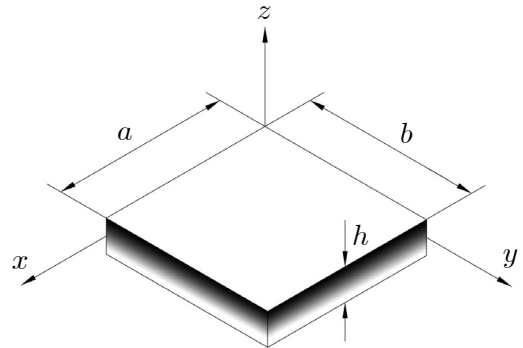
[표 1] 나노 스케일 보의 재료 및 기하학적 성질

[Table 1] Material and Geometry properties of nano-scale beam

E	ν	b	b/h
30×10^6	0.25, 0.3	10	100

비국소 탄성 이론을 적용한 나노 스케일 보의 좌굴하중을 무차원화 하여 나타내었다. 좌굴하중의 무차원 값은 식(28)을 사용하여 나타내었다.

$$\bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \times \frac{b^2}{Eh^3/(12(1-\nu^2))} \quad (28)$$



[그림 1] 나노 스케일 판의 기하학적 형상
[Fig. 1] Geometry of nano-scale plate

표 2에서 본 연구 I 은 $\nu=0.25$, 본 연구 II는 $\nu=0.3$ 을 표 1의 데이터와 함께 식(27)에 대입하여 얻은 결과이다. 참고문헌[13, 14]에 포아송비에 대한 자료가 제시되지 않아 본 저자의 경험에 근거, 포아송비를 추측하여 두 가지

결과를 얻었다. 두 가지 결과와 참고문헌의 결과에서 오차는 거의 발생하지 않지만 향후 연구자들을 위해서 정확한 자료의 제시는 반드시 필요하다고 판단된다.

[표 2] 나노 스케일 보의 무차원 좌굴하중 ($a = \infty, b/h = 100$)

[Table 2] Non-dimensional critical buckling loads of nano-scale beam ($a = \infty, b/h = 100$)

μ	Narendar [13]	Narendar [14]	본 연구 I	본 연구 II
0	9.8696	9.8671	9.8670	9.8668
0.5	9.4055	9.4031	9.4030	9.4028
1.0	8.9830	8.9807	8.9807	8.9805
1.5	8.5969	8.5947	8.5946	8.5945
2.0	8.2426	8.2405	8.2404	8.2403
2.5	-	-	7.9142	7.9141
3.0	-	-	7.6129	7.6128
4.0	-	-	7.0742	7.0741
5.0	-	-	6.6067	6.6066

판의 좌굴하중에 대한 검증을 위하여 국소 탄성이론에 의한 등방성 판의 좌굴하중을 Timoshenko와 Gere[15]의 결과와 비교하였다. 판은 4변 단순지지되어있고 1방향 압축하중을 받는다. Timoshenko와 Gere[15]에 제시된 결과를 무차원화 하여 좌굴하중을 구하였다.

$$\text{좌굴하중} : \lambda_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (29)$$

$$\text{무차원 좌굴하중} : \bar{\lambda}_{cr} = \lambda_{cr} \frac{b^2}{D} = 39.4784 \quad (30)$$

여기서, D 는 판의 휨강성이다.

참고문헌 [15]와 동일한 조건에서 식(27)을 이용한 본 연구의 결과는 39.4782로 판의 좌굴하중 결과도 참고문헌과 정확히 일치하였다.

마지막 검증 예제로 비국소 탄성이론의 나노 스케일 판에 대한 적용성을 검토하기 위하여 2방향 압축을 받는 4변 단순지지된 나노 스케일 판의 무차원 좌굴하중을 참고문헌의 결과와 비교하여 표 3에 나타내었다. $\nu=0.3$ 을 표 1의 데이터와 함께 식(27)에 대입하여 계산하였다. 2 방향 압축을 받는 경우에도 본 연구의 결과가 참고문헌과 잘 일치됨을 알 수 있었다.

