한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제24권 제3호 (2011년 8월), 1–12

楊輝의 納音法

Yang Hui's NaYinFa

홍성사 Sung Sa Hong 홍영희 Young Hee Hong 이승온* Seung On Lee

律呂를 가르쳐 주신 心齋 韓泰東 박사님의 米壽를 축하드리며 헌정합니다.

干支는 일상생활과 術數 등에 매우 중요한 역할을 하였다. 음양학파는 역경에 나오는 괘와, 중국의 음계를 결정하는 五音과 十二律을 간지와 연결하였는데 이를 각각 納甲, 納音이라 한다. 沈括은 그의 《夢溪筆談》(1095)에 이들을 인용하였다. 楊輝는 그의 《續古摘奇算法》(1275)에 납음법을 수학적 구조로 얻어낼 수 있음을 보였다. 이를 위하여 楊輝가 함수의 개념을 도입하고, 합동식의 성질과 합성함수를 이용하여 납음법을 완벽하게 정리하였음을 이 논문에서 밝혀낸다. 그의 함수 개념은 수학사에서 가장 빠른 것이다.

It is well known that the sexagesimal cycle(干支) has been playing very important role in ordinary human affairs including astrology and almanacs and the arts of divination(術數). Yin-Yang school related the cycle with the sixty four hexagrams and the system of five notes(五音) and twelve pitch-pipes(十二律), and the processes to relate them are called respectively NaJia(納甲) and NaYin(納音) and quoted in Shen Kuo's Meng qi bi tan(夢溪筆談, 1095). Yang Hui obtained the process NaYin in the context of mathematics. In this paper we show that Yang Hui introduced the concept and notion of functions and then using congruences and the composite of functions, he could succeed to describe perfectly the process in his Xu gu zhai qi suan fa(續古摘奇算法, 1275). We also note that his concept and notion of functions are the earliest ones in the history of mathematics.

Keywords: five notes, twelve pitch-pipes, sexagesimal cycle, NaYin(納音), Shen Kuo(沈括), Meng qi bi tan(夢溪筆談, 1095), Yang Hui(楊輝), Xu gu zhai qi suan fa(續古摘奇算法, 1275), functions, congruences.

---

* 교신저자
MSC: 01A25, 01A35, 05-03, 05A05, 11-03, 11A07
제출일: 6월 9일 수정일: 7월 22일 게재확정일: 7월 25일

1 서론

기원전 20세기경 도입된 干支는 현재까지 여러 분야에서 사용되고 있다. 甲부터 癸까지 10개로 이루어진 天干과 子부터 亥까지 12개로 이루어진 地支의 조합으로 이루어진 60甲子는 歲次, 月建, 日辰과 時를 나타내는데 사용되고 易도 이를 이용하여 나타낸 것을 納甲이라 하였다. 이와 같이 術數와 일상생활을 숫자화 하는데 가장 많이 사용한 것이 干支이다.

한편 기원전 3세기경 궁상각치우(宮商角徵羽)로 된 五音과 황종(黃鐘), 대주(大簇), 고선(姑洗), 유빈(蕤賓), 이칙(夷則), 무역(無射) 등의 六律과 대려(大呂), 협종(夾鐘), 중려(仲呂), 임종(林鐘), 남려(南呂), 응종(應鐘) 등의 六呂를 합하여 十二律이라 하는데 이들은 중국 음계를 정하는 틀을 이루게 된다([2], [14]). 한편 십이율에서 六律은 陽, 六呂는 陰에 대응시키고, 黃鐘, 大呂, 大簇, 夾鐘, . . . , 無射, 應鐘을 차례로 地支에 대응시킨다. 黃鐘, 大呂, . . . , 應鐘은 음력 11월, 12월, . . . , 10월에 대응하고 사계절도 따라서 이들을 이용하여 나타냈다. 한편 宮商角徵羽는 차례로 五行인 土, 金, 木, 火, 水에 대응시켜 音律을 음양오행과 연결시켰다([2], [14]).

오음과 십이율을 조합하여 이루어진 것과 간지를 納甲과 같이 연결한 것을 納音이라 한다. 오행 水, 火, 木, 金, 土를 각각 1(北, 冬), 2(南, 夏), 3(東, 春), 4(西, 秋), 5(中央, 地球)로 대응시켜 순서를 정하였다. 한편 그 氣는 木, 火, 土, 金, 水의 순서로 순환하는 것으로 정하였다([2], [5]). 이 순서는 목성, 화성, 지구, 금성, 수성의 순서와 일치한다. 음양학파들이 정한 납음법은 沈括(Shen Kuo, 1031～1095)이 그의 《夢溪筆談》(Meng qi bi tan, [2])에 인용하였다. 십이율은 전술한 대로 地支로 나타내고, 오음을 金, 火, 木, 水, 土의 순서—이를 氣는 右旋이라 하는 것에 반하여 左旋이라 한다—와 함께 娶妻, 隔八生子, 遁甲三元의 법칙으로 하는 납음법이 《夢溪筆談》에 들어있다.

