

## 천수방정식에 대한 HLLL 근사 Riemann 해법의 적용

### An Application of the HLLL Approximate Riemann Solver to the Shallow Water Equations

황승용\* · 이삼희\*\*

Hwang, Seung-Yong · Lee, Sam Hee

#### Abstract

The HLLL scheme, proposed by T. Linde, determines all the wave speeds from the initial states because the middle wave is evaluated by the introduction of a generalized entropy function. The scheme is considered a genuine successor to the original HLL scheme because it is completely separated from the Roe's linearization scheme unlike the HLLE scheme and does not rely on the exact solution unlike the HLLC scheme. In this study, a numerical model was configured by the HLLL scheme with the total energy as a generalized entropy function to solve governing equations, which are the one-dimensional shallow water equations without source terms and with an additional conserved variable relating a concentration. Despite the limitations of the first order solutions, results to three cases with the exact solutions were generally accurate. The HLLL scheme appeared to be superior in comparison with the other HLL-type schemes. In particular, the scheme gave fairly accurate results in capturing the front of wetting and drying. However, it revealed shortcomings of more time-consuming calculations compared to the other schemes.

**Keywords :** shallow water equations, approximate Riemann solver, HLL scheme, HLLL scheme

#### 요 지

T. Linde가 제안한 HLLL 기법에서는 일반화된 엔트로피 함수의 도입으로 중앙파가 평가되므로 모든 파속이 초기 상태로 부터 결정된다. HLLE 기법과 달리 Roe의 선형화 기법과 완전히 결별되고 HLLC 기법과 달리 정확해에 의존되지 않으므로 모태인 HLL 기법의 온전한 계승으로 볼 수 있다. 이 연구에서는 생성항이 없는 1차원 천수방정식에 농도와 관련된 보존변수를 추가한 지배방정식에 대해 총 에너지를 일반화된 엔트로피 함수로 두고 HLLL 기법을 적용하여 모형을 구성하였다. 정확해가 알려진 세 경우에 대해 모의한 결과, 1차 정확도 수치해의 한계에도 불구하고, 대체로 정확해와 잘 일치하였다. HLLL 기법은 그 외 HLL 형 기법에 비해 우수한 것으로 나타났다. 특히, 물이 빠져 바닥이 드러나는 경우에서 그 전선이 비교적 정확하게 포착되었다. 다만, 그 외 기법에 비해 계산 시간이 더 오래 걸리는 단점이 드러났다.

**핵심용어 :** 천수방정식, 근사 Riemann 해법, HLL 기법, HLLL 기법

#### 1. 서 론

쌍곡선형 미분방정식의 수치해법에서 불연속 해에 대한 Riemann 해법은, 1950년대 말 S. K. Godunov의 선구적인 시도 이래, 최초로 적용된 공기동역학(aerodynamics) 분야뿐만 아니라 이제는 다양한 영역에서 성공적으로 적용되고 있다(LeVeque, 2002; Toro, 2001). 이것은 천수방정식과 같은 쌍곡선형 방정식과 단일한 도약(jump)에 의한 불연속(discontinuity)의 좌·우에서 구분적 상수 자료(piecewise constant data)로 구성되는 초기치 문제(initial-value problem)로 정의되는 Riemann 문제에 대한 해법이다. Godunov 방법과 같이 Riemann 해법이 정확해(exact solution)에 의하면 정확 Riemann 해법, 근사 기법에 의하면 근사 Riemann 해법으

로 불린다. Riemann 문제에 대한 다양한 근사 기법이 제안되었으나, 지금까지 자주 쓰이는 기법으로는 Roe의 선형화 기법(Roe, 1981)과 HLL 기법(Harten 등, 1983)에 대한 수정 기법인 HLL 형(HLL-type) 기법들이다.

최대 및 최소 파속만 고려하는 것으로 알려진 HLL 기법은 Einfeldt(1988)의 제안에 의해 두 파속의 결정에서 Roe 기법에 따른 고유치(eigenvalue)와 비교하는 것으로 수정되었다(HLLE 기법). 또한, Toro 등(1994)은 접촉파(contact wave)를 고려하기 위해 선형화된 지배방정식의 정확해로부터 중앙 파속을 평가하는 기법을 제안하였고, 이를 HLLC 기법으로 불렀다. Linde(2002)는 중앙 파속을 결정하기 위해 일반화된 엔트로피 함수(generalized entropy function)를 도입하였으며, 이후 HLLL 기법으로 불린다(van Leer, 2009).

\*정회원 · 교신저자 · 한국건설기술연구원 수자원 · 환경연구본부 하천해양연구실 수석연구원 (E-mail : syhwang@kict.re.kr)

\*\*한국건설기술연구원 수자원 · 환경연구본부 하천해양연구실 선임연구위원 (E-mail : samhee.lee@kict.re.kr)

이 기법에서는 접촉파에 대한 고려를 위해 보존변수에 대한 일반화된 엔트로피 함수의 2차 도함수로부터 중앙 파속이 유도되며, 최대 및 최소 파속 또한 초기 상태의 특성 속도와 중앙 파속의 비고를 통해 결정된다.

