

최소수리비용이 고장시간의 함수일 때 연장된 보증 정책[†]

정기문¹

¹경성대학교 정보통계학과

접수 2012년 10월 23일, 수정 2012년 11월 13일, 게재확정 2012년 11월 22일

요약

본 논문에서는 최소수리의 비용이 시스템의 수명시간에 의존하는 경우에 연장된 보증이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대하여 사용자 측면에서의 총기대비용을 구하였다. 이를 위해서 연장된 보증을 정의하고 사용자 측면에서 연장된 보증이 종료된 이후의 교체모형을 가정하였다. 특히, 시스템의 교체모형에서 사용자가 연장된 보증을 선택하기 위한 기준을 제시하였으며, 시스템의 고장시간이 와이블 분포를 따를 때 수치적 예를 통하여 이를 설명하였다.

주요용어: 교체모형, 연장된 보증, 총기대비용, 최소수리보증.

1. 서론

보증기간이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 이론적인 연구는 신뢰성 응용분야에서 많은 연구자들이 관심을 갖는 분야 중의 하나이며, 최근까지 활발하게 연구가 진행되고 있다. 보증정책은 일반적으로 보증기간의 재생여부에 따라 재생보증 (renewing warranty)과 비재생보증 (non-renewing warranty)으로 구분할 수 있으며, 사용자의 보증비용 부담 여부에 따라서는 무료보증 (free warranty)과 비례보증 (pro-rata warranty)으로 구분할 수 있다. 그리고 보증기간 동안에 발생한 시스템의 고장에 대하여 교체 또는 수리를 수행하느냐에 따라 교체보증 (replacement warranty)과 수리보증 (repair warranty)으로 구분할 수 있다.

우선, 교체보증이 주어진 시스템에 대한 보전정책과 관련된 연구로는 Sahin과 Polatoglu (1996), Jung과 Park (2003), Chien (2008a, 2008b), Jung (2009), Jung (2010), Jung (2011a) 그리고 Jung 등 (2010) 등이 있다. 특히, Sahin과 Polatoglu (1996)는 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 시스템을 새것으로 교체해 주고, 보증기간도 재생되는 재생무료보증 (renewing free replacement warranty)과 재생비례보증 (renewing pro-rata replacement warranty), 그리고 시스템은 새것으로 교체되지만 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료보증 (non-renewing free replacement warranty)과 비재생비례보증 (non-renewing pro-rata replacement warranty)이 제공되는 수리 가능한 시스템에 대하여 사용자 측면의 교체정책 (replacement policy)을 제안하였다.

그리고 최소수리보증이 주어진 시스템에 관한 보전정책과 관련된 연구로는 Yeh 등 (2007)과 Jung (2011b)의 연구가 있는데, Yeh 등 (2007)은 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 최소수리 (minimal repair)가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료최소수리보증 (non-renewing free minimal repair warranty)이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체정책을 제안하였다.

[†] 이 논문은 2012학년도 경성대학교 학술연구비지원에 의하여 연구되었음.

¹ (608-736) 부산광역시 남구 대연3동 314-79, 경성대학교 정보통계학과, 부교수. E-mail : kmjung@ks.ac.kr

그러나 위에서 언급한 연구들은 시스템을 구입할 때 처음에 기본적으로 제공되는 보증기간만을 고려하였는데, 최근에는 기본적으로 제공되는 보증기간과 더불어 일정한 비용을 지불하고 추가적으로 보증기간을 선택할 수 있는 연장된 보증정책에 대한 관심이 증가되고 있다. Wu와 Longhurst (2011)은 연장된 보증 하에서의 최적의 교체정책을 제안하였으며, Bouguerra 등 (2012)은 기존의 교체 및 예방보전 정책 하에서 연장된 보증을 구입하기 위한 기준을 제시하였다. 그러나 이러한 연구에서 최소수리 비용은 고정된 상수라고 가정되었는데, 이를 고장시간의 함수형태로 고려하는 것이 좀 더 일반적이라고 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 최소수리의 비용이 시스템의 수명시간에 의존하는 경우에 연장된 보증이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 총기대비용을 구하였다. 특히, 사용자가 연장된 보증을 선택하기 위한 기준을 이론적으로 구하였다. 이를 위해서 연장된 보증을 정의하고 사용자 측면에서 연장된 보증이 종료된 이후의 교체모형을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 연장된 보증이 주어진 시스템에 대한 사용자 측면의 교체모형을 제시하고 사용자 측면에서의 총기대비용을 구하였다. 특히, 소비자 측면에서 연장된 보증기간을 선택하기 위한 조건을 이론적으로 제시하였다. 3절에서는 2절에서 고려된 연장된 보증과 이의 특성을 자세히 설명하기 위하여 시스템의 고장시간이 와이블 분포를 따를 때 수치적 예를 들었다.