중국 수학에서 가장 훌륭한 업적을 얻어낸 《測圓海鏡》(Ce yuan hai jing, 1248년 완성, 1282년 간행)과 《益古演段》(Yi gu yan duan, 1259)의 저자 李冶(Li Ye, 1192～1279), 《數書九章》(Shu shu jiu zhang, 1247)의 저자 秦九韶(Qin Jiu Shao, 1202～1261), 《算學啓蒙》(Suan xue qi meng, 1299)과 《四元玉鑑》(Si yuan yu jian, 1303)의 저자 朱世傑(Zhu Shi Jie)과 함께 《詳解九章算法》(Xiang jie jiu zhang suan fa, 1261), 《楊輝算法》(Yang Hui suan fa, 1274～1275)의 저자 楊輝(Yang Hui)는 송, 원대의 4대 수학가로 알려져 있다([3], [6], [7]). 조선 초기부터 《楊輝算法》, 《算學啓蒙》과 함께 安止齋(An Zhi Zhai)의 《詳明算法》(Xiang ming suan fa, 1373)은 산원의 취재과목으로 사용되어 조선 산학의 발전에 큰 영향을 주었다([9], [10]). 宋(北宋 960～1127, 南宋 1127～1279)은 遼(916～1125), 金(1115～1227), 西夏(1038～1227), 元(1271～1368) 등 여러 나라와 함께 유지되어, 11～12세기에 이루어 놓은 수학적 업

적, 특히 방정식론이 실전되었다. 실전된 이론들이 양휘의 저서에 인용되어 송대의 방정식론의 역사를 알 수 있게 되었다([11]). 한편 양휘는 천원술을 이용한 방정식의 구성을 취급하지 않아서 《四元玉鑑細草》(Si yuan yu jian xi cao, 1835)를 저술한 羅士琳(Luo Shi Lin, 1774～1853)이 《續疇人傳》(Xu chou ren zhuan, 1840)에서

> "漢卿在宋元間與秦道古 李仁卿可稱鼎足而三 道古正負開方 仁卿天元如積 皆足上下千古 漢卿又兼包衆有 充類盡量 神而明之 尤超越乎秦李兩家之上"

이라 하여 양휘를 제외한 세 사람을 鼎足而三이라 하였다([4]). 그러나 양휘는 전승에 그치지 않고 독창적인 결과를 얻어내었다. 邵雍(Shao Yong, 1011～1077)과 朱熹(Zhu Xi, 1130～1200)의 주장에 반하여 劉牧(Liu Mu, 1011～1064)은 하도(河圖)와 낙서(洛書)를 바꾸어 나타냈다. 즉 그의 하도는 3차마방진, 낙서는 오행생성도를 나타내는 것으로 유목의 설을 "河九洛十"이라 하는데([5]), 양휘는 그의 《楊輝算法》에 들어있는 《續古摘奇算法》(1275) 상권의 縱橫圖에서 유목을 따라 하도와 낙서를 바꾸어 나타내고, 3차마방진을 구성하는 방법을 들어 "하도"를 수학적으로 얻어낼 수 있음을 드러내었다. 종횡도에 이어 양휘는 손자 문제, 즉 연립합동식을 다루고 이어서 납음법과 일진을 계산하는 방법을 모두 합동식을 이용하여 얻어내었다. 이 부분만 보아도 양휘가 수학적 구조를 정확히 이해하고 있음을 잘 보여주고 있다.

이 논문의 목적은 음양설에 따라 만들어진 납음법도 양휘가 그의 "하도"와 마찬가지로 수학적으로 구성할 수 있음을 보인 것을 드러내는 것이다. 특히 이 과정에서 양휘는 함수의 개념과 표현 방법을 도입하고 합동식과 합성함수의 개념을 이용하여 납음법을 완전히 수학화한 것을 보인다.

논문은 두 절로 나누어, 첫째 절에서 심괄이 인용한 간지의 집합과 오음과 십이율의 쌍으로 이루어진 음률의 집합을 수의 집합으로 나타내고, 이 두 집합 사이에 1대1 대응을 납음법으로 이해하고 《몽계필담》에 들어있는 납음법이 1대1 대응임을 증명한다.

두 번째 절에서는 양휘가 그의 납음법을 얻어낸 과정을 조사한다.

2 干支와 納音法

앞으로 진행될 논의를 위하여 다음을 정의한다. 세 정수 a, b, m에 대하여 $a-b$가 m의 배수가 되면, a, b는 m을 법으로 합동이라 하고 $a \equiv b \mod m$으로 나타낸다. 天干 甲, 乙, 丙, 丁, 戊, 己, 庚, 辛, 壬, 癸를 1, 2, ..., 10, 地支 子, 丑, 寅, 卯, 辰, 巳, 午, 未, 申, 酉, 戌, 亥를 1, 2, ..., 12로 나타내면 간지의 집합은 집합 $\{1, 2, 3, \ldots, 60\}$ 혹은 집합 $\{(m, n) \mid 1 \leq m \leq 10,\ 1 \leq n \leq 12,\ m \equiv n \mod 2\}$와 1대1 대응이 된다.