HLLL 기법은 공기동역학뿐만 아니라 여러 분야에 적용될 수 있으나(Linde, 2002; Wackers와 Koren, 2004; Suzuki 등, 2009), 수공학 분야의 천수방정식에 적용된 사례는 아직까지 알려지지 않았다. 이는 천수방정식의 (물리적인) 엔트로피 함수가 명확하지 않기 때문인 것으로 보인다. 이 연구에서는 천수방정식의 보존변수로부터 정의되는 총 에너지(total energy)를 일반화된 엔트로피 함수로 간주하여 천수방정식에 적용할 수 있는 HLLL 기법을 새롭게 제시하고, 정확도가 알려진 1차원 문제에 대해 HLL, HLLE, 그리고 HLLC 기법들에 의한 결과와 비교함으로써 그 적용성을 검토하고자 한다.

## 2. HLLL 기법의 이론

HLLL 기법의 모태가 되는 HLL 기법은 불연속에 대한 Riemann 문제의 각 상태로부터 발생하는 특성파의 속도 중에서 최소와 최대 파속만으로 구분된 세 개의 일정 상태에서 중앙의 일정 상태에 대해 평가하는 방법으로 알려져 있다. 1차원 천수 방정식(즉, Saint Venant 방정식)에서 생성항을 제외하고 농도와 관련된 보존변수를 추가하여 나타내면 다음과 같다(Weiyan, 1992; Toro, 2001).

$$U_t + F_x = 0 \quad (1a)$$

$$U = \{u_1, u_2, u_3\}^T \equiv \{h, hu, hC\}^T \quad (1b)$$

$$F = \{f_1, f_2, f_3\}^T \equiv \{hu, hu^2 + gh^2/2, huC\}^T \quad (1c)$$

여기에서, 아래 첨자,  $t$ 와  $x$ 는 각각 시간과 거리에 대한 편미분,  $h$ 는 수심,  $u$ 는 유속,  $C$ 는 농도, 그리고  $g$ 는 중력가속도이다. 근사 Riemann 해법은 식 (1)과 같은 제차방정식(homogeneous equations)에서 그 흐름을,  $F$ 를 정확하게 산정하는 방법이므로 HLL 형 기법들 사이의 직접적인 비교를 위해 바닥 경사와 마찰에 의한 생성항은 제외되었다.

식 (1)의 고유치(eigenvalue) 분석에 의한 특성 파속은 다음과 같다(Weiyan, 1992).

$$\lambda^1 = u - c \quad (2a)$$

$$\lambda^2 = u \quad (2b)$$

$$\lambda^3 = u + c \quad (2c)$$

여기에서  $c(\equiv \sqrt{gh})$ 는 중력파의 속도이며, Fig. 1은 이에 대

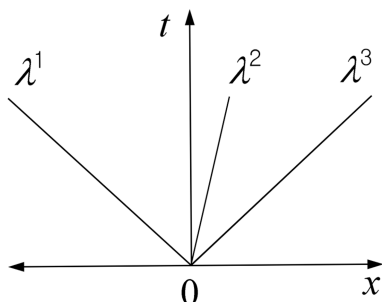


Fig. 1 Characteristic speeds

한 개략도이다.

HLL 기법에서 최소 및 최대 파속은 불연속( $x = 0$ )의 왼쪽( $L$ )과 오른쪽( $R$ )에서 각각 다음과 같다(LeVeque, 2002).

$$S_L = \min_p \lambda_L^p \quad (3a)$$

$$S_R = \max_p \lambda_R^p \quad (3b)$$

여기에서,  $\min$ 은 최소,  $\max$ 는 최대, 그리고 아래 첨자,  $p$ 는 1과 3이다.

van Leer(2009)는 당초 HLL 기법을 제안할 때, 엔트로피 함수의 경사를 이용한 중앙 파속의 평가에 대해 언급하였으며, 오히려 최소 및 최대 파속만을 고려하는 기법은 이를 위한 연습에 불과하다고 강변하였다. 그러나 이에 대한 실질적인 진전은 Linde(2002)에 의한 HLLL 기법으로 어떤 계산 격자,  $i$ 와 그에 인접한 격자,  $i+1$  사이에서 이 기법에 의한 수치 흐름률(numerical flux),  $F_{i+1/2}$ 은 다음과 같다(Linde, 2002).

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} F_L & \text{if } S_L \geq 0 \\ F_L^{hill} \equiv \frac{S_R F_L - S_L F_R + [(1-\alpha)S_L S_R + \alpha S_L S_M](U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{if } S_L < 0 \leq S_M \\ F_R^{hill} \equiv \frac{S_R F_L - S_L F_R + [(1-\alpha)S_L S_R + \alpha S_L S_M](U_R - U_L)}{S_R - S_L} & \text{if } S_M < 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } S_R < 0 \end{cases} \quad (4)$$

여기에서,  $S_M$ 은 중앙 파속으로서 접촉파에 대한 Rankine-Hugoniot 도약 조건(Weiyan, 1992)에 대한 최소자승(least-square) 해 그리고 매개변수,  $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 는 불연속을 지나 는 엔트로피 조건( $S\Delta\eta - \Delta\sigma \geq 0$ )으로부터 각각 다음과 같다(Linde, 2002).

