

특집논문 (Special Paper)

방송공학회논문지 제17권 제6호, 2012년 11월 (JBE Vol. 17, No. 6, November 2012)

http://dx.doi.org/10.5909/JBE.2012.17.6.954

ISSN 1226-7953(Print)

## 다중 후보 매칭 퍼슈트

권석범<sup>a)</sup>, 심병효<sup>a)\*</sup>

## Multiple Candidate Matching Pursuit

Seokbeop Kwon<sup>a)</sup> and Byonghyo Shim<sup>a)\*</sup>

### 요약

Orthogonal matching pursuit (OMP) 알고리즘은 underdetermined 시스템에서 희소 신호를 복구하는 대표적인 greedy 알고리즘으로 많은 관심을 받고 있다. 본 논문에서는 OMP 알고리즘의 반복과정에서 후보 support 집합들을 구성하여 마지막 반복과정에서 최소 잔차를 이용하는 multiple candidate matching pursuit (MuCaMP) 기법을 제안한다. MuCaMP 가 완벽한 신호 복원을 보장하기 위한 restricted isometry property (RIP)를 이용한 충분조건,  $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3}\sqrt{N}}$  을 제시한다. 실험을 통해 후보 support 집합들의 크기에 따른 성능과 MuCaMP의 복원 성능이 기존의 기법들에 비해 우수함을 확인하였다.

### Abstract

As a greedy algorithm reconstructing the sparse signal from underdetermined system, orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm has received much attention. In this paper, we multiple candidate matching pursuit (MuCaMP), which builds up candidate support set in every iteration and uses the minimum residual at last iteration. Using the restricted isometry property (RIP), we derive the sufficient condition for MuCaMP to recover the sparse signal exactly. The MuCaMP guarantees to reconstruct the K-sparse signal when the sensing matrix satisfies the RIP constant  $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3}\sqrt{N}}$ . In addition, we show a recovery performance both noiseless and noisy measurements.

Keyword : Compressive sensing (CS), restricted isometry property (RIP), greedy algorithm, orthogonal matching pursuit (OMP)

a) 고려대학교(Korea University)

\* Corresponding Author : 심병효 (Byonghyo Shim)

E-mail: bshim@korea.ac.kr

Tel: +82-2-3290-4842

※ 본 연구는 방송통신위원회의 방송통신기술개발사업 (KCA-2012-12-911-01-110)과 '2단계 BK21사업'의 연구비로 수행되었음.

Manuscript received September 10, 2012 Revised November 23, 2012

Accepted November 23, 2012

## 1. 서론

나이퀴스트 샘플링 (Nyquist sampling) 이론은 현재 대부분의 디지털 장치에서 아날로그 신호를 획득하는데 사용되는 근간이 되는 이론이다. 이 이론에 의하면 아날로그 신호를 완벽히 복원하기 위해서 해당 아날로그 신호 주파수 대

역폭의 두 배 이상의 주파수로 샘플링을 해야 한다. 이 이론은 간결하고 명쾌하지만, 신호를 완전히 무결하게 복원하기 위한 충분조건 (sufficient condition)이기에 신호의 특성이 반영되지 않는다. 최근 고화질 영상 처리나 고속 통신 시스템 등의 예에서 볼 수 있듯이 샘플링 해야 하는 데이터 양이 급격히 늘어남에 따라서 이 이론의 효율성에 대한 의문이 꾸준히 제기되어 왔다.

Candes와 Donoho 등은 복원하고자 하는 신호벡터에서 0의 개수가 많은 경우, 나이퀴스트 샘플링 보다 훨씬 높은 압축률로 원 신호를 완벽하게 복원할 수 있음을 증명하였다. 이 이론을 흔히 압축 센싱 이라고 불리운다<sup>[1-3]</sup>. 희소 신호  $\mathbf{x} \in R^n$  와 관측값  $\mathbf{y} \in R^m$  은 측정 행렬 (sensing matrix)  $\Phi \in R^{m \times n}$  을 매개로 하여 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

압축 센싱 기법의 핵심은  $m \ll n$ 인 과소결정된 (under-determined) 시스템일지라도 측정 행렬  $\Phi$ 가 적절한 조건을 만족할 때, 관측치  $\mathbf{y}$ 로부터 크기가  $n$ 인 희소 신호벡터  $\mathbf{x}$ 를 완벽히 복원해낼 수 있다는 점이다. 측정행렬  $\Phi$ 의 열 (column)중에서 신호벡터의 영 아닌 원소와 곱해지는 열의 인덱스를 true support ( $\Omega$ )라고 부른다. 예를 들면  $\mathbf{x} = [1020]^T$ 인 경우 support 집합은  $\Omega = \{1,3\}$ 이 된다. true support를 정확하게 얻어낼 수 있다면, true support만으로 이루어진 부분행렬을 이용하여 원 신호벡터를 구해낼 수 있으므로 궁극적으로 (1)식의 해를 구하는 것과 동일하다.