오음과 십이율의 짝으로 이루어진 음률의 집합은 $\{(m,n) \mid 1 \leq m \leq 5, 1 \leq n \leq 12\}$ 와 1대1 대응이 되므로 간지와 음률의 집합은 위에 도입된 집합들로 대치하기로 한다.

지지와 십이율의 집합은 모두 $\{1,2,\ldots,12\}$ 이므로 이 집합의 항등함수가 1대1 대응이다. 따라서 子, 丑, 寅, 卯, 辰, 巳, 午, 未, 申, 酉, 戌, 亥를 각각 黃鐘, 大呂, 大簇, 夾鐘, 姑洗, 仲呂, 蕤賓, 林鐘, 夷則, 南呂, 無射, 應鐘에 대응시키는 것이 항등함수에 해당된다. 납음은 간지의 집합과 음률의 집합 사이에 1대1 대응을 찾는 것이므로, 간지의 집합에서 오음의 집합 $\{1,2,3,4,5\}$ 로의 함수를 찾아서 지지와 십이율 사이의 항등함수를 함께 사용하여 1대1 대응을 만드는 것이 된다.

沈括은 오음 宮, 商, 角, 徵, 羽의 집합에서 $\{1,2,3,4,5\}$ 의 집합으로 보내는 함수를 다음과 같이 정한다. 宮5, 商4, 角3, 徵2, 羽1로 대응시키고, 이를 오행으로 변환하면 宮土, 商金, 角木, 徵火, 羽水의 대응이 얻어진다. 오행의 氣는 木, 火, 土, 金, 水의 순서로 순환하는 것으로 정하고 이를 우선(右旋)이라 하는데 반하여 音은 金, 火, 木, 水, 土, 즉 商, 徵, 角, 羽, 宮의 순서로 순환하는 것으로 정하고 이를 좌선(左旋)의 법칙이라 한다. 黃鐘, 大簇, 姑洗, 蕤賓, 夷則, 無射 등의 六律은 양(陽)에 대응하고, 大呂, 夾鐘, 仲呂, 林鐘, 南呂, 應鐘 등의 六呂는 음(陰)에 대응한다. 따라서 위의 지지와 십이율 사이의 항등함수는 子, 寅, 辰, 午, 申, 戌이 양이고, 丑, 卯, 巳, 未, 酉, 亥가 음인 것과 십이율의 음양과 일치하는 것으로 이해하였다.

같은 音은 양과 음의 율을 짝으로 가지는 것으로 정하였는데, 이를 취처(娶妻)의 법칙이라 하였다. 격팔생자(隔八生子)의 법칙은 간지의 집합 $\{1,2,3,\ldots,60\}$ 의 두 원소 m,n 에 대하여 $m \equiv n \mod 8$ 이면 같은 音에 대응한다는 것이다. 따라서 甲子와 壬申은 같은 音을 대응시킨다. 둔갑삼원(遁甲三元)의 법칙은 隔八生子의 법칙을 두 차례 적용한 다음 左旋의 법칙에 따라 다음 音을 대응시키는 것을 뜻한다. 이 때 세 원을 仲, 孟, 季를 붙여 金仲, 金孟, 金季 등으로 나타낸다. 따라서 이들 법칙을 함께 적용하면 甲子(1), 壬申(9), 庚辰(17)이 金仲, 金孟, 金季에 대응되고, 이어서 戊子(25), 丙申(33), 甲辰(41)이 火仲, 火孟, 火季가 된다. 娶妻의 법칙에 따라 乙丑(2), 癸酉(10), 辛巳(18)도 金仲, 金孟, 金季가 된다. 자연수 m,n 에 대하여 $m \equiv n \mod 60$ 이면 두 자연수 m,n 은 같은 간지에 대응하는 것으로 이해하여 壬子(49), 庚申(57), 戊辰($5 \equiv 57+8 \mod 60$)이 木仲, 木孟, 木季가 된다. 이 방법을 土까지 계속하면 오음의 각각에 대하여 6개의 간지가 사용되어 모두 30개의 간지에 오음을 대응시키게 된다. 나머지 30개의 간지는 甲午(31)부터 시작하여 같은 방법을 적용하면 나머지 모든 간지에 오음이 대응하게 된다.