$$S_M = \frac{(\Delta U, \Delta F)_P}{\|\Delta U\|_P^2} \quad (5)$$

$$\alpha \equiv H(S_M \Delta\eta - \Delta\sigma) \frac{(\Delta U, \Delta F)_P^2}{\|\Delta U\|_P^2 \|\Delta F\|_P^2} \quad (6)$$

여기에서,  $\Delta(\cdot)$ 는 불연속에 의한 도약,  $\eta$ 는 엔트로피 함수,  $\sigma$ 는 엔트로피 흐름률,  $H(x)$ 는  $H(0)=1$ 인 Heaviside 함수, 그리고 어떤 양정(positive definite) 대칭 행렬,  $P$ 에 대한 놈(norm)들은 다음과 같다(Linde, 2002).

$$(\Delta U, \Delta F)_P = (\Delta U^T P \Delta F) \quad (7a)$$

$$\|\Delta U\|_P^2 = \Delta U^T P \Delta U \quad (7b)$$

$$\|\Delta F\|_P^2 = \Delta F^T P \Delta F \quad (7c)$$

결국, 불연속의 왼쪽과 오른쪽에서 각각 최소와 최대인 파속은 다음과 같이 결정된다(Linde, 2002).

$$S_L = \min(S_M, \min_p \lambda_L^p, \min_p \lambda_R^p) \quad (8)$$

$$S_R = \max(S_M, \max_p \lambda_L^p, \max_p \lambda_R^p) \quad (9)$$

이제, 일반화된 엔트로피 함수와 엔트로피 흐름률로부터 행렬,  $P$ 가 정의되면 중앙파인 접촉 파속을 추정할 수 있다. 공기동역학이나 천체물리학에서 사용되는 지배방정식에서는 엔트로피 함수가 물리적으로 명확하겠으나, 수공학에서 이용되는 천수 방정식의 경우에는 그렇지 않다. 그런데, 불연속

을 지날 때 역학적 에너지 역시 물리적으로 반드시 감소되므로 총 에너지(total energy)가 일반화된 엔트로피 함수로 간주될 수 있음이 알려져 있다(Tedmor, 1984; George, 2006; Fjordholm 등, 2011). 이에 따라 식 (1)에서 농도의 영향을 무시하고 일반화된 엔트로피 함수와 그 흐름률을 구하면 각각 다음과 같다(Fjordholm 등, 2011).

$$\eta = (hu^2 + gh^2)/2 = (u_2^2/u_1 + gu_1^2)/2 \quad (10)$$

$$\sigma = hu^3/2 + gh^2u \quad (11)$$

따라서 행렬,  $\mathbf{P}$ 는 그 정의(Linde, 2002)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{P} \equiv \int_0^1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial U \partial U} [(1-\theta)U_L + \theta U_R] d\theta \approx \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{U} \partial \bar{U}} \Big|_{\bar{U} = \frac{U_L + U_R}{2}} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{g + u_2^2/u_1^3} & \overline{-u_2/u_1^2} \\ \overline{-u_2/u_1^2} & \overline{1/u_1} \end{bmatrix}$$

여기에서,  $\theta$ 는 매개변수이다. 식 (12)에 의해 천수방정식에 대한 HLLL 기법의 적용이 비로소 가능해졌으며, 이러한 시도는 아직까지 보고된 바 없는 새로운 것으로 보인다.

Linde(2002)는 행렬,  $\mathbf{P}$ 의 대각 부분(diagonal part)만 사용하여도 중앙 파속을 추정하기에 충분하다고 주장하였다. 심지어, 이 행렬을 항등 행렬(identity matrix)로 두어도 결과에서 가시적인 차이가 없다는 보고도 있다(Wackers와 Koren, 2004). 사실, 항등 행렬은 양정 대칭 행렬의 가장 단순한 경우이며, 엔트로피 함수가 정의되지 않는 경우에 유용할 수 있다(Trangenstein, 2009). Fig. 2는 후술할 3장의 Table 1에서 Test 3에 대한 식 (1)의 수치해 중 유속을 정확해와 비교한 것으로 행렬의 종류에 따른 차이는 크지 않다. 이 연구에서는 그 중에서 대각 행렬을 채택하였다.

HLLL 기법에서 모든 파속은 초기치로부터 결정되므로 HLLC 기법과 달리 Roe의 선형화 기법과 완전히 결별되고 HLLC 기법과 달리 정확해에 대한 의존 없이 중앙 파속이 평가되는 점에서 의의가 크다. 따라서 모태인 HLL 기법의

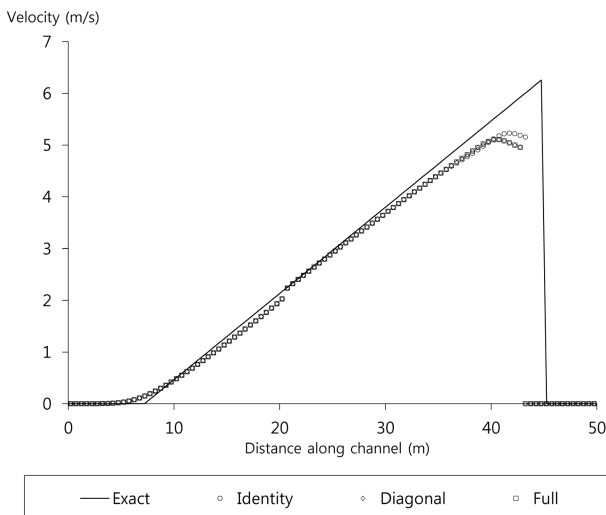


Fig. 2 Comparison of Velocities According to the Kind of Matrix

온전한 계승으로 볼 수 있다(van Leer, 2006).