일반적으로 (1)식과 같이 과소결정된 (underdetermined) 시스템인 경우, 일반적으로 하나 이상의  $\mathbf{x}$ 가 존재하기 때문에 원 신호를 완벽히 복원할 수 없다. 하지만 복원하고자 하는 신호  $\mathbf{x}$ 가 희소 성질을 가지면  $\ell_0$ -최소화 기법을 사용하여 원 신호  $\mathbf{x}$ 를 완벽히 복원할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (2)$$

$\ell_0$ -최소화 기법은 NP-hard 문제의 일종으로 신호의 차원

이 큰 경우 현실적으로 구현이 불가능한 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 시도로  $\ell_1$ -최소화기법이 제안되었다.  $\ell_1$ -최소화기법은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3)$$

$\ell_1$ -최소화 기법에서 원 신호  $\mathbf{x}$ 를 완벽히 복원하기 위한 조건을 구하기 위한 도구로, 주어진  $K$  희소 신호 (영 아닌 값이  $K$ 개)에 대해서 측정 행렬  $\Phi$ 의 직교성 정도를 표현하는 restricted isometry property (RIP)가 널리 사용된다<sup>[4]</sup>.

$$1 - \delta < \frac{\|\Phi \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} < 1 + \delta \quad (4)$$

식 (4)을 만족하는 가장 작은 상수를 RIP 상수라고 부르며  $\delta_K$ 로 표시한다<sup>[5]</sup>. Candes와 Donoho는 측정 행렬  $\Phi$ 가  $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$ 의 조건을 만족할 때,  $\ell_1$ -최소화 기법을 사용하여 원 신호  $\mathbf{x}$ 를 완벽히 복원할 수 있음을 증명하였다. 하지만  $\ell_1$ -최소화 기법은 복잡도가 상당히 크다는 단점이 있다.

이러한 단점을 극복하기 위한 대안으로서 greedy 알고리즘들이 근래 활발히 연구되고 있다. Greedy 알고리즘은  $\ell_1$ -최소화 기법에 비해 월등히 낮은 복잡도를 가지면서도 비교적 우수한 복원 성능을 갖는다. Greedy기반의 대표적인 알고리즘으로는 orthogonal matching pursuit (OMP)가 있으며, 근래 OMP 알고리즘을 수정, 발전시킨 여러 가지 알고리즘들이 제안되었다<sup>[6,13]</sup>. 이에 compressed sampling matching pursuit (CoSaMP)<sup>[7]</sup>, subspace pursuit (SP)<sup>[8]</sup>, regularized orthogonal matching pursuit (ROMP)<sup>[9]</sup> 그리고 stagewise orthogonal matching pursuit (StOMP)<sup>[10]</sup> 등이 있다.

본 논문에서는 기존 OMP 알고리즘에 반복과정마다 후보 support 집합을 이용한 MuCaMP (Multiple candidate matching pursuit) 기법을 제안하고 MuCaMP의 완벽한 신호 복원을 위한 RIP 기반의 충분조건을 제시한다. 또한 모

의 실험을 통하여 제안하는 MuCaMP 알고리즘이 기존에 알려진 희소 신호 복원 알고리즘들에 비해 우수한 복원 성능을 가지는 것을 확인한다.

## II. 후보 support 집합을 이용한 OMP 알고리즘

OMP 알고리즘은 대표적인 greedy 알고리즘으로써 매 반복과정마다 가장 큰 상관관계가 있는 support를 선택하면서 잔차 (residual)를 줄여나가는 기법이다. OMP 알고리즘은 매 반복과정마다 하나의 원소가 support 집합  $\Lambda$ 에 추가된다면 MuCaMP 알고리즘은 매 반복과정마다 여러개의 support 집합들을 구성하고 마지막 반복과정에서 여러개의

후보 support 집합 중 최소 잔차를 가지는 support 집합을 최종적으로 선택한다. 그림 1은 반복과정마다 2개씩 support 집합을 늘려가는 과정을 보여주고 있다.