[표 3] 2방향 압축을 받는 나노 스케일 판의 무차원 좌굴하중 ($a = b = 10, b/h = 100$)

[Table 3] Non-dimensional critical buckling loads of nano-scale plate ($a = b = 10, b/h = 100$)

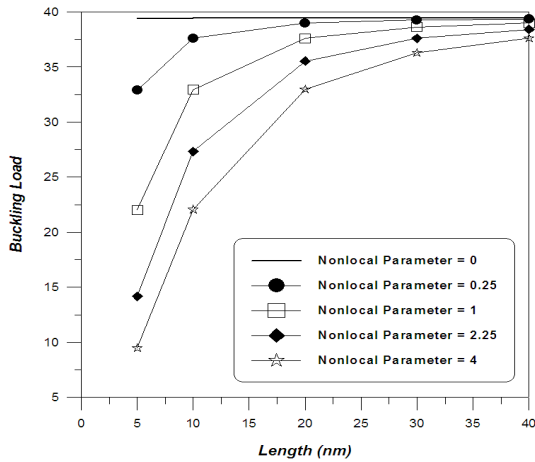
μ	Babaei와 Shahidi [16]	본 연구
0	19.7395	19.7281
0.25	16.4854	16.4759
1.0	11.0306	11.0239
2.25	7.1095	7.1053
4.0	4.7470	4.7443

표 3에서 참고문헌[16]의 결과와 본 연구의 결과에 약간의 차이가 발생하는 것은 참고문헌[16]의 연구방법이 전단변형의 효과를 고려하지 않은 Galerkin방법을 사용하였기 때문으로 판단된다.

3.2 나노 스케일 판의 크기에 따른 좌굴해석

나노 스케일 판에서 비국소 변수의 범위는 Wang과 Wang[17]에 제시된 범위를 사용하였다. Wang과 Wang[17]은 탄소 나노 튜브에서 식(5)의 $e_0 \bar{a}$ 가 2nm보다 작은 범위에 있어야 한다고 제시 하였다. 참고문헌 [16]에서 $e_0 \bar{a}$ 를 0에서부터 0.5, 1.0, 1.5 그리고 2.0으로 변화시켜 연구하였으므로 본 연구에서 사용하는 비국소 변수의 범위는 식(5)에 따라 0, 0.25, 1.0, 2.25 그리고 4.0으로 가정하였다.

나노 스케일 판의 무차원 좌굴하중은 식(28)을 이용하였고 그림 2에 나노 스케일 판의 크기 변화에 따른 좌굴하중의 변화를 나타내었다. 판의 크기는 5nm에서 40nm 까지 변화시켰다. 나노 스케일 판의 비국소 변수의 값은 0에서부터 4까지 변화시키면서 좌굴하중의 변화를 나타내었다. 나노 스케일 판의 크기가 커질수록 좌굴하중의 크기도 커짐을 알 수 있었다. 판의 크기가 40nm 이상이 되면 좌굴하중은 국소 탄성이론의 결과에 수렴되었다. 판의 크기가 20nm이상 이면 기울기가 완만하게 변화되면서 좌굴하중의 감소되는 크기 변화가 급격히 줄어드는 현상을 나타내었고 비국소 변수값에 따른 좌굴하중의 차이도 점차 줄어들었다. 그림 2에서 비국소 탄성이론에 의한 판의 강성은 국소 탄성이론에 비해 작아지고 이로 인해 작은 좌굴하중을 가짐을 알 수 있었다. 또한 여러 가지의 다른 비국소 변수상태에서 같은 좌굴하중을 추측할 수 있었다.