식 (1)에 대한 유한체적법을 계산 영역 내 어떤 계산 격자,  $i$ 에 적용하면 다음과 같다(Weiyan, 1992; LeVeque, 2002).

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (13)$$

여기에서,  $n$ 은 시간 단계,  $\Delta x$ 는 계산 격자의 공간 간격, 그리고  $\Delta t$ 는 시간 간격으로 다음과 같은 안정 조건에 의해 결정된다(Weiyan, 1992; LeVeque, 2002).

$$C_r \equiv \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i (|S_{L_{i+1/2}}|, |S_{R_{i+1/2}}|) \leq 1 \quad (14)$$

여기에서,  $C_r$ 는 CFL(Courant, Friedrichs, and Lewy) 조건에 의한 Courant 수이다.

### 3. 결과 및 토의

Toro(2001)는 근사 Riemann 해법에 대한 시험을 위해, Fig. 3에서 보이듯이, 좌·우 끝이 개방 경계(open boundary)인 50 m 길이의 수평 수로에서 모두 다섯 가지의 경우를 설정하고 그에 대한 정확해를 제시하였다. Table 1은 그 중에서 세 가지 특징적인 경우를 추려 정리한 것이다. 표에서는 불연속의 초기 위치이고,  $t_{out}$ 은 종료 시각이다. Test 1은 전형적인 댐 붕괴의 경우로서 불연속의 왼쪽에서 희유파(rarefaction wave), 오른쪽에서 충격파(shock wave)가 발생된다. Test 2의 경우, 양쪽에서 희유파가 발생되어 도중에 중앙에서 거의 바닥이 드러나게 된다. Test 3은 오른쪽에서 초기에 물이 없어 바닥이 드러난 경우이다.

제시된 각 시험 경우에 대해 HLL 형 기법들을 적용하여 수치 흐름률을 구하였으며, 식 (14)가 만족되는 수치해를 식 (13)으로부터 계산하였다. 이때, 계산 격자의 공간 간격은 0.5 m이며, Courant 수는 0.9로 두었다.

Table 2에 정확해에 대한 각 기법들의 제곱평균제곱근(Root Mean Square) 오차와 HLL 기법의 RMS 오차에 대한 그 외 기법들의 RMS 오차의 비율을 정리하였다. 표의 마지막 열은 해당 모의 조건에서 HLL 기법의 수행 시간에 대해 그 외 기법에서 각각 소요된 시간의 비율을 나타낸 것

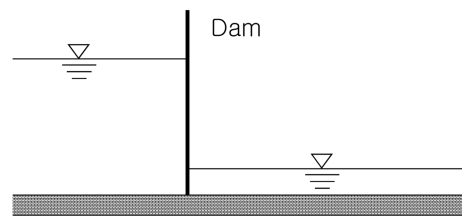


Fig. 3 Definition Sketch

Table 1. Test Cases

Test	Initial Data						$x_0$ (m)	$t_{out}$ (s)
	$h_L$ (m)	$u_L$ (m/s)	$C_L$	$h_R$ (m)	$u_R$ (m/s)	$C_R$		
1	1.0	2.5	1.0	0.1	0.0	0.0	10.0	7.0
2	1.0	-5.0	1.0	1.0	5.0	0.0	25.0	2.5
3	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	20.0	4.0

Table 2. Comparisons of RMS Errors and Lap Time

Test	Scheme	Water Depth		Velocity		Concentration		Lap Time
		RMS Error	Ratio of Each Scheme to HLL	RMS Error	Ratio of Each Scheme to HLL	RMS Error	Ratio of Each Scheme to HLL	
1	HLL	0.035476	-	0.338537	-	0.105267	-	-
	HLLE	0.035476	1.00	0.338537	1.00	0.105267	1.00	1.08
	HLLC	0.035873	1.01	0.329245	0.97	0.105093	1.00	1.11
	HLLL	0.036404	1.03	0.341308	1.01	0.105174	1.00	1.33
2	HLL	0.026243	-	0.268501	-	0.145345	-	-
	HLLE	0.026243	1.00	0.268501	1.00	0.145345	1.00	0.98
	HLLC	0.025947	0.99	0.270059	1.01	0.000000	0.00	1.09
	HLLL	0.026243	1.00	0.268501	1.00	0.000000	0.00	1.23
3	HLL	0.018189	-	1.810440	-	0.300000	-	-
	HLLE	0.017005	0.93	1.795308	0.99	0.300000	1.00	0.81
	HLLC	0.021666	1.19	1.954858	1.08	0.331662	1.11	0.98
	HLLL	0.015292	0.84	1.243481	0.69	0.200000	0.67	1.24