沈括의 납음법이 타당함을 보이기 위하여 필요한 사실은 합동식 $ax \equiv b \mod m$ 이 해를 가지기 위한 필요충분조건은 a,m 의 최대공약수가 b 의 약수인 것이다([13]). 정수

전체로 이루어진 환 $\mathbb{Z}$에서 m을 법으로 하는 합동관계는 상환 $\mathbb{Z}/[m]$을 구성하는 동치관계이다. 간지의 집합은 $\mathbb{Z}/[60]$이다. 이 때 정수 a의 동치류를 $[a]$로 나타내자. 甲子에서 시작하여 나타나는 간지는 상환 $\mathbb{Z}/[60]$의 부분집합 $\{[8k+1] \mid k \in \mathbb{Z}\}$이고, 마찬가지로 乙丑에서 시작하여 나타나는 간지는 $\{[8k+2] \mid k \in \mathbb{Z}\}$이다. 합동식 $8n+1 \equiv 8m+2 \mod 60$의 해는 존재하지 않는다. 만일 해가 있다면 $n-m$은 $8x \equiv 1 \mod 60$의 해가 되는데 8과 60의 최대공약수 4는 1의 약수가 아니기 때문에 모순이다. 따라서 위의 두 집합은 공통부분이 없다. 같은 방법으로 甲午(31)와 乙未(32)에서 시작하여 얻어지는 간지들도 공통부분은 없다. 또 甲子와 甲午에서 시작하여 얻어지는 간지들은 각각 $[8k+1], [8k+31]$ 형태인데 이들도 공통부분은 없다. 합동식 $8n+1 \equiv 8m+31 \mod 60$도 $8x \equiv 30 \mod 60$이 해를 갖지 않기 때문이다. $8n+1 \equiv 8m+1 \mod 60 (0 \le n, m \le 14)$은 해를 갖지 않기 때문에 甲子에서 얻어지는 간지들도 모두 서로 다르다. 같은 이유에서 乙丑, 甲午, 乙未에서 얻어지는 간지들도 모두 서로 다르다. 따라서 이들 네 간지에서 시작하여 얻어지는 간지들은 모두 15개이고 서로 공통부분이 없으므로 左旋, 娶妻, 隔八生子, 遁甲三元의 방법으로 얻어지는 간지는 간지 전체를 이루게 된다.

간지의 집합에서 오음의 집합으로의 함수 $f : \{1, 2, \ldots, 60\} \to \{1, 2, \ldots, 5\}$는 $f(n)$을 위의 방법으로 얻어진 값으로 정의하자. 십이율의 집합 $\{1, 2, \ldots, 12\}$는 상환 $\mathbb{Z}/[12]$로 대치하여도 좋다. 함수 $g : \{1, 2, \ldots, 60\} \to \mathbb{Z}/[12]$는 $g(n) = [n]$으로 정의한다.

함수 $h : \{1, 2, \ldots, 60\} \to \{1, 2, \ldots, 5\} \times \mathbb{Z}/[12]$는 $f \sqcap g$ 즉 $h(n) = (f(n), g(n))$으로 정의하자. h가 단사함수임을 보이기 위하여 $h(n) = h(m)$이라고 가정하면 $f(n) = f(m)$, $g(n) = g(m)$이다. 甲子부터 시작하여 얻어지는 경우에 정해진 간지인 경우는 전자에서 $n \equiv m \mod 8$이고, 후자에서 $n \equiv m \mod 12$를 얻는다. 따라서 $n \equiv m \mod 24$인데 遁甲三元 법칙에 따라 $n = m$이 되고, 마찬가지로 甲午부터 시작하여 얻어지는 경우도 $n = m$을 얻는다. 한편 n, m이 각각 甲子와 甲午부터 얻어지는 경우라 하면, $n \equiv m \mod 30$, $n \equiv m \mod 38$, $n \equiv m \mod 46$중의 하나이고 $n \equiv m \mod 12$를 만족하여야 하므로 어떤 경우도 $n = m$을 얻는다. 따라서 함수 h는 단사함수이다. 한편 단사함수 h의 정의역, 치역은 각각 $\{1, 2, \ldots, 60\}$, $\{1, 2, \ldots, 5\} \times \mathbb{Z}/[12]$이고 그들의 基數는 모두 60인 유한집합이므로, h는 전단사함수이다. 따라서, h는 간지의 집합과 음률의 집합사이의 1대1 대응, 즉 左旋, 娶妻, 隔八生子, 遁甲三元의 방법에 의하여 얻어지는 납음법이 된다.

娶妻는 陰陽, 隔八生子는 八卦, 遁甲三元은 隔八生子와 함께 24를 한 주기로 순환하는 것을 나타내고, 또 遁甲三元은 각 지지가 간지에서 다섯 차례 나타나는데 대응되는 오행이 모두 金, 水, 火, 土, 木을 순환하며 나타나게 한다. 이 사실은 위의 함수 h가 전사인 것을 뜻하는데, 정의역과 치역이 같은 기수를 가지는 유한집합이므로, h는

전단사함수이다. 이 방법으로 h가 납음이 되는 것을 보여도 좋다. 또 甲子부터 시작하는 대응은 子丑, 辰巳, 申酉의 짝에서, 甲午부터 시작하는 대응은 寅卯, 午未, 戌亥의 짝에서 나타난다. 따라서 음양학파의 논리로 娶妻, 隔八生子, 遁甲三元의 법칙은 어느 정도 이해될 수 있지만, 左旋에 대한 논리적 이유는 찾을 수 없다. 氣의 右旋에 반하여 左旋을 설명하지만 氣의 운행을 거꾸로 가는 것도 아니다. 이 납음법의 단점은 특정한 간지를 보고 대응되는 것을 바로 알 수 없는 것이다.