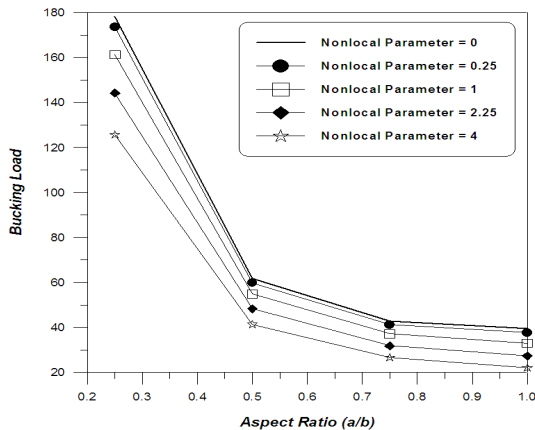
[그림 2] 비국소 변수의 변화와 나노 스케일 판의 크기에 따른 나노 판의 좌굴하중

[Fig. 2] Effect of length on the buckling loads of nano-scale plate with variable non-local parameter

3.3 나노 스케일 판의 형상비에 따른 좌굴해석

기하학적 형상의 변화가 나노 스케일 판의 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하였다. 형상비의 변화에 따른 좌굴하중을 그림 3에 나타내었다. 4가지 경우의 형상($a/b=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$)을 고려하였다.

그림 3에서 형상비가 작아질수록 좌굴하중이 커짐을 알 수 있었다. 형상비가 클수록 비국소 변수가 클수록 비국소 탄성이론에 의한 좌굴하중이 작아짐을 알 수 있었다. 즉 비국소 탄성이론은 직사각형 나노 스케일 판의 경우보다 정사각형인 경우에 상대적으로 효과가 크다고 판단된다.



[그림 3] 비국소 변수의 변화와 형상비 변화에 따른 나노 판의 좌굴하중

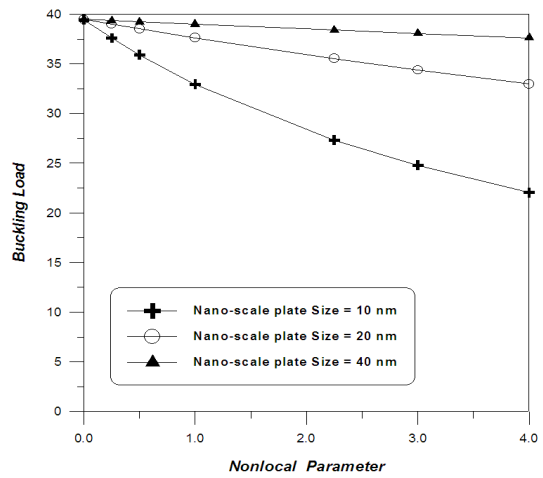
[Fig. 3] Effect of aspect ratio on the buckling loads of nano-scale plate with variable non-local parameter

3.4 나노 스케일 판의 비국소 변수 변화 따른 좌굴해석

3.4.1 다양한 나노 스케일 판의 크기

비국소 변수가 0에서부터 4까지 변하는 동안 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중을 그림 4에 나타내었다. 나노-스케일 판의 크기는 $10\text{nm} \times 10\text{nm}$ 에서부터 $40\text{nm} \times 40\text{nm}$ 까지 증가시켰다.

비국소 변수값이 클수록 무차원 좌굴하중은 작아지고 나노-스케일 판의 사이즈가 클수록, 무차원 좌굴하중에 미치는 비국소 변수값의 영향이 작게 나타났다. 좌굴하중의 차이는 비국소 변수가 증가될수록 점점 크게 나타났다.

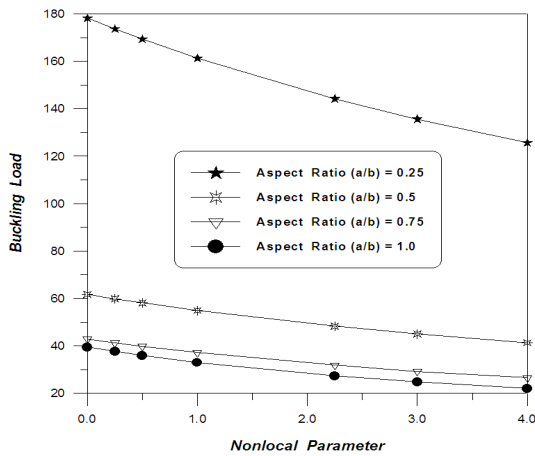


[그림 4] 비국소 변수 효과와 나노 스케일 판의 크기에 따른 나노 판의 좌굴하중 변화

[Fig. 4] Variation of buckling load of nano-scale plate with variable non-local parameter