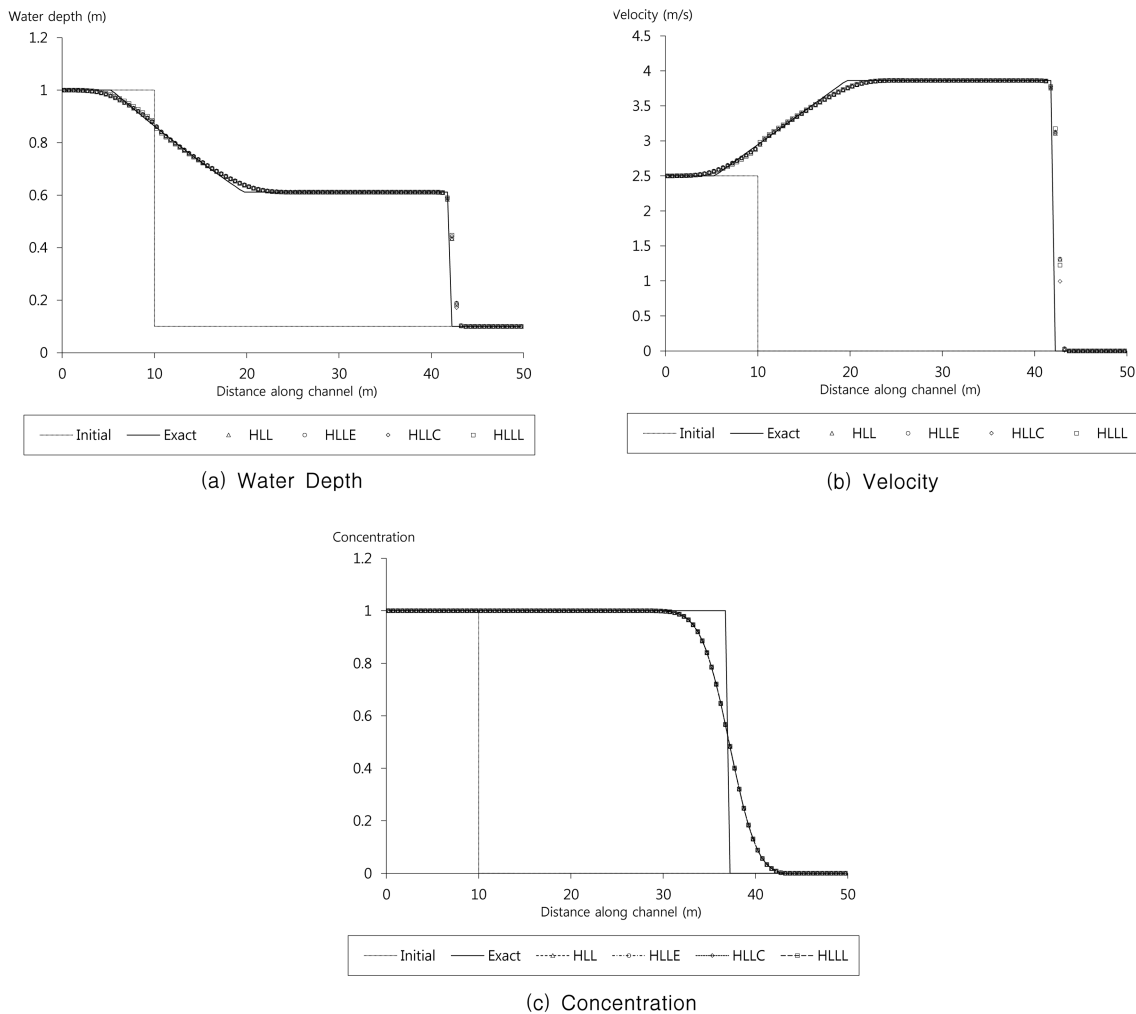


Fig. 4 Comparisons of Solutions for Test 1

이다. 먼저, 각 기법들에 의한 계산 시간을 살펴보면, 전반적으로 HLLE 기법의 수행 시간이 짧았으며, HLLL 기법의 경우, 모든 경우에서 가장 길었다. 계산기의 종류와 환경에 따라 다르겠지만, Test 1, 2, 그리고 3에서 HLL 기법에 비해 각각 약 1.3배, 약 1.2배, 그리고 약 1.2배 더 긴 것으로 드러났다. 또한, Test 3에서 HLLL 기법의 수행 시간은 HLLE 기법에 비해서는 약 1.5배 더 오래 걸린다. HLLL

기법의 수행 시간이 비교적 긴 이유는 일반화된 엔트로피 함수와 관련된 행렬 연산이 추가되기 때문이다.