그림을 보면 OMP 알고리즘은  $\phi_i$ 를 행렬  $\Phi$ 의  $i$ 번째 열 (column)이라고 할 때, 첫 번째 반복과정에서  $\phi_2$ 를 선택 후, 두 번째 반복과정에서  $\phi_1$ 을 선택함으로써,  $\Lambda = \{\phi_1, \phi_2\}$  support 집합을 구성한다. 이에 반해 MuCaMP는 첫 번째 반복과정에서  $\phi_2$ 와  $\phi_9$ 를 선택하여  $\Lambda_1 = \{\phi_1\}$ ,  $\Lambda_2 = \{\phi_9\}$  2개의 support 집합을 구성하고, 두 번째 반복과정에서  $\phi_2$ 와  $\phi_9$ 를 확장하여,  $\Lambda_1 = \{\phi_1, \phi_2\}$ ,  $\Lambda_2 = \{\phi_2, \phi_3\}$ ,  $\Lambda_3 = \{\phi_4, \phi_9\}$  그리고  $\Lambda_4 = \{\phi_9, \phi_{10}\}$  4개의 support 집합을 구성하게 된다. 그림 2는 MuCaMP가 support 집합  $\Lambda$ 를 구성하는 방법을 트리 형태로 보여준다.

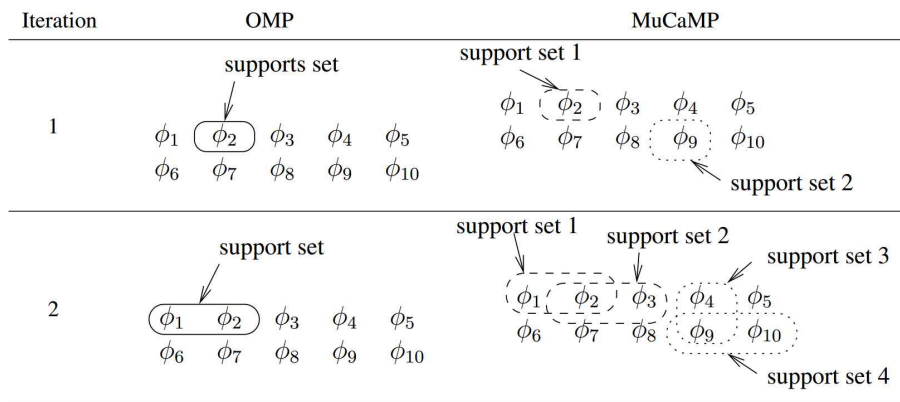


그림 1. OMP와 MuCaMP의 support 선택방법  
Fig. 1. Selection of OMP and MuCaMP

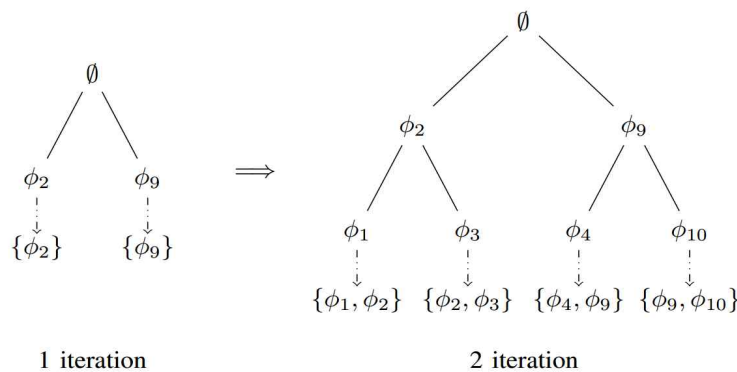


그림 2. MuCaMP가 선택하는 supports  
Fig. 2. The supports which are selected by MuCaMP

마지막 반복과정까지 구성된 후보 support 집합이 정확한 support 집합을 포함하고 있다면, 최소 잔차를 가지는 support 집합이 정확한 support 집합이 된다. 마지막 반복과정에서의 잔차를  $r_{final}$  라고 하면,  $r_{final}$  는 다음과 같다.

$$r_{final} = y - \hat{\Phi}x = y - \Phi(\Phi_A^T \Phi_A)^{-1} \Phi_A^T \Phi_T x \quad (5)$$

식 (5) 에서 선택된 support 집합  $A$  가 정확한 support 집합  $T$  라면  $\Phi(\Phi_A^T \Phi_A)^{-1} \Phi_A^T \Phi_T x$  항에서  $(\Phi_A^T \Phi_A)^{-1} \Phi_A^T \Phi_T$  이 소거되어  $\Phi x$  항만 남게 되고,  $\Phi x$  는  $y$  가 되므로  $r_{final}$  은 영이 된다.  $k$  번째 반복과정에서의 후보 support 집합들을  $S_{(k)}$  라 정의하면 마지막 반복과정에서의 후보 support 집합들은  $S_{(K)}$  가 된다.  $S_{(K)}$  가 정확한 support 집합을 포함하고 있다면,

$$A_K = \operatorname{argmin}_{A \in S_{(K)}} |r_A| \quad (6)$$

에 의해  $A_K$  는 정확한 support 집합이 됨을 알 수 있다.