3.4.2 다양한 나노 스케일 판의 형상비

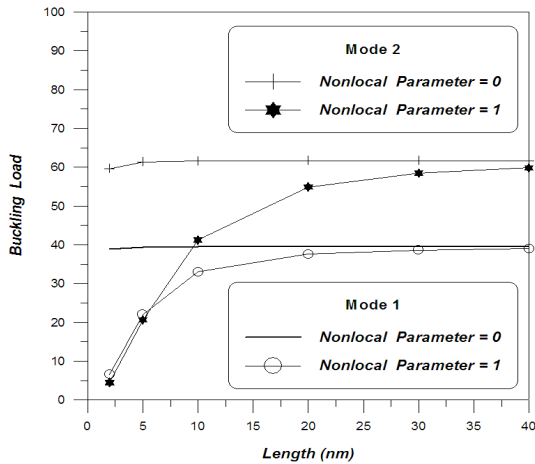
그림 5에서는 비국소 변수의 변화에 따른 여러 가지 형상 나노-스케일 판의 무차원 좌굴하중을 나타내었다. 모든 형상에서 비국소 변수가 증가할 때 좌굴하중이 감소하였다. 비국소 변수에 의한 영향은 형상비가 감소할수록 작게 나타났다. 형상비가 1인 경우 좌굴하중은 비국소 변수가 4일 때 56%로 감소하였으나 형상비가 0.25인 경우 70%로 감소하였다.



[그림 5] 비국소 변수 효과와 나노 스케일 판의 형상비에 따른 나노 판의 좌굴하중 변화

[Fig. 5] Variation of buckling load of nano-scale plate with variable non-local parameter

3.5 나노 스케일 판의 모드 변화에 따른 좌굴 해석



[그림 6] 모드 변화와 나노 스케일 판의 크기에 따른 나노 판의 좌굴하중

[Fig. 6] Effect of length on the buckling loads of nano-scale plate for different mode numbers

모드 변화가 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하기 위하여 나노-스케일 판의 크기 변화에 따른 좌굴하중의 변화를 그림 6에 나타내었다. 2개의 모드를 비교분석하였다. 나노-스케일 판은 정사각형으로 가정하였고 크기는 2nm에서 40nm까지 변화시켰다. 2가지 모드의 경우에 모두 판의 크기가 증가할수록 좌굴하중이 증가하였다. 또한 비국소 변수에 의한 효과는 판의 크기가 증가할수록 감소한다는 것을 알 수 있었다. 비국소 탄성이론에 의한 좌굴

하중의 변화를 판단하기 위해 식(31)과 같은 좌굴하중비를 가정하였다.

$$\text{좌굴하중비} = \frac{\text{비국소탄성이론에 의한 좌굴하중}}{\text{국소탄성이론에 의한 좌굴하중}} \quad (31)$$

판의 크기가 2nm일 때 두 번째 모드의 좌굴하중비는 7%이고 첫 번째 모드의 좌굴하중비는 16%이다. 이것은 고차모드에서 작은 좌굴하중비를 가진다는 것을 의미하며 따라서 고차모드에서 비국소 변수가 더 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.

4. 결 론

본 연구에서 비국소 탄성이론을 이용하여 미소 규모 나노 스케일 판의 좌굴해석을 위한 정식을 유도하였다. 나노 스케일 판의 두께방향으로 곡선 분포된 전단변형을 및 전단응력을 표현하기 위하여 3차원 전단변형 이론을 사용하였다.