Fig. 4-6에 모의 조건에 따른 HLL 형 근사 Riemann 해법에 의한 결과를 정확해와 비교하였다. 먼저, 수심에 대한 결과를 살펴보면, 기법들 사이에 큰 차이 없이 정확해에 어느 정도 부합되나(RMS 오차에 대해서는 Table 2 참조), 희유파가 강할 때 모든 기법에서 수치 소산(numerical dissipation)이 나타난

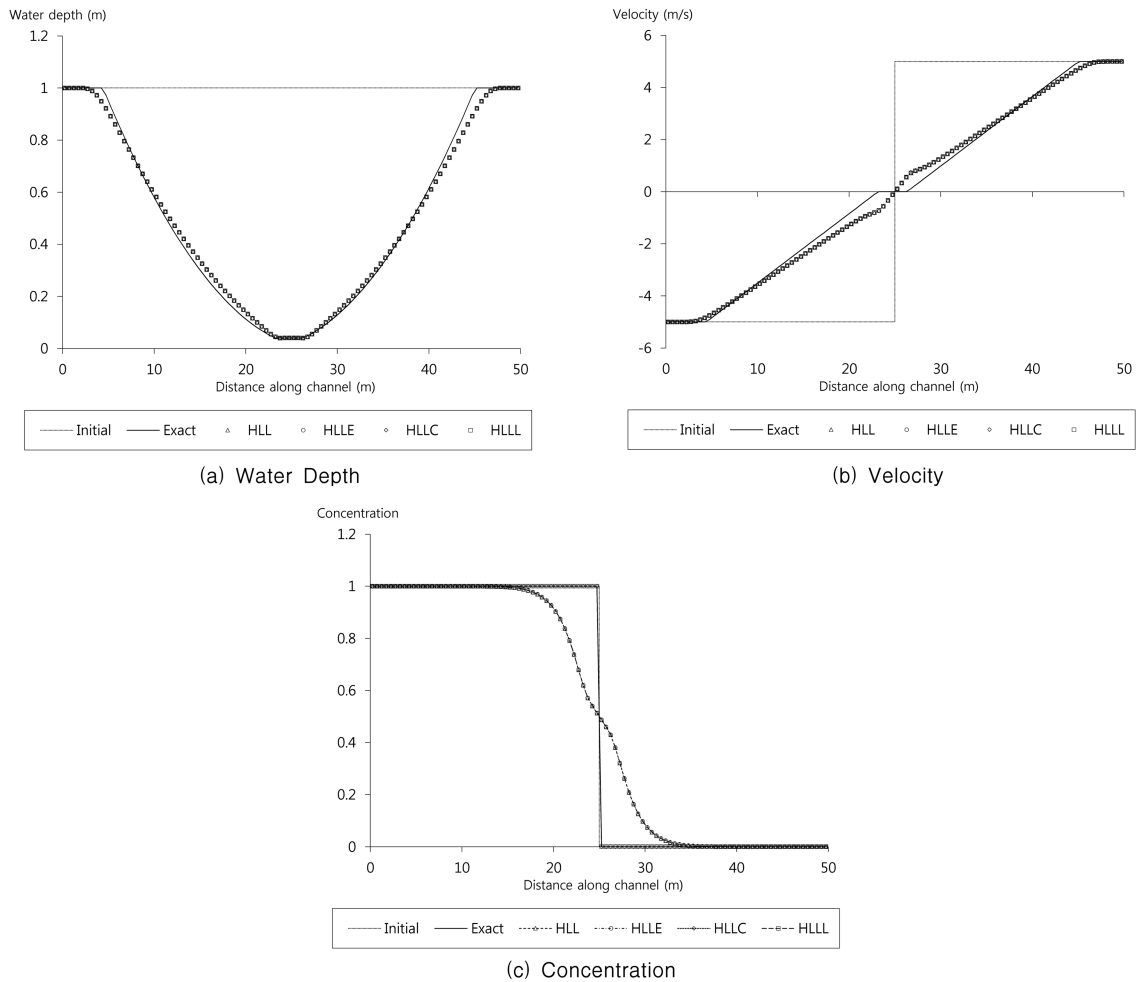


Fig. 5 Comparisons of Solutions for Test 2

다. 이는 1차 정확도의 수치해가 갖는 한계이다. 유속의 경우, 수심에 비해 대체로 정확도가 떨어지며, 초기에 바닥이 드러난 경우에서 더 심하게 나타난다. Test 3에서 HLLL 기법에 의한 결과가 정확해와 가장 잘 부합되고, 그 외 기법들에 의한 결과는 비교적 큰 차이를 보인다(RMS 오차에 대해서는 Table 2 참조).

물이 차거나 드러날 때 전선(front of wetting and drying)은 접촉파로 간주되므로 그것의 속도인 중앙 파속의 정확한 추정이 관건이다. Toro(2001)는 HLLC 기법에서 이용되는 중앙 파속은 정확 Riemann 해에 의한 것이므로 바닥이 드러난 상태에 대해 어떤 기법보다 정확한 추정이 가능하다고 주장하였다. 그러나 실제로는 접촉 파속을 계산된 중앙 파속으로 두는 것이 아니라 수심이 영이 아닌 상태에서 부터 도출된 Riemann 불변량(invariant)으로 강제하게 된다 (Fraccarollo와 Toro, 1995). Toro(2001)는 이러한 ‘Riemann 해법의 특별한 수정(a special modification of the appropriate Riemann solvers)’에 의한 파속을 ‘the exact dry front speed’로 불렀다.

그러나 HLLC 기법 외의 어떠한 HLL 형 기법에서도 바닥이 드러난 경우에 대해 이러한 ‘특별한 수정’ 필요하지 않았다. 더욱이, HLLL 기법의 결과는 물론이거니와, 접촉파에 대한 추정이 아예 없는 HLLC 기법의 그것에 비해서도 더 나아 보이지 않는다(Fig. 6 참조). 이는 초기에 바닥이 드러난 경우에서 HLLC 기법에 의한 좌·우 파가 HLLC 기법

의 그것보다 실제 상태에 더 밀착(tight)됨을 의미한다.