따라서 모든 반복과정마다 MuCaMP는 후보 support 집

표 1. 다중 후보 매칭 퍼스uits 알고리즘  
 Table 1. Multiple candidate matching pursuit

Input : 관측치 : $y$ Sensing 행렬 : $\Phi$ Sparsity : $K$ 후보 support set 확장 값 : $N$
Initialize: $S_{(0)} = \emptyset$
for $k=1, \dots, K$ for $A_k \in S_{(k)}$ $\Phi_A = \operatorname{argmax}_{ A =N}  \Phi^T r_{A_k} $ for $\phi_i \in \Phi_A$ $S_c = A_k \cup \phi_i$ $S_{(k+1)} = S_{(k+1)} \cup S_c$ end end end end
$A_K = \operatorname{argmin}_{A \in S_{(K)}}  r_A $ $\hat{x} = \operatorname{argmin}  y - \Phi_A x $

합을 구성할 때, 정확한 support 집합이 항상 포함되어야 한다. 측정 행렬의 열에서 잔차 (residual)와 높은 상관관계를 가지는 열을 선택함으로써 후보 support 집합이 정확한 support를 포함할 확률이 높아지게 된다. 다음의 표 1에 MuCaMP 알고리즘을 요약하였다.

### III. RIP기반의 MuCaMP 충분조건

회소 신호의 복구를 위해서는 후보 support 집합이 정확한 support 집합을 포함해야 한다. 또한 후보 support 집합이 정확한 support 집합을 포함하기 위해서는 매 반복과정마다 후보 support 집합에 포함될 support들을 선택할 때, 선택된 support 값들 중, 항상 정확한 support가 존재해야 한다. MuCaMP 알고리즘은 반복과정에서 잔차와 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들과의 상관치 중 큰  $N$  개의 support들을 선택하므로, 정확한 복원을 위해서는 선택된  $N$  개의 후보 support 중 하나 이상의 정확한 support를 포함해야 한다.

이 조건 (MuCaMP의 충분조건)을 표현하기 위해 S-support 집합에 대해, 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들과 관측값과의 상관치 중,  $N$ 번째로 큰 절대 값,  $C_S^{(N)}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$C_S^{(N)} = |\langle \Phi_S y \rangle| \quad (7)$$

$T$ 와  $W$ 는 정확한 support 집합과 오류 support 집합이라고 가정할 경우, 식 (7)을 이용하면 MuCaMP는 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들과 관측치와의 상관치에서 가장 큰  $N$ 개의 값 중  $C_T^{(1)}$ 이 포함되어야 한다. 예를 들어,  $C_W^{(1)} > C_W^{(2)} > \dots > C_T^{(1)} > \dots > C_W^{(N-1)}$ 인 경우이다. 이는 다음과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$C_T^{(1)} > C_W^{(N)} \quad (8)$$

즉, 오류 support 열과 잔차의 상관치 중  $N$ 번째로 큰 값  $C_W^{(N)}$ 보다 정확한 support 열과 잔차의 상관치에서 가장 큰 값  $C_T^{(1)}$ 이 크면, 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들과 관측치와의 상관치

에서 가장 큰 N개의 값에  $C_T^{(1)}$ 는 항상 포함된다.

MuCaMP가 K 최소 신호 복원에 필요한 충분조건을 구하기 위해 반복과정을 두 가지 경우로 나눈다. 첫째는 초기 반복 (initial iteration)에서 관측값과 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들 간의 상관치에서 식 (8)을 만족시키는 조건이고, 둘째는 일반적인 k (k>1) 번째 반복에서 잔차와 측정 행렬  $\Phi$ 의 열들 간의 상관치로부터 얻어지는 식 (8)의 조건이다.

MuCaMP의 충분조건을 자세하게 분석하기에 앞서, MuCaMP에 사용되는 RIP 성질 2가지를 정리한다.

정리 1: 측정 행렬  $\Phi$ 가  $K_1 < K_2$ 인 두 실수에 대해 RIP 조건을 만족하면, 다음의 관계가 성립한다<sup>[4,8]</sup>.

$$\delta_{K_1} < \delta_{K_2} \tag{9}$$

정리 2: disjoint한 관계에 있는 T, S 집합에 대해  $\delta_{|S+T|} < 1$  인 경우, 다음의 부등식이 성립한다<sup>[8, 12]</sup>.

$$\|\Phi'_S \Phi_T u\| \leq \delta_{|S+T|} \|u\|_2 \tag{10}$$

### 1. 첫 번째 반복과정의 경우

첫 번째 반복과정의 경우, 관측값과 측정 행렬  $\Phi$ 와의 상관관계에서 식 (8)은 측정 행렬  $\Phi$ 가 다음의 RIP 조건을 만족할 때 성립된다.