2. 연장된 보증 정책

2.1. 연장된 보증이 있는 최소수리보증

본 절에서는 본 논문에서 고려하고자 하는 연장된 보증에 대하여 자세히 살펴보고자 한다. 연장된 보증이란 시스템을 구입할 때 처음에 기본적으로 제공되는 보증기간이 아니고, 일정한 비용을 지불하고 추가적으로 보증기간을 선택할 수 있는 보증을 의미하며, 최근에 이러한 연장된 보증에 대한 관심이 증가되고 있는 실정이다. 이러한 연장된 보증기간과 관련된 주된 관심사항은 연장된 보증기간의 길이와 구입비용 그리고 연장된 보증기간이 제공되는 경우에 대한 사용자 측면의 최적의 보전정책이다. 그런데, 이러한 문제는 제공되는 보증정책의 종류와 시스템의 고장분포 그리고 수반되는 비용과 관련이 있다고 할 수 있다. 따라서 본 논문에서 고려하고자 하는 보증은 연장된 보증이 있는 최소수리보증이다. 즉, 처음에 기본적으로 무료최소수리보증이 제공되고, 일정비용을 지불하고 추가적으로 연장된 보증기간을 선택할 수 있는 보증이다.

연장된 보증이 있는 최소수리보증에서는 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 이루어지고, 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. Figure 2.1은 이러한 추가보증에 있는 최소수리보증을 전형적인 형태를 보여주고 있다. 즉, 기본적으로 제공되는 최소수리보증기간 $(0, w_B)$ 에서는 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 진행된다. 그리고 추가적으로 제공되는 추가보증기간 $(w_B, w_B + w_A)$ 에서도 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 진행된다. 물론, 전체 보증기간 $(0, w_B + w_A)$ 에서 시스템에 고장이 발생되어도 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. 만약, 추가보증기간이 없으면 즉, $w_A = 0$ 이면 기존의 최소수리보증과 동일하게 된다는 사실도 알 수 있다.

2.2. 최소수리보증 이후의 교체모형

본 논문에서 고려되는 추가보증에 있는 최소수리보증이 종료된 이후의 교체모형 (Figure 2.2 참조)은 다음과 같이 정의되는 보전모형이라고 할 수 있다.

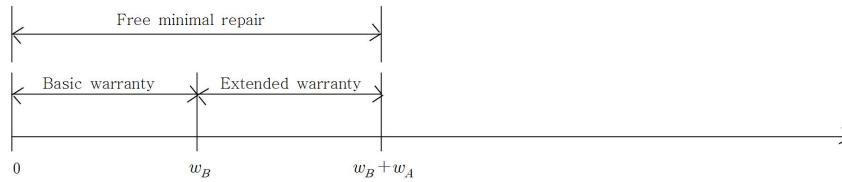


Figure 2.1 Minimal repair warranty with extended warranty

모형

- i) 시스템에는 기본적으로 최소수리보증기간 w_B 가 제공된다.
- ii) 기본적으로 제공되는 보증기간이 종료된 이후에는 추가적으로 최소수리보증기간 w_A 가 제공된다.
- iii) 사용자는 연장된 보증기간을 구입하기 위해서 비용 c_{w_A} 를 지불한다.
- iv) 사용자는 보증기간이 종료된 이후에 시점 τ 에서 새로운 시스템으로 교체한다.
- v) 연장된 보증기간이 종료된 이후의 보전기간에는 최소수리가 수행된다.
- vi) 최소수리 및 교체를 수행하기 위한 시간은 고려하지 않는다.
- vii) 기본보증 및 연장된 보증 기간에서의 최소수리비용은 무료이고, 보증기간이 종료된 이후의 최소수리비용은 $C_m(t)$ 이며 교체비용은 c_r 이다.