십이율은 음조를 정하는 피리로 黃鐘은 길이가 9치(寸), 구멍의 넓이가 9푼(分)인 피리(管)로 정하고, 黃鐘부터 시작하여 삼분손익(三分損益)의 법칙에 따라 그 길이를 정하였다. 이 때는 隔八生子를 사용하지 않고 12를 법으로 하고 7씩 더해나가는 방법을 사용한다. 黃鐘(1), 林鐘(8), 大簇(3), 南呂(10), 姑洗(5), 應鐘(12), 蕤賓(7), 大呂(2), 夷則(9), 夾鐘(4), 無射(11), 仲呂(6) 의 순서로 나타나게 되어 차례로 양, 음이 번갈아 나타난다. 양에서 음으로 바뀌는 경우 음의 피리의 길이는 陽의 피리의 길이에 $2/3$(損)를 곱하고, 반대의 경우는 $4/3$(益)를 곱하는 방법으로 피리의 길이를 정하였다([2], [8], [12]). 따라서 林鐘의 길이는 6치이고 大簇의 길이는 8치이다. 7이 홀수이므로 이를 더해 나가면 짝수(陰)와 홀수(陽)가 번갈아 나오는 것도 있고, 합동식 $7x+1 \equiv n \mod 12$는 모든 $n(1 \leq n \leq 12)$에 대하여 단 한 개의 해를 가지므로 십이율의 음조가 모두 정해질 수 있기 때문에 이 방법을 택한 것으로 추정된다. 7 대신 1, 5, 11($\equiv -1 \mod 12$)도 가능하다.

간지의 집합을 $S = \{(m,n) \mid 1 \leq m \leq 10, 1 \leq n \leq 12, m \equiv n \mod 2\}$, 음률의 집합을 $\mathbb{Z}/[5] \times \{1,2,\ldots,12\}$로 대치하고 상함수의 제한함수 $q : \{1,2,\ldots,10\} \to \mathbb{Z}/[5]$와 집합 $\{1,2,\ldots,12\}$의 항등함수 i의 곱함수

$$q \times i : S \to \mathbb{Z}/[5] \times \{1,2,\ldots,12\}$$

를 만들면 조건에서 쉽게 이 함수가 1대1 대응이 됨을 보일 수 있다. 이 방법이 가장 간단한 납음법으로 볼 수 있지만, 전술한 술수와 음양 이론과 연결시키는 것이 전통이므로 이 방법은 받아들여지지 않을 것이다.

3 楊輝의 納音起例

이 절에서는 전절에서 취급한 납음법을 양휘가 적절한 함수를 도입하여 수학적으로 얻어낸 것을 밝힌다. 양휘의 이론은 그의 《續古摘奇算法》 상권에 六十甲子內音起例라는 제목으로 들어있다. 그의 이론을 적절하게 분석하기 위하여 天干, 地支를 각각 $\mathbb{Z}/[10]$, $\mathbb{Z}/[12]$로 택한다. 두 상환의 원소, 즉 정수 n의 동치류 $[n]$을 간단히 n으로 표시하고,

집합 $\mathbb{Z}/[10]$, $\mathbb{Z}/[12]$를 $\{1,2,\ldots,9,10\}$, $\{1,2,\ldots,11,12\}$로 나타낸다. 그러나 이 두 집합의 원소들의 연산은 각각 $10, 12$를 법으로 하므로, 두 원소 $5, 8$을 천간의 원소인 경우는 $5+8=3$, 지간의 원소로 보는 경우는 $5+8=1$이다. 이 절에서 간지의 집합은 $\mathbb{Z}/[10]\times\mathbb{Z}/[12]$의 부분집합 $\{(m,n)\mid 1\le m\le 10, 1\le n\le 12, m\equiv n \mod 2\}$를 의미한다.

천간을 위하여, 함수 $c:\{1,2,\ldots,10\}\to\{9,8,7,6,5\}$를 아래와 같이 정의한다.

$$c(1)=c(6)=9,\quad c(2)=c(7)=8,\quad c(3)=c(8)=7,$$
$$c(4)=c(9)=6,\quad c(5)=c(10)=5.\quad \text{(그림 1 참조)}$$

A. 천간의 함수는 다음 성질을 만족한다.

i) $m\equiv n \mod 5$이면, $c(n)=c(m)$.

ii) $c(n)+n\equiv 0 \mod 5$.

iii) $c(n+8)-c(n)\equiv -3\equiv 2 \mod 5$.

i), ii)는 함수 c의 정의에서 명백하고, ii)에서 $c(n)\equiv -n \mod 5$가 되어

그림 1: 납음

$$c(n+8)-c(n) \equiv c(n+3)-c(n) \equiv -n-3-(-n) \equiv -3 \mod 5$$

이므로 iii)이 성립한다.