정리 3: MuCaMP는 K 최소 신호 복원을 위해 첫 번째 반복과정에서 N개의 support들을 선택하는 경우, 관측 행렬  $\Phi$ 가 다음의 RIP 조건에 만족될 때, 선택된 support들 중 하나 이상의 정확한 support가 포함됨을 보장한다.

$$\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K} + \sqrt{N}} \tag{11}$$

증명:

식 (8)의 좌변  $C_T^{(1)} = |\langle \Phi_T y \rangle|_\infty$  는  $l_\infty$ 와  $l_2$ 의 부등식과 소개된 RIP 성질을 이용하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$C_T^{(1)} \geq \frac{\|x\|_2}{\sqrt{K}}(1 - \delta_K) \tag{12}$$

식 (8)의 우변,  $C_W^{(N)} = |\langle \Phi_W y \rangle|^{(N)}$  은 RIP 성질을 이용하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta_{K+N} \frac{\|x\|_2}{\sqrt{N}} \geq C_W^{(N)} \tag{13}$$

식 (12)의 우변과 식 (13)의 좌변이 다음과 같은 관계를 만족하면

$$\frac{\|x\|_2}{\sqrt{K}}(1 - \delta_K) \geq \delta_{K+N} \frac{\|x\|_2}{\sqrt{N}} \tag{14}$$

식 (8)이 만족됨을 알 수 있다. 식 (14)를 정리 1의 RIP 성질을 이용하여 풀면 정리 3의 (11) 식을 얻을 수 있다.

### 2. k 번째 반복과정의 경우

k 번째 반복과정의 경우, k-1 번째 반복과정까지 정확한 support 집합으로만 구성되어 있다고 가정을 한다. 첫 번째 반복과정에서 사용했던 관측치 대신 잔차와 측정 행렬  $\Phi$ 와의 상관관계를 이용하여 식 (8)이 성립될 수 있는 조건을 찾는다.

k 번째 반복의 충분조건을 찾기 위해 식 (7)에서 관측치로 사용되었던 y를 k 번째 잔차  $r_k$ 로 대체하여 k 번째 반복에서는 다음의 정의를 사용한다.

$$C_S^{(N)} = |\langle \Phi_S, r_k \rangle| \tag{15}$$

k 번째 반복에서 측정 행렬  $\Phi$ 가 다음의 RIP 조건을 만족할 때, 선택되는 support들은 정확한 support를 포함한다.

정리 4: MuCaMP는  $K$  회소 신호 복원을 위해  $k$  번째 반복과정에서  $N$ 개의 support들을 선택하는 경우, 관측 행렬  $\Phi$ 가 다음의 RIP 조건에 만족될 때, 선택된 support들 중 하나 이상의 정확한 support가 포함된다.

$$\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3\sqrt{N}}} \quad (16)$$

증명:

분석을 위해  $\Lambda^k$ 를  $k$  번째 반복과정 이전에 선택된 support들의 집합이라고 정의한다. 이 때  $k$  번째 반복과정에서 이미 선택된 정확한 support들의 개수는  $k$  가 된다.

$k$  번째 잔차 크기의 제곱  $\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 은 다음의 식으로 정리할 수 있다.

$$\|\mathbf{r}_k\|_2^2 = \left| \left\langle \sum_{j \in T-\Lambda^k} x_j \phi_j, \mathbf{r}_k \right\rangle \right| \leq \sum_{j \in T-\Lambda^k} |x_j| |\langle \phi_j, \mathbf{r}_k \rangle| \quad (17)$$

$l_1$ 과  $l_2$ 의 노름(norm) 부등식과  $C_T^{(1)}$ 은 항상  $|\langle \phi_j, \mathbf{r}_k \rangle|$  보다 크거나 같은 점을 이용하여 식 (17)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\|\mathbf{r}_k\|_2^2 \leq \sqrt{K-k} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 C_T^{(1)} \quad (18)$$

$\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 은  $\mathbf{r}_k = P_{\Lambda^k}^\perp \mathbf{y}$ 에서 다음의 식으로 정리된다.

$$\|\mathbf{r}_k\|_2^2 = \|\Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 - \|P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (19)$$

RIP 성질을 이용하면, 식 (19)의 우변의 두 항이 각각 다음의 부등식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\|\Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \geq (1 - \delta_{K-k}) \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (20)$$

$$\|P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \leq \frac{\delta_{k+K-k}^2 (1 + \delta_k)}{(1 - \delta_k)^2} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2^2 \quad (21)$$

$\|\mathbf{r}_k\|_2^2$ 을 기준으로 식 (18), (19), (20), 그리고 (21)을 정리하면 다음과 같다.

$$C_T^{(1)} \geq \left( 1 - \delta_{K-k} - \frac{1 + \delta_k}{(1 - \delta_k)^2} \delta_{k+K-k}^2 \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{K-k}} \quad (22)$$