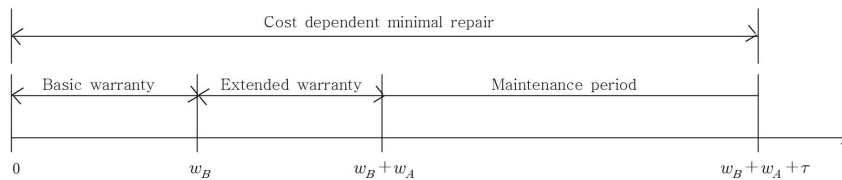


Figure 2.2 Replacement model with extended warranty

2.3. 연장된 보증 정책

본 논문에서 고려하고 있는 연장된 보증기간이 제공되는 교체모형에서 사용자는 일정한 비용을 지불하고 연장된 보증기간을 구입할 것인지 아니면 기본적으로 제공되는 보증기간만을 사용할 것인지를 선택하는 것이 사용자 측면에서의 관심 중의 하나라고 할 수 있다. 이러한 문제는 사용자가 시스템을 운영하는 동안 지불하게 되는 총기대비용 (expected total cost)의 특성을 고려해야 하는데, 이는 제공되는 보증정책의 종류와 시스템의 고장분포 그리고 수반되는 비용과 관련이 있다고 할 수 있으므로 이러한 다양한 요인을 포함하여야 한다.

먼저, 2.2절에서 설명된 교체모형에 대하여 사용자가 지불하게 될 총기대비용 $ETC_A(\tau)$ 은 다음과 같이 보증기간 동안 발생하는 총기대비용 EC_W 와 보전기간 동안에 발생하는 총기대비용 EC_M 의

함으로 구해진다.

$$\begin{aligned} ETC_A(\tau) &= EC_W + EC_M \\ &= c_{w_A} + \int_{w_B+w_A}^{w_B+w_A+\tau} C_m(t)h(t)dt + c_r, \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서, $h(t)$ 는 시스템의 고장률 함수 (hazard rate function)이고, c_{w_A} 는 사용자가 추가적인 보증을 선택하기 위한 비용이고, $C_m(t)$ 은 시스템에 고장이 발생되었을 경우에 이루어지는 최소수리에 대한 비용으로 고장시간 t 의 비감소함수 (non-decreasing function)이며 c_r 은 시스템의 교체비용이다.

만약 사용자가 시스템을 구입할 당시에 추가적으로 제공되는 연장된 보증기간 w_A 를 선택하지 않는 경우에 발생될 총기대비용 $ETC_B(\tau)$ 은 무료보증이 제공되므로 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$ETC_B(\tau) = \int_{w_B}^{w_B+\tau} C_m(t)h(t)dt + c_r. \quad (2.2)$$

식 (2.1)과 (2.2)로부터 사용자가 연장된 보증기간을 선택하는 경우와 그렇지 않고 처음에 기본적으로 제공되는 보증기간만을 갖는 경우에 $(0, \tau]$ 동안에 발생하는 총기대비용에는 다음과 같은 차이가 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} ETC_{Diff}(\tau) &= ETC_A(\tau) - ETC_B(\tau) \\ &= c_{w_A} + \int_{w_B+w_A}^{w_B+w_A+\tau} C_m(t)h(t)dt + c_r - \int_{w_B}^{w_B+\tau} C_m(t)h(t)dt - c_r \\ &= c_{w_A} - \int_{w_B}^{w_B+w_A} C_m(t)h(t)dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

식 (2.3)으로부터 연장된 보증기간의 선택과 관련되어 사용자 측면에서 다음과 같은 유용한 특성을 알 수 있다. 단, 여기서 $q(t) = C_m(t)h(t)$ 이고 $Q'(t) = q(t)$ 이다.