지지를 위하여, 함수 $e:\{1,2,\ldots,12\} \to \{9,8,7,6,5,4\}$를 아래와 같이 정의한다.

$$e(1)=e(7)=9, \quad e(2)=e(8)=8, \quad e(3)=e(9)=7,$$
$$e(4)=e(10)=6, \quad e(5)=e(11)=5, \quad e(6)=e(12)=4. \quad \text{(그림 1 참조)}$$

B. 지지의 함수는 다음 성질을 가진다.

i) $m \equiv n \mod 6$이면, $e(n)=e(m)$.

ii) $e(n)+n \equiv 10 \equiv 4 \equiv -2 \mod 6$.

iii) $e(n+8)-e(n) \equiv -2 \equiv 4 \mod 6$.

i), ii)는 함수 e의 정의에서 명백하고, ii)에서 $e(n) \equiv -n+4 \mod 6$이 되어

$$e(n+8)-e(n) \equiv e(n+2)-e(n) \equiv -n-2+4-(-n+4) \equiv -2 \mod 6$$

이므로 iii)을 얻는다.

위의 두 함수는 모두 정의역과 치역이 유한집합이고 이런 함수의 개념은 수학사에서 가장 이른 것이고, 또 이를 나타내는 방법, 즉 정의역의 원소에 대응되는 함수값을 빈 원속에 나타내고 이를 곡선으로 연결한 것은 현재도 사용할 수 있는 훌륭한 것이다(그림 1 참조).

두 함수의 함수값을 정한 것은 음양이론에 의한 것으로 天干의 음양과 成數 $\{9,8,7,6,5\}$의 대응은 자연스러운데, 地支는 이를 확장하여 $\{9,8,7,6,5,4\}$와 대응시킨 것도 양휘의 사고가 매우 수학적임을 알 수 있게 한다.

전절에서 취급한 납음법에서 隔八生子와 遁甲三元과 함수 c,e의 관계를 알아보자. 甲子부터 시작하여 차례로 8을 더한 천간과 지지의 c,e의 함수값은 위의 A, B에 의하여 다음과 같다.

$$c(n) \ : \ 9,6,8; \quad 5,7,9; \quad 6,8,5; \quad 7,9,6; \quad 8,5,7.$$
$$e(n) \ : \ 9,7,5; \quad 9,7,5; \quad 9,7,5; \quad 9,7,5; \quad 9,7,5.$$

娶妻로 나타나는 간지를 乙丑 $((2,2))$부터 시작하여 차례로 8을 더한 것들의 함수값은 다음과 같다.

$$c(n) \ : \ 8,5,7; \quad 9,6,8; \quad 5,7,9; \quad 6,8,5; \quad 7,9,6.$$
$$e(n) \ : \ 8,6,4; \quad 8,6,4; \quad 8,6,4; \quad 8,6,4; \quad 8,6,4.$$

한편, 甲子$((1,1))$, 甲午$((1,7))$가 납음을 정하는 두 방법의 시작이었는데, 子(1), 午(7)이므로, $1 \equiv 7 \mod 6$이 되어, $e(1) = e(7)$이다. 따라서 甲子와 甲午, 이들의 娶妻인 乙丑$((2,2))$, 乙未$((2,8))$에 대응되는 c, e의 함수값도 모두 같고 이들에 대응되는 隔八生子와 遁甲三元에 대한 함수값도 위의 두 경우와 완전히 일치한다. 위의 모든 방법이 五音을 대응하는 방법이므로 5를 법으로 계산하여야 한다. 함수 c의 값은 5를 법으로 된 성질 A를 만족하지만, 함수 e는 6을 법으로한 법칙을 따라 결정된 값이다. 그러나 遁甲三元의 한 순환 안에는 차례로 2가 줄지만 다음 순환으로 넘어가면서 4가 늘어난다. $-2 \equiv 4 \mod 6$이지만 이 두 수는 5를 법으로 합동은 아니다. 따라서 한 순환내에서 c의 함수값은 각각 5를 법으로 하여 2가 증가하고, e의 함수값은 5를 법으로 2가 감소한다. 따라서 두 함수 c, e의 함수값의 합은 같은 순환 내에서 일정하다.