노름(norm) 부등식을 이용하면 식 (8)의 우변,  $C_W^{(N)} = |\langle \Phi_W \mathbf{r}_k \rangle|^{(N)}$ 는 아래의 부등식을 만족한다.

$$\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2 \geq \sqrt{N} C_W^{(N)} \quad (23)$$

다음으로  $\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2$ 는 다음의 상계 (upper bound)를 가진다.

$$\begin{aligned} \|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2 &\leq \\ \|\Phi_W^T \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 &+ \|\Phi_W^T P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)의 우변을 항들을 RIP 성질을 이용하여 정리하면 각각 다음의 부등식과 같다.

$$\|\Phi_W^T \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \leq \delta_{N+K-k} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \quad (25)$$

$$\|\Phi_W^T P_{\Lambda^k} \Phi_{T-\Lambda^k} \mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \leq \frac{\delta_{N+k} \delta_{k+K-k}}{1 - \delta_k} \|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2 \quad (26)$$

$\|\Phi_W^T \mathbf{r}_k\|_2$ 를 기준으로 식 (23), (24), (25), 그리고 (26)을 정리하면 다음과 같다.

$$C_W^{(N)} \leq \left( \delta_{N+K-k} + \frac{\delta_{N+k} \delta_{k+K-k}}{1 - \delta_k} \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{N}} \quad (27)$$

식 (22)의 우변과 식 (27)의 우변이

$$\begin{aligned} \left( 1 - \delta_{K-k} - \frac{1 + \delta_k}{(1 - \delta_k)^2} \delta_{k+K-k}^2 \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{K-k}} &\geq \\ \left( \delta_{N+K-k} + \frac{\delta_{N+k} \delta_{k+K-k}}{1 - \delta_k} \right) \frac{\|\mathbf{x}_{T-\Lambda^k}\|_2}{\sqrt{N}} &\end{aligned} \quad (28)$$

관계를 가지면, 식 (8)이 성립된다. 식 (28)의 간결한 표현을 위해 정리 1을 이용하면,  $N+k < N+K$ ,  $N+K-k < N+K$  그리고  $K-k < N+K$ 으로 인해  $\delta_{N+k} < \delta_{N+K}$ ,  $\delta_{N+K-k} < \delta_{N+K}$  그리고  $\delta_{K-k} < \delta_{N+K}$  부등식이 성립한다. 이 부등식들을 이용하여 식 (28)을 정리하면 다음과 같다.

$$\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K-k+3\sqrt{N}}} \quad (29)$$

$k > 1$ 에 의해 정리 4는 식 (29)의 충분조건이 된다.

### 3. 전체 반복의 경우

MuCaMP 알고리즘의 완벽한 신호 복원을 위해서는 첫 번째 반복의 충분조건과  $k$  번째 반복의 충분조건, 두 가지를 모두 만족해야 한다.  $N$ 과  $K$ 가 1보다 큰 경우,  $\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+\sqrt{N}}} > \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3\sqrt{N}}}$  이므로  $k$  번째 반복의 조건,  $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3\sqrt{N}}}$  이 성립하면, 첫 번째 반복의 충분조건,  $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+\sqrt{N}}}$  은 성립하게 된다. 따라서 MuCaMP 알고리즘의 최종적인 충분조건은 다음과 같다.

$$\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3\sqrt{N}}} \quad (30)$$

## IV. 모의실험

모의실험에서는 MuCaMP의 성능 확인을 위해 제안하는 MuCaMP 기법과  $\ell_1$ -최소화 기법, OMP, StOMP, 그리고 CoSaMP 기법을 비교 실험하였다. 모의실험에는 가우스 분포로 이루어진 100x256 크기의 3000 가지 관측행렬과 가우스 분포 값으로 구성된 희소 신호를 사용하였다. 실험 결과로 잡음이 없는 경우는 완벽 복원 성능 (Exact recovery ratio; ERR)를 사용하였고, 잡음이 있는 경우는 MSE (mean square error)를 사용하였다.

MuCaMP의 반복과정에서 선택하는 support의 크기(N)는 4, 8인 경우에 대해 실험을 수행하였고, MuCaMP의 수행시간을 줄이기 위해 반복과정마다 후보 support 집합의 개수를 4 또는 8로 제한하였다. MuCaMP가 선택하는 support의 크기와 최대 후보 support 집합의 개수를 N과 L로 표기하였다. StOMP 방식은 두 가지 threshold 방법, false alarm rate (FAR)과 false discovery rate (FDR)중 조금 더 성능이 우수한 FAR 기법에 대해 실험을 수행하였다.