- i) 다음을 만족하는 경우에는 사용자의 추가적인 보증기간 선택 여부에 따라 발생하게 될 총기대비용에는 차이가 없다.

$$c_{w_A} = [Q(w_B + w_A) - Q(w_B)]$$

- ii) 다음을 만족하는 경우에는 사용자는 보증비용을 지불하고 추가적인 보증기간을 제공받는 것이 총기대비용 측면에서 효율적이다.

$$c_{w_A} < [Q(w_B + w_A) - Q(w_B)]$$

- iii) 다음을 만족하는 경우에는 사용자는 추가적인 보증기간을 선택하지 않는 것이 총기대비용 측면에서 효율적이다.

$$c_{w_A} > [Q(w_B + w_A) - Q(w_B)]$$

3. 수치적 예

이 절에서는 시스템의 고장시간이 와이블 분포를 따를 때 연장된 보증이 주어진 교체모형에서 사용자 측면에서 연장된 보증기간을 선택하기 위한 기준을 최소수리 비용이 상수인 경우와 고장시간의 함수인 경우에 대하여 각각 제시하고자 한다.

3.1. 최소수리비용이 상수인 경우

우선, 시스템의 고장분포가 와이블분포 (Weibull distribution)를 따른다고 가정하자. 즉, 시스템의 고장률함수는 $h(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ 이 된다. 그리고 보증기간과 관련된 정보로 $w_B = 0.5$ 이고 $w_A = 0.5$ 라고 가정하고자 하는데, 이는 2.3절에서 일반적인 형태로 유도하였기 때문에 다른 값이 주어지더라도 Table 3.1과 같이 연장된 보증을 선택하기 위한 기준을 결정할 수 있다. 이러한 경우에 추가적으로 제공되는 보증과 관련되어 사용자는 Table 3.1에 나타나 있는 의사결정 기준에 따라 추가보증의 구입 여부를 결정할 수 있다. 특히, Table 3.1에서 $C = c_{w_A}/c_0$ 를 나타내는데 이는 사용자가 추가보증을 구입하기 위하여 지출하여야 하는 비용이 고장이 발생되었을 경우에 지출하여야 하는 수리비용에 대한 상대적인 크기라고 할 수 있다. 예를 들어 Table 3.1과 Figure 3.1에서 $\alpha = 5$ 이고 $\beta = 3$ 인 경우에 추가보증을 구입하기 위하여 지출하여야 하는 비용이 고장이 발생하였을 경우에 지출하여야 하는 단위수리비용의 4.375배 보다 적으면 연장된 보증을 구입하는 것이 기대비용 측면에서 소비자에게 유익하다는 것이다. 또한 α 가 고정되어 있을 때 β 가 증가하면 연장된 보증을 구입하기 위한 소비자 측면의 기준값이 증가하고 있는데, 이는 β 가 증가하면 시스템의 고장률이 증가하기 때문에 상대적으로 많은 비용을 지불해서라도 연장된 보증을 구입하는 것이 소비자에게 비용 측면에서 유리할 수 있다는 의미이다.

Table 3.1 Consumer's optimal policy when minimal repair cost is constant

α	β	$[Q(w_A + w_B) - Q(w_B)]/c_0$	optimal policy
1	2	0.750	$C < 0.750 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 0.750 \rightarrow$ no extended warranty
	3	0.875	$C < 0.875 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 0.875 \rightarrow$ no extended warranty
	4	0.938	$C < 0.938 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 0.938 \rightarrow$ no extended warranty
5	2	3.750	$C < 3.750 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 3.750 \rightarrow$ no extended warranty
	3	4.375	$C < 4.375 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 4.375 \rightarrow$ no extended warranty
	4	4.688	$C < 4.688 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 4.688 \rightarrow$ no extended warranty
10	2	7.500	$C < 7.500 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 7.500 \rightarrow$ no extended warranty
	3	8.750	$C < 8.750 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 8.750 \rightarrow$ no extended warranty
	4	9.375	$C < 9.375 \rightarrow$ purchase extended warranty $C > 9.375 \rightarrow$ no extended warranty