본 연구의 결과로부터 비국소 변수가 나노-스케일 판의 좌굴하중에 매우 중요한 영향을 준다는 것을 알 수 있었다. 비국소 탄성이론을 적용한 나노-스케일 판의 좌굴하중은 국소 탄성이론을 적용한 경우보다 항상 작은 값을 나타내었다. 또한 다음과 같은 세부적인 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 나노 스케일 판의 크기가 커질수록 좌굴하중의 크기도 커짐을 알 수 있었다. 판의 크기가 40nm 이상이 되면 좌굴하중은 국소 탄성이론의 결과에 수렴되었다.
- (2) 형상비가 1보다 작은 경우에 형상비가 클수록 비국소 변수가 클수록 비국소 탄성이론에 의한 좌굴하중이 작아짐을 알 수 있었다. 즉 비국소 탄성이론은 직사각형 나노 스케일 판의 경우보다 정사각형인 경우에 상대적으로 효과가 크다고 판단된다.
- (3) 비국소 변수에 의한 효과는 판의 크기가 증가할수록 감소한다는 것을 알 수 있었다. 고차모드에서 작은 좌굴하중비를 가진다는 것을 알 수 있었고 이러한 결과는 고차모드에서 비국소 변수가 더 중요한 역할을 한다는 것으로 판단할 수 있다.

미소 규모 효과가 고려되어야 하는 나노-스케일 판의 경우 기존의 연구 자료가 전무한 실정이다. 본 연구의 결과는 향후 나노-스케일 판의 좌굴해석을 연구하는 연구

자들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것이며 좌굴하중의 비교연구를 위한 정확한 자료들의 제시는 나노구조물의 해석을 발전시킬 수 있는 계기가 될 수 있을 것이다.

References

[1] J. N. Reddy, S. D. Pang, "Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes", *J. Appl. Phys.*, Vol. 103, pp. 023511-023527, 2008.

[2] H. Heireche, A. Tounsi, A. Benzai, M. Maachou, E. A. Adda Bedia, "Sound wave propagation in single-walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity". *Physica E*, Vol. 40, pp. 2791-2799, 2008.

[3] K. Behfar, R. Naghdabadi, "Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium", *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 65, pp. 1159-1164, 2005.

[4] R. Aghababaei, J. N. Reddy, "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates", *J. Sound Vib.*, Vol. 326, pp. 277-289, 2009.

[5] A. C. Eringen, "Nonlocal polar elastic continua", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 10, pp. 1-6, 1972.

[6] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. Appl. Phys.*, Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.

[7] A. C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] H. Lu, H. Sun, A. Mao, H. Yang, H. Wang, X. Hu, "Preparation of plate-like nano α -Al₂O₃ using nano-aluminium seeds by wet-chemical methods", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. 406, pp. 19-23, 2005.

[9] T. Sumitomo, H. Kakisawa, Y. Owaki, Y. Kagawa, "Structure of natural nano-laminar composites", *Mater. Sci. Eng.*, Vol. 561, pp. 713-716, 2007.

[10] W. H. Lee, S. C. Han, W. T. Park, "Bending, Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates", *J. Korea Academia-Industrial cooperation Society*, Vol. 9(4), pp. 1043- 1049, 2008.

[11] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745-752, 1984.

[12] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, seconded, CRC Press, London, 2007.

[13] S. Narendar, D. R. Mahapatra, S. Gopalakrishnan, "Prediction of nonlocal scaling parameter for armchair and zigzag single-walled carbon nanotubes based on

molecular structural mechanics, nonlocal elasticity and wave propagation", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 49, pp. 509-522, 2011.

[14] S. Narendar, "Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects", *Compos. Struct.*, Vol. 93, pp. 3093-3103, 2011.

[15] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, Second Ed, McGraw-Hill, London, 1963.

[16] B. Babaei, A. R. Shahidi, "Small-scale effects on the buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using the Galerkin method", *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 81, pp. 1051-1062, 2011.

[17] Q. Wang, C. M. Wang, "The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes". *Nanotechnology*, Vol. 18, pp. 075702-075709, 2007.

이 원 흥(Won-Hong Lee)

[정회원]



- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 경남과학기술대학교 토목공학과 정교수

<관심분야>

복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계, 진동해석, 나노구조의 해석

한 성 천(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 부교수

<관심분야>

선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적 해석, 나노구조의 해석