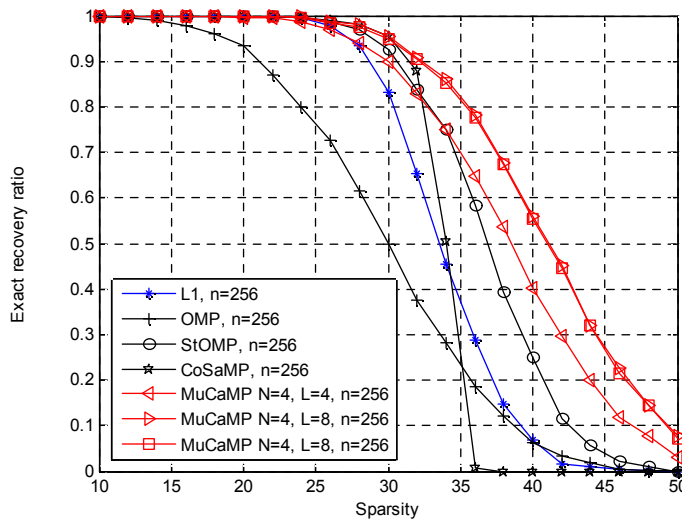


그림 3. Sparsity에 따른 완벽 복원 성능  
Fig. 3. Exact recovery ratio as a function of sparsity

그림 3은 완벽 복원 성능 실험의 결과로 x축은 sparsity 단계, y축은 완벽 신호 복원율을 의미한다.

그림 3에서 OMP는 크기가 256인 신호에 대해 약 12개의 영 아닌 신호까지는 완벽한 복원을 할 수 있으나 sparsity 단계가 14이 넘어가면서 복원율이 감소하였고, CoSaMP, StOMP와  $\ell_1$ -최소화 알고리즘은 24개의 sparsity 단계까지

완벽히 신호를 복원 할 수 있는 것을 확인할 수 있다. MuCaMP 역시 24개의 sparsity 단계까지 완벽히 신호를 복원할 수 있고 34개의 sparsity 단계부터 다른 방법들에 비해 ERR이 천천히 떨어짐을 확인할 수 있다. MuCaMP에서  $N=4, L=4$ 와  $N=4, L=8$  그리고  $N=8, L=8$ 의 성능을 비교해 보면, 반복과정마다 많은 support 선택하는 것 보다 더 많은

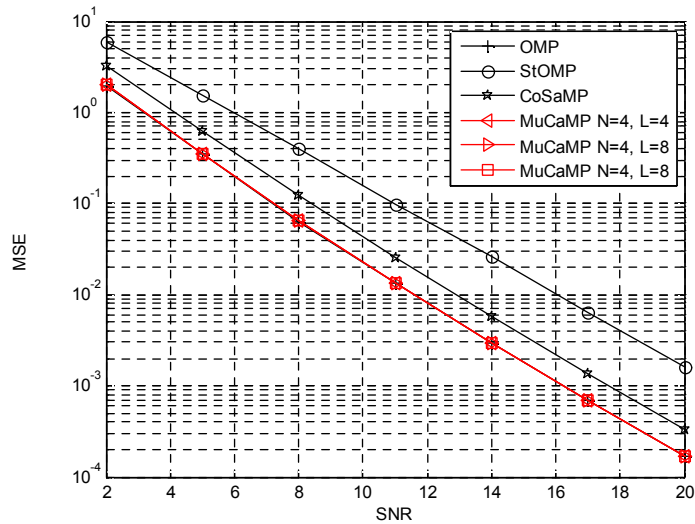


그림 4. 영이 아닌 신호의 개수가 10일 때, MSE 성능  
 Fig. 4. MSE performance when the sparsity level is 10

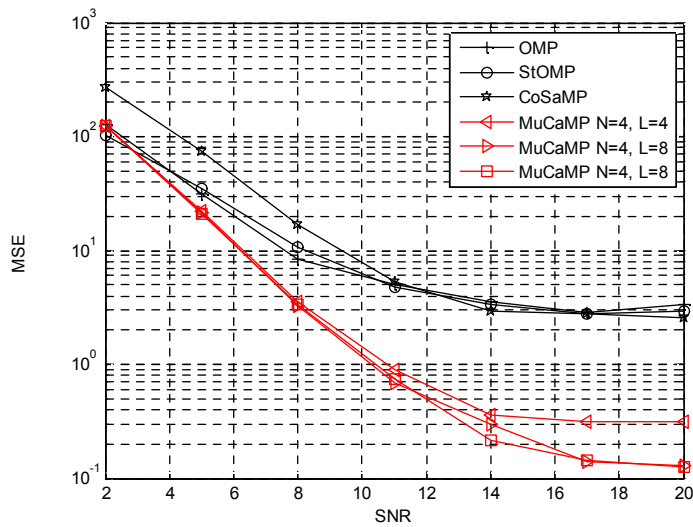


그림 5. 영이 아닌 신호의 개수가 28일 때, MSE 성능  
 Fig. 5. MSE performance when the sparsity level is 28



후보 support 집합을 유지하는 것이 더 나은 성능을 보임을 알 수 있다.