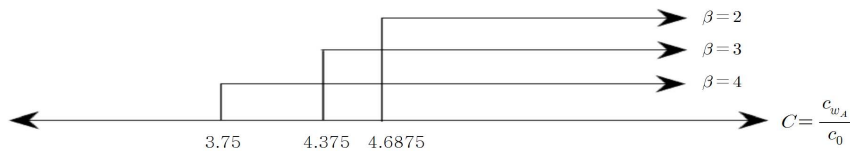


Figure 3.1 Consumer's optimal policy ($\alpha = 5$)

3.2. 최소수리비용이 고장시간의 함수인 경우

3.1절에서는 최소수리의 비용이 고정된 상수라고 가정을 하였으나 이 절에서는 최소수리의 비용이 상수가 아닌 고장시간의 함수라고 가정하고자 한다. 3.1절에서와 마찬가지로 시스템의 고장분포는 와이블분포를 따른다고 가정하고 $w_B = 0.5$ 이고 $w_A = 0.5$ 라고 가정하자. 이 때 최소수리 비용을 Ja 등 (2001)에서 고려한 고장시간의 선형함수 형태인 $C_m(t) = a + bt$ 를 고려하고자 한다. 사용자는 연장된 보증과 관련되어 Table 3.2에 나타나 있는 의사결정 기준에 따라 연장된 보증의 구입여부를 결정할 수 있다.

Table 3.2와 Figure 3.2에서 $\alpha = 5$ 이고 $\beta = 3$ 인 경우에 추가보증을 구입하기 위하여 지출하여야 하는 비용이 22.578 (단위비용)보다 적으면 연장된 보증을 구입하는 것이 기대비용 측면에서 소비자에게 유익하다는 것이다. 또한 α 가 고정되어 있을 때 β 가 증가하면 연장된 보증을 구입하기 위한 소비자 측면의 기준값이 증가하고 있는데, 이는 β 가 증가하면 시스템의 고장률이 증가하기 때문에 상대적으로 많은 비용을 지불해서라도 연장된 보증을 구입하는 것이 소비자에게 비용측면에서 유리할 수 있다는 의미이다.

Table 3.2 Consumer's optimal policy when minimal repair cost is function ($a = 5, b = 1$)

α	β	$[Q(w_A + w_B) - Q(w_B)]$	optimal policy
1	2	4.333	$c_{w_A} < 4.333 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 4.333 \rightarrow$ no extended warranty
	3	5.078	$c_{w_A} < 5.078 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 5.078 \rightarrow$ no extended warranty
	4	5.463	$c_{w_A} < 5.463 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 5.463 \rightarrow$ no extended warranty
	5	19.333	$c_{w_A} < 19.333 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 19.333 \rightarrow$ no extended warranty
5	3	22.578	$c_{w_A} < 22.578 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 22.578 \rightarrow$ no extended warranty
	4	24.213	$c_{w_A} < 24.213 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 24.213 \rightarrow$ no extended warranty
10	2	38.083	$c_{w_A} < 38.083 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 38.083 \rightarrow$ no extended warranty
	3	44.453	$c_{w_A} < 44.453 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 44.453 \rightarrow$ no extended warranty
	4	47.650	$c_{w_A} < 47.650 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 47.650 \rightarrow$ no extended warranty
	5	19.333	$c_{w_A} < 19.333 \rightarrow$ purchase extended warranty $c_{w_A} > 19.333 \rightarrow$ no extended warranty

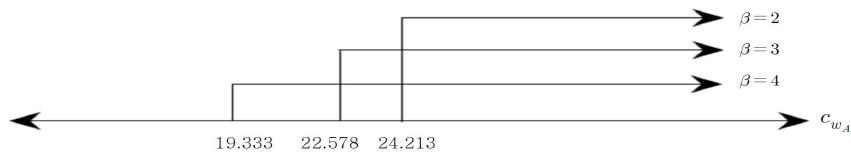


Figure 3.2 Consumer's optimal policy ($a = 5, b = 1, \alpha = 5$)