따라서 HLLC 기법에서 중앙 파속의 추정이 1차원 문제에서 농도와 같은 스칼라의 전파나 2차원에서 접선 방향 유속의 재연에 적절할 수도 있겠으나, 물이 차고 빠지는 경우에 대해서는 Toro(2001)의 주장에 동의하기 어렵다. 이는 농도를 예측한 결과에서 쉽게 드러난다. HLLC 기법에 의한 결과는, Fig. 4(c)와 Fig. 5(c)에서 나타나듯이, 전체 계산 영역에 물이 차있는 경우에 대해 HLLL 기법의 그것과 거의 같다(그림에서 이 두 기법의 결과는 중첩되었음). 그러나 초기에 바닥이 드러난 경우에 대해서만은, Fig. 6(c)에서 보듯이, HLL 기법과 HLLC 기법의 결과보다 나을 게 없다(그림에서 이 두 기법의 결과는 중첩되었음).

HLLC 기법과 달리 HLLL 기법의 경우, 접촉 파속으로서 추정된 중앙 파속이 흐름률의 계산에 직접 이용되며, 그 값은 초기치, 즉 각 계산 단계에서 결정되는 수심과 유속으로부터 계산된다. 따라서 다음 시간 단계에서 수심과 유속의 계산에 흐름의 실제 양상이 반영된 흐름률이 적용될 수 있는 것이다. 초기에 바닥이 드러난 경우에 대해 HLLL 기법이 우수한 결과를 보이는 이유는 이러한 특성에 의한 것으로 보인다. 실제 하천에서 홍수터의 잠김과 드러남과 같은 현상을 모의할 때, 그 전선의 정확한 예측은 매우 중요한 사항 중 하나일 것이다. 전선의 위치 예측의 어려움이 유속 분포를 도시하여 비교할 때 입증된다는 Toro(2001)의 언급을 상기한다면, ‘특별한 수정’ 없이도 HLLC 기법에 비해

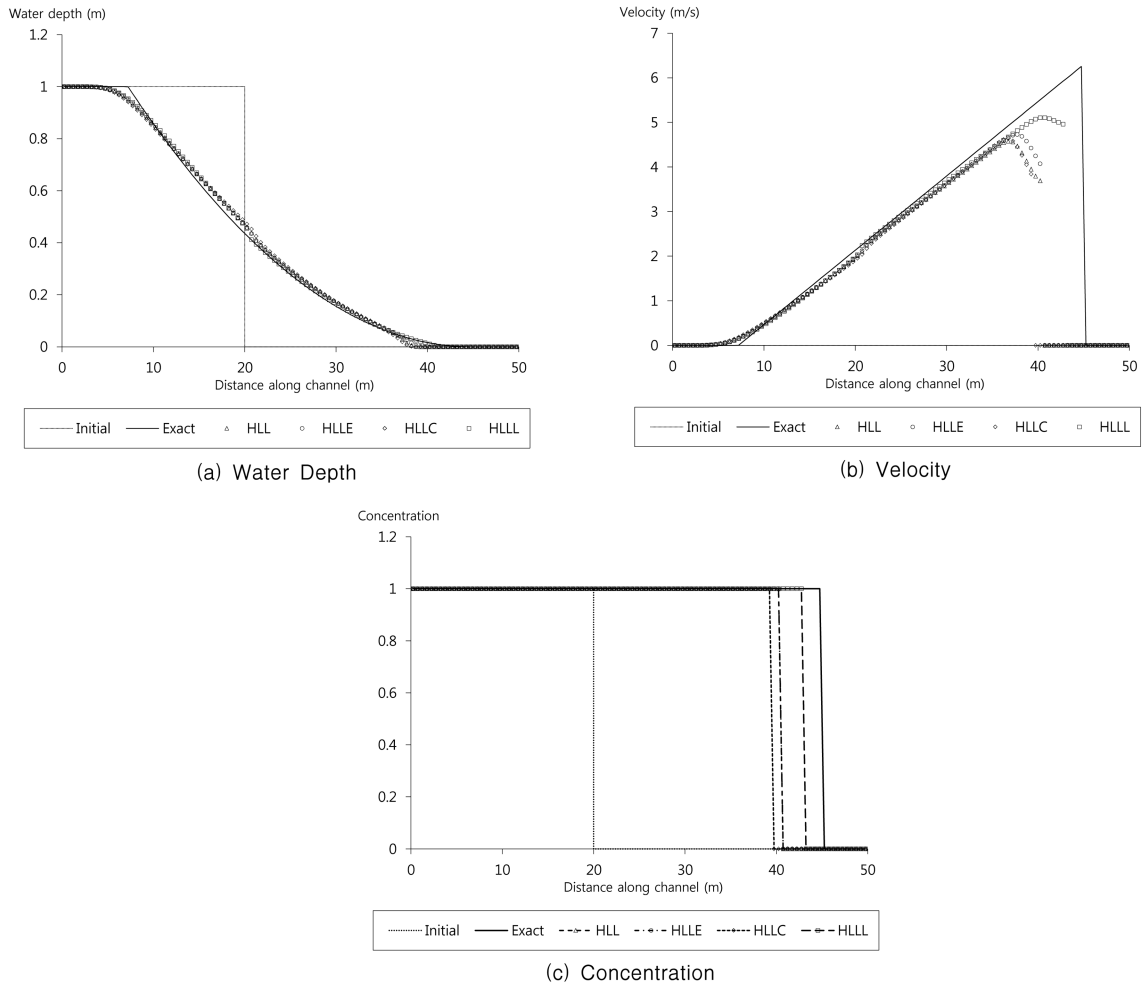


Fig. 6 Comparisons of Solutions for Test 3

물이 차고 빠지는 전선을 더 정확하게 포착하는 HLLL 기법의 결과는 매우 고무적이다.