甲子부터 시작하여 두 함수의 값의 합을 각 순환 별로 나타내면 차례로 3, 4, 5, 1, 2가 된다. 예를 들어 첫 번째 순환의 경우 $c(1) + e(1) = 9 + 9 \equiv 3 \mod 5$이다. 같은 방법으로 이들의 娶妻의 경우 두 함수의 값의 합은 차례로 1, 2, 3, 4, 5이다. 따라서 한 순환 안에서 이들 두 함수의 함수값의 합의 합도 모두 같고 그 값은 5를 법으로 4, 1, 3, 5, 2가 된다. 甲子부터 시작하여 隔八生子, 遁甲三元에 의하여 생기는 다섯 개의 순환을 차례로 순환 I(甲子, 壬申, 庚辰), II(戊子, 丙申, 甲辰), III(壬子, 庚申, 戊辰), IV(丙子, 甲申, 壬辰), V(庚子, 戊申, 丙辰)라 하자. 娶妻의 경우는 순환 I', II', III', IV', V' 이라 하자.

정리. 함수 c, e는 다음과 같은 성질을 가진다.

i) 隔八生子, 遁甲三元에 의하여 얻어지는 순환 I, II, III, IV, V에 대하여, 같은 순환에 속하는 간지 (m, n)에 대하여 $c(m) + e(n)$의 값은 5를 법으로 같다. 그 합은 순환 I, II, III, IV, V에 대하여 차례로 3, 4, 5, 1, 2이다.

ii) 순환 I', II', III', IV', V' 에 대하여, 같은 순환에 속하는 간지 (m, n)에 대하여 $c(m) + e(n)$의 값은 5를 법으로 같고, 그 합은 차례로 1, 2, 3, 4, 5이다.

iii) 순환 I, II, III, IV, V에 대하여, 같은 순환에 속하는 간지 (m, n)과 그의 취처 $(m+1, n+1)$에 대하여 $\{(c(m)+e(n))+(c(m+1)+e(n+1))\}$의 값은 5를 법으로 같고, 그 합은 차례로 4, 1, 3, 5, 2이다.

iv) 甲午부터 시작하여 隔八生子, 遁甲三元에 의하여 얻어지는 순환에 대하여도 위의 i), ii), iii)은 같은 결과를 얻는다.

양휘는 위의 정리를 이용하여 천간과 지지를 모두 사용하여 납음법을 얻어낼 수 있음을 보였다. 60갑자에서 홀수에 해당하는 간지 (m, n)과 바로 다음에 나오는 짝수에 해

당하는 간지 $(m+1, n+1)$을 짝으로 하여 천간 함수 c와 지지 함수 e를 사용하여

$$(c(m)+e(n))+(c(m+1)+e(n+1))$$

을 계산하여 그 값에 따라 宮(5), 商(4), 角(3), 徵(2), 羽(1)를 대응하고, 地支에 따라 十二律을 대응하면, 전절에서 언급한 것과 같은 이유로 이 대응은 간지와 음률 사이에 1대1 대응이 되어 납음법이 된다.

전절에 언급한 납음법을 얻기위하여 양휘는 함수 $t:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$를 다음과 같이 정의한다:

$$t(1)=2,\ t(2)=5,\ t(3)=3,\ t(4)=4,\ t(5)=1.$$

즉 金(4, 宮)과 木(3, 角)은 그대로, 水(1)는 火(2, 徵), 土(5)는 水(1, 羽), 火(2)는 土(5, 宮)로 옮기는 치환을 정한다. 양휘는 그의 방법으로 납음을 구한 후 함수 t를 시행하면 전절에서 얻어낸 납음법이 얻어짐을 보였다. 양휘는 이 변환을 다음과 같이 설명하였다.

> "金木自有聲 用木三金四本數 水遇土而有聲 火遇水而有聲
>
> 土遇火煅則有聲 故火用水數一 水用土數五 土用火數二"

위에서 양휘는 오행을 物性을 나타내는 것으로 이해하고 있다.

전절에서 논한 납음법은 간지의 순서 구조를 중심으로 만들어진 것에 반하여 양휘의 납음법은 간지를 천간과 지지로 나누어 대수적으로 접근하여 만들어진 것이다. 또 전통적인 방법은 간지 甲子와 甲午에서 출발하여 같은 과정을 두 번 거쳐야 하지만 양휘의 방법은 한 가지 과정으로 얻어진다. 또 순서 구조에 의하여 구한 납음법은 특정한 간지의 납음을 구하기 위하여 그 앞의 과정을 모두 시행하여야 하지만, 양휘의 방법은 地支가 홀수인 경우는 바로 다음 간지를 택하고, 짝수인 경우는 바로 전 간지를 택하여 위의 정리의 iii)을 계산하여 바로 납음을 찾을 수 있다.

양휘는 정리의 iii)을 사용한 납음법만 언급하였지만, 실제로 정리의 i)을 이용하여도 같은 이유로 납음법을 얻어낼 수 있다. 다만 이 경우 전절의 납음법을 얻어내려면 위의 함수 대신에, 순환 (2, 5, 3, 4), 즉 $t(1)=1,\ t(2)=5,\ t(3)=4,\ t(4)=2,\ t(5)=3$을 택하면 된다. 마지막으로 娶妻를 이용하지만 정리의 ii)를 이용하여도 납음법을 얻을 수 있다. 이들은 모두 서로 다른 납음법이다.