4. 결론

본 논문에서는 수리가 가능한 시스템에 대하여 연장된 보증이 있는 최소수리보증이 종료된 이후의 교체모형을 제안하였다. 고려된 보증정책은 기본적으로 제공되는 보증기간에서는 무료로 최소수리가 수행되고, 기본보증기간이 종료되고 나면 일정한 비용을 지불하고 보증기간을 일정기간 동안 연장할 수 있는 보증이다. 따라서 이러한 보증정책에 대하여 사용자 측면에서는 일정한 비용을 지불하고 보증기간을 연장할 것인지의 여부가 매우 중요하므로 본 논문에서는 이를 선택하기 위한 기준을 이론적으로 제시하였다. 특히, 시스템에 고장이 발생되었을 경우에 이루어지는 최소수리 비용을 고장시간의 함수로 가정하여 연장된 보증에 대한 특성을 살펴봄으로써 일반적인 형태로 기존의 연구를 확장하였다. 끝으로 수치적 예를 통하여 기본적으로 제공되는 보증기간이 있는 교체모형에서 연장된 보증기간을 사용자 측면에서 선택하기 위한 기준을 구하였으며, 시스템의 형태모수 (β)의 값이 다양하게 변화할 때 연장된 보증기간을 사용자 측면에서 선택하기 위한 기준의 변화를 제시하였다.

참고문헌

- Bouguerra, S., Chelbi, A. and Rezg N. (2012). A decision model for adopting an extended warranty under different maintenance policies. *International Journal of Production Economics*, **135**, 840-849.
- Chien, Y. H. (2008a). A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty. *European Journal of Operational Research*, **186**, 1046-1058.
- Chien, Y. H. (2008b). Optimal age-replacement policy under an imperfect renewing free-replacement warranty. *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 125-133.
- Ja, S., Kulkarni V. G., Mitra, A. and Patankar J. G. (2001). A nonrenewable minimal-repair warranty policy with time-dependent costs. *IEEE Transactions on Reliability*, **50**, 346-352.
- Jung, G. M. and Park, D. H. (2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period. *Reliability Engineering and System Safety*, **82**, 173-185.
- Jung, K. M. (2009). Two PM policies following the expiration of free-repair warranty. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 999-1007.
- Jung, K. M. (2010a). A Bayesian approach to replacement policy following the expiration of non-renewing combination warranty based on cost and downtime. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **21**, 873-882.
- Jung, K. M. (2011a). Preventive maintenance model following the expiration of NFRRW. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 775-784.
- Jung, K. M. (2011b). Replacement model following the expiration of free RRNMW. *The Korean Communications in Statistics*, **18**, 697-705.
- Jung, K. M., Park M. and Park, D. H. (2010). System maintenance cost dependent on life cycle under renewing warranty policy. *Reliability Engineering and System Safety*, **95**, 816-821.
- Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty. *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 220-228.
- Wu, S. and Longhurst, P. (2011). Optimising age-replacement and extended non-renewing warranty policies in lifecycle costing. *International Journal of Production Economics*, **130**, 262-267.
- Yeh, R. H., Chen, M. Y. and Lin, C. Y. (2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty. *European Journal of Operational Research*, **176**, 1678-1686.

Extended warranty policy when minimal repair cost is a function of failure time[†]

Ki Mun Jung¹

¹Department of Informational Statistics, Kyungsung University

Received 23 October 2012, revised 13 November 2012, accepted 22 November 2012

Abstract

In this paper, we determine the expected total cost from the user's perspective for the replacement model with the extended warranty when minimal repair cost is a function of failure time. To do so, we define the extended warranty and assume the replacement model following the expiration of extended warranty from the user's perspective. Especially, we propose the criterion to buy the extended warranty and the numerical examples are presented to illustrate the purpose when the failure time of the system has a Weibull distribution.

Keywords: Expected total cost, extended warranty, minimal repair warranty, replacement model.

[†] This research was supported by Kyungsung University Research Grants in 2012.

¹ Associate professor, Department of Informational Statistics, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea. E-mail : kmjung@ks.ac.kr