#### 4. 결 론

HLLL 기법에서는 일반화된 엔트로피 함수를 이용한 중앙 파속의 평가를 통해 모든 파속이 초기치로부터 결정되므로 이 기법은 HLLE 기법과 달리 Roe의 선형화 기법과 완전히 결별되고 HLLC 기법과 달리 정확해에 의존되지 않는 점에서 모태인 HLL 기법의 온전한 계승으로 볼 수 있다.

생성항이 없는 1차원 천수방정식에 농도와 관련된 보존변수를 추가한 지배방정식에 대해 총 에너지를 일반화된 엔트로피 함수로 두고 HLLL 기법을 적용하여 모형을 구성하였다. 정확해가 알려진 세 경우에 대해 모의한 결과, 1차 정확도 수치해의 한계에도 불구하고, 대체로 정확해와 잘 일치하였다. 또한, HLL, HLLE, 그리고 HLLC 기법들과 RMS 오차의 비교에서 거의 비슷하거나 더 우수한 것으로 나타났다. 특히, 초기에 물이 빠져 바닥이 드러난 경우에서 그 전선이 비교적 정확하게 포착되었다. 이는 HLLL 기법에서 계산된 중앙 파속이 그 외 기법에 비해 정확해와 더 부합됨을 의미한다. 다만, 일반화된 엔트로피 함수와 관련된 행렬의 계산으로 인해 그 외 기법에 비해 수행 시간이 비교적 오래 걸리는 단점이 드러났다.

천수방정식에 대한 수치해법을 홍수터의 잠김과 드러남과

같은 현상이 포함된 실제 문제에 적용할 때 물이 차고 빠지는 전선의 정확한 예측은 매우 중요한 사항 중 하나이다. 이 연구를 통하여 천수방정식 체계에 대해 HLLL 기법의 적용이 가능해졌고 특별한 처리 없이 그 전선이 비교적 정확하게 예측되는 것이 확인됨에 따라 수공학 분야에서 실제 문제에 대한 수치해석에 다소나마 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

#### 감사의 글

이 연구는 환경부 '차세대 핵심환경기술개발사업'의 지원에 의해 수행되었음을 밝힌다. 또한, 원고를 검토하고 귀중한 의견을 제시해 준 한국건설기술연구원의 박 문형 박사에게 감사드린다.

#### 참고문헌

- Einfeldt, B. (1988) On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 25, pp. 294-318.
- Fjordholm, U.S., Mishra, S., and Tadmor, E. (2011) Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography. *Journal of Computational Physics*, Vol. 230, pp. 5587-5609.
- Fracarollo, L. and Toro, E.F. (1995) Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of Hydraulic Research*, Vol.

- 33, pp. 843-864.
- George, D.L. (2006) *Finite volume methods and adaptive refinement for Tsunami propagation and inundation*. Ph.D. dissertation, University of Washington.
- Harten, A., Lax, P.D., and van Leer, B. (1983) On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, Vol. 25, pp. 35-61.
- LeVeque, R.J. (2002) *Finite volume method for hyperbolic problems*. Cambridge University Press.
- Linde, T. (2002) A practical, general-purpose, two-state HLL Riemann solver for hyperbolic conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40, pp. 391-402.
- Roe, P.L. (1981) Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372.
- Suzuki, Y., Khieu, L., and van Leer, B. (2009) CFD by first order PDEs. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 21, pp. 445-465.
- Tadmor, E. (1984) Skew-selfadjoint form for systems of conservation laws. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 103, pp. 428-442.
- Toro, E.F. (2001) *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Wiley & Sons.
- Toro, E.F., Spruce, M., and Speares W. (1994) Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, Vol. 4, pp. 25-34.
- Trangenstein, J.A. (2009) *Numerical solution of hyperbolic partial differential equations*. Cambridge University Press.
- van Leer, B. (2006) Upwind and high-resolution method for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes. *Communications in Computational Physics*, Vol. 1, pp. 192-206.
- van Leer, B. (2009) The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada. *100 volumes of 'notes on numerical fluid mechanics'*, E. H. Hirschel and E. Krause, eds., Springer-Verlag, pp. 159-185.
- Wackers, J. and Koren, B. (2004) *Five-equation model for compressible two-fluid flow*. Report MAS-E0414, CWI.
- Weiyang, T. (1992) *Shallow water hydrodynamics*. Elsevier Science Publishers.

(접수일: 2011.9.6/심사일: 2011.11.12/심사완료일: 2011.11.24)