4 結論

중국 수학의 원류를 이룬 《九章算術》(Jiu zhang suan shu, [1], [6], [7])은 劉徽(Liu Hui)의 주에 의하여 완벽한 산서가 되고, 서양 수학이 Euclid의 《Elements》에 기초를 두고 발전해 온 것처럼 동양 수학은 《九章算術》에 기초를 두고 발전하였다. 유휘의 구장산술 서문은 다음과 같이 시작한다.

> "昔在庖犧氏始畫八卦 以通神明之德 以類萬物之精
> 作九九之術 以合六爻之變
> 暨于黃帝神而化之 引而伸之 于是建歷紀 協律呂 用稽道原
> 然後兩儀四象精微之氣可得而效焉 記稱隸首作數 其詳未之聞也
> 按周公制禮而有九數 九數之流 則 九章是矣"

동양 수학은 伏羲(=庖犧)가 만든 팔괘를 통하여 모든 일을 이해하게 되고, 또 이는 그가 만든 九九之術 즉 수학을 통하여 설명할 수 있고, 曆法 즉 천문학, 律呂 즉 음악의 원리도 모두 이에 기초한다고 주장하였다. 이 주장은 모든 수학자들이 수학을 연구하는 이유로 들고 있다.

남송의 楊輝는 《九章算術》과 11~12세기에 발전된 수학을 전승하여 수학사에 중요한 사료를 남겼다. 한편 그는 전승에 그치지 않고 새로운 수학적 관점을 가지고 전통적인 수학을 이해한 수학자이다. 이 부분이 강조된 그의 저서가 《續古摘奇算法》(1275)이다. 먼저 양휘는 邵雍, 朱熹의 주장에 반하는 劉牧의 河九洛十을 택하고, 또 象數學에서 중요하게 인용되는 洛書가 단순한 수학으로 구성되었음을 나타내는 것으로 《續古摘奇算法》을 시작한다. 전술한 간지와 律呂를 연결한 음양학파의 納音法도 그 구조는 완전히 수학적으로 구성할 수 있음을 보인 것이 양휘의 納音起例이다. 이를 위하여 양휘는 함수의 개념을 도입하고, 이 함수와 합동식으로 만들어진 동치관계의 성질을 사용하여 그가 수학을 구조적으로 접근하고 있음을 잘 보여 주고 있다. 그의 함수 개념은 합성함수까지 포함하고 있고, 납음과 같은 복잡한 상황을 함수의 성질에 의하여 수학적으로 그 구조가 간단하게 얻어진다는 것을 보여주는 중요한 전기를 만들었다. 그러나 이들이 제대로 전승되지 못하여 수학에서 가장 중요한 함수 개념이 동양 수학에서 잊히게 된 것은 매우 안타까운 일이다.

참고 문헌

1. 郭書春, 《九章算術》譯注, 上海古籍出版社, 2007.
2. 沈括, 《夢溪筆談》, 臺灣商務印書館, 1967.
3. 吳文俊 主編, 《中國數學史大系》, 第一券 – 第八卷, 副卷, 北京師范大學出版社, 1998.
4. 阮元, 《疇人傳》, 臺灣商務印書館, 1968.

5. 朱熹, 《易學啓蒙》, 金珍根 옮김, 청계출판사, 2008.
6. 《中國科學技術典籍通彙》 數學卷 全五卷, 河南教育出版社, 1993.
7. 《中國歷代算學集成》, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
8. 洪大容, 《籌解需用》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 3卷, 驪江出版社, 1985.
9. 김창일, 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學者 洪正夏의 系譜, 한국수학사학회지, 23(2010), No. 3, 1–20.
10. 홍성사, 홍영희, 朝鮮의 算學訓導와 算學敎授, 한국수학사학회지, 19(2006), No. 3, 1–20.
11. 홍성사, 홍영희, 김영욱, 劉益과 洪正夏의 開方術, 한국수학사학회지, 24(2011), No. 1, 1–13.
12. 洪正夏, 《九一集》, 韓國科學技術史資料大系, 數學編, 2卷, 驪江出版社, 1985.
13. D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, fifth ed. McGraw-Hill, 2002.
14. Fung Yu-Lan(馮友蘭), *A History of Chinese Philosophy*(中國哲學史), Vol. I, II, tr. D. Bodde, Princeton University Press, 1952.

홍성사 서강대학교 수학과
Department of Mathematics, Sogang University
E-mail: sshong@sogang.ac.kr

홍영희 숙명여자대학교 수학과
Department of Mathematics, Sookmyung Women's University
E-mail: yhhong@sookmyung.ac.kr

이승온 충북대학교 수학과
Department of Mathematics, Chungbuk National University
E-mail: solee@chungbuk.ac.kr