그림 4 그리고 5는 잡음이 있는 상황에서 영이 아닌 신호의 개수가 10 그리고 28일 때의 MSE 성능결과로서 x축은 SNR, y축은 MSE를 나타낸다. 그림 4에서 영이 아닌 신호의 개수가 10인 경우, OMP와 MuCaMP가 동일한 MSE 성능을 보여주고, CoSaMP와 StOMP기법보다 MSE 성능이 좋았다. 영이 아닌 신호의 개수가 28인 그림 6에서는 MuCaMP가 다른 기법들보다 좋은 성능을 보임을 알 수 있다. 영이 아닌 신호의 개수가 28은 그림 3의 ERR 성능에서 ERR값이 OMP는 낮고, CoSaMP 그리고 StOMP 기법은 떨어지기 시작하는 부분이다. 잡음이 없는 경우 ERR값은 MuCaMP와 다른 기법들이 비슷했지만, 잡음이 있는 경우 MSE값은 MuCaMP가 다른 기법들보다 우수함을 알 수 있다.

## V. 결론

본 논문에서는 후보 support 집합을 이용하여 마지막 반복과정에서 최소 잔차를 찾는 방법을 이용한 MuCaMP 알고리즘을 소개하고 실험적인 방법으로 잡음이 없는 경우와 있는 경우에 대하여 sparse한 신호 복원성능을 분석해 보았다. 완벽한 복원을 위해 후보 support 집합은 최소 하나 이상의 정확한 support를 포함하는 것이 보장되어야 한다는 점으로부터 RIP기반의 충분조건인  $\delta_{N+K} < \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{K+3}\sqrt{N}}$  을 얻을 수 있었다. 모의 실험 결과 MuCaMP 알고리즘은 후보 support 집합의 크기에 영향을 받았으며 ERR 관점 (잡음이 없는 경우)에서 OMP를 확장한 CoSaMP와 StOMP비슷한 성능을 보이고, MSE 관점 (잡음이 있는 경우)에서 다른 알고리즘들 보다 높은 복원 성능을 보여주었다.

## 참고 문헌

- [1] D. L. Donoho and P. B. Stark, "Uncertainty principles and signal recovery," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 49, no. 3, pp. 906-931, 1989
- [2] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, "A simple proof of the restricted isometry property for random matrices," *Constructive Approximation*, Vol. 28, no. 3, pp. 253-263, Dec. 2008
- [3] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006
- [4] E. Candes and T. Tao, "Decoding by linear programming," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, Dec. 2005
- [5] R. Giryes and M. Elad, "RIP-Based Near-Oracle Performance Guarantees for SP, CoSaMP, and IHT," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. PP, no. 99, Nov. 2011
- [6] J. A. Tropp and A. C. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 53, no. 12, pp. 4655-4666, Dec. 2007
- [7] D. Needell and J. A. Tropp, "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 26, no. 3, pp. 301-321, Mar. 2009
- [8] W. Dai and O. Milenkovic, "Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 55, no. 5, pp. 2230-2249, May. 2009
- [9] D. Needell and R. Vershynin, "Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit," *IEEE J. Sel. Topics Signal Processing*, Vol. 4, no. 2, pp. 310-316, Apr. 2010
- [10] D. L. Donoho and I. Drori and Y. Tsaig and J. L. Starck, "Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit," Mar. 2006
- [11] M. A. Davenport and M. B. Wakin, "Analysis of Orthogonal Matching Pursuit using the restricted isometry property," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 56, no. 9, pp. 4395-4401, Sep. 2010
- [12] E. J. Candes, "The restricted isometry property and its implications for compressed sensing," *Comptes Rendus Mathematique*, Vol. 346, no. 9-10, pp. 589-592, May. 2008
- [13] J. A. Tropp, "Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. 50, no. 10, pp. 2231-2242, Oct. 2004

---

저 자 소 개

---



권 석 범

- 2007년 : 고려대학교 컴퓨터학과 학사
- 2010년 : 고려대학교 컴퓨터-전파통신공학과 석사
- 2010년 ~ 현재 : 고려대학교 컴퓨터-전파통신공학과 박사과정
- 주관심분야 : Signal processing, Wireless communication



심 병 효

- 1995년 : 서울대학교 제어계측공학과 학사
- 1997년 : 서울대학교 제어계측공학과 석사
- 2004년 : University of Illinois at Urbana-Champaign Mathematics 석사
- 2005년 : University of Illinois at Urbana-Champaign Electrical and Computer Engineering 박사
- 2007년 ~ 현재 : 고려대학교 컴퓨터-전파통신공학과 조교수
- 주관심분야 : Information theory, Signal processing, Wireless communication