

다차원 Copula 함수를 이용한 VaR 추정

홍종선¹ · 이원용²

¹성균관대학교 통계학과, ²성균관대학교 응용통계연구소

(2011년 6월 접수, 2011년 9월 채택)

요약

VaR는 투자목적이나 위험관리수단으로 시장위험을 측정하는 방법으로 현실생활에서는 다변량 분포에 대하여 추정을 필요로 한다. 본 연구는 다변량 확률변수들의 분포를 생성하기 위하여 Copula 함수를 사용한다. 확률변수들의 종속구조를 exchangeable Copula, fully nested Copula, partially nested Copula로 구별하여 토론한다. 국내의 네 종류의 산업체의 수익률 자료를 실증예제로 하여 Clayton, Gumbel, Frank Copula 함수가 포함된 Archimedean Copula 함수의 모수들을 세 종류의 종속구조를 이용하여 구하고, 이 자료에 적합한 Copula 함수와 각 함수에 대응하는 VaR를 추정하고 비교탐색한다.

주요용어: 다변량, 수익률, 생성함수, 위험, 종속성.

1. 서론

금융기관들이 직면하는 위험의 정도를 파악하기 위해 고안된 VaR(Value at Risk)는 간결하면서도 종합적으로 위험을 평가한다는 측면에서 최근 금융기관뿐만 아니라 일반기업에서도 널리 활용되고 있는 추세이다. 파생상품(derivative product) 시장이 급속도로 성장하고 외환위기의 영향으로 자산가격이 급격하게 변동함에 따라 시장위험을 어떻게 관리할 것인가에 대한 관심이 세계적으로 고조되고 있다. 이에 따라 국제결제은행(Bank for International Settlements; BIS)에서도 신 BIS 기준을 통해 금융기관이 독자적으로 개발한 내부모형을 사용하는 것을 허용함으로써 금융기관들로 하여금 시장위험을 정확하게 측정하려는 노력을 활성화시키고 있고, 이러한 위험관리수단으로 금융기관들이 가정 선호하는 기법이 VaR이다.

VaR는 금리, 주가, 환율 등의 기초적 시장가격들에 대한 주어진 신뢰수준에서 목표기간에 걸쳐 발생할 수 있는 최대손실금액(largest losses amount)을 말한다 (Jorion, 1997). VaR의 큰 장점은 여러 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체의 위험을 최대손실액이라는 하나의 수치로 나타내므로 해당 금융자산의 위험의 크기를 한눈에 알아볼 수가 있다. 현재까지 VaR를 추정하기 위하여 많은 방법론과 다양한 기법들이 제시되어 있지만 크게 세 가지의 측면으로 나누어 생각할 수 있다. 모수적 방법과 비모수적 방법 그리고 전통적인 방법과 극단치 이론(extreme value theory)을 이용한 방법, 마지막으로 미래 현금흐름(cash flow)의 분포 측면에서 부분가치 평가법(local valuation)과 완전가치 평가법(full valuation)으로 구분한다.

일반적으로 VaR를 측정하기 위해 금융자산 수익률의 확률분포를 정규분포로 가정하는데 이 경우에는 평균과 분산만 알면 분포의 특성이 완전히 파악될 수 있으므로 VaR를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 금융

¹교신저자: (110-745) 서울 종로구 명륜동 3-53, 성균관대학교 경제학부 통계학전공, 교수.

E-mail: cshong@skku.ac.kr

자산의 수익률분포는 꼬리 부분이 정규분포에 비해 훨씬 두터운 형태를 띠고 있기 때문에 정규분포를 가정한 VaR의 측정은 실제의 VaR를 과소평가하는 경향이 있다 (Zangari, 1996; Li, 1999; 홍종선과 권태완, 2010; 등 참조).

지금까지 VaR 추정에는 대부분 한 종류 또는 두 종류의 금융자산에 대하여 연구되었다. 현실생활에서는 국내 전체 산업에 대하여나 특정 회사에 포함된 여러개의 산업에 대한 VaR를 추정해야 하는 경우인 즉 다변량 분포에 대한 VaR를 추정해야 할 필요성이 증가되었다.

대부분의 재무자료의 경우 분포형태가 비대칭적이면서 꼬리부분이 두터운 비정규성의 형태를 가지며 또한 극단값에 동일한 방향을 나타내는 경향이 강하다. 따라서 이러한 분포의 꼬리 부분을 다루는 VaR의 경우에 상관관계수에 의해 종속성 구조를 반영하기 보다는 Copula 함수를 사용하여 그 종속성 구조를 파악하는 것이 타당하다 (Embretchts 등, 1999).

Sklar (1959)에 의해 제시된 Copula 함수는 여러 확률변수들 사이의 복잡한 종속성(dependency) 구조를 파악하기 위한 방법이며 개별 밀도함수 사이의 관계와 결합분포와의 관계를 설명하는 방법으로 확률변수들의 상관성을 설명할 수 있는 확률 도구로 활용되었다. Copula 함수가 재무금융 분야에서 복잡한 종속성 구조를 고려하기 위해 1999년부터 많이 활용되며 최근에 활발히 발전되었다 (Umberto와 Walter, 2004; Nelson, 2006; 등 참조). Copula 함수는 크게 elliptical Copula와 archimedean Copula로 구분되어진다. elliptical Copula는 Gaussian Copula와 student t Copula로 구분되어지며 금융재무 분야에서 매우 인기가 있었으나 수익률분포의 두꺼운 꼬리 부분을 잘 설명해주지 못한다는 단점이 있다 (Mashal와 Zeevi, 2002; Dobric와 Schmid, 2005; 등 참조). archimedean Copula는 Clayton, Gumbel, Frank Copula로 구분되며 각 고유의 생성함수(generator)를 갖고 있으며 이를 통하여 종속적 구조를 유용하게 표현할 수 있다. 재무금융자료에 대해 어떠한 Copula 함수를 적용하느냐에 따라 시뮬레이션 결과가 다르게 나올 수 있으므로 Copula 함수의 선택은 매우 중요하다. Copula 함수를 이용한 VaR 추정 연구로는 Longin (2001), Bae와 Karolyi (2003), Breymann (2003), 홍종선과 이재형 (2011) 등의 연구 외에 한국의 주가수익률에 대한 연구로는 student t Copula를 이용한 김명직과 신성환 (2003)과 Gaussian과 student t Copula 함수를 이용한 황수영 (2005) 등이 있다. 본 연구의 핵심은 기존에 연구된 exchangeable archimedean Copula(EAC)는 n 차원의 다변량 분포를 하나의 모수가 포함된 하나의 종속구조로 표현되었지만 이는 결합확률분포의 종속구조를 표현하는데 한계가 있어 이후 개발된 $(n - 1)$ 개의 모수를 가지며 다양한 종속구조를 표현할 수 있는 full nested archimedean Copula(FNAC)와 partial nested archimedean Copula(PNAC)에 대한 VaR를 측정한다.

본 연구에서는 다변량 수익률 자료에 적합한 세 종류의 archimedean Copula 함수를 추정하고, 추정된 Copula 함수를 이용하여 다변량 자료의 VaR를 추정한다. Copula 함수를 이용해 VaR를 추정하면 여러 종목을 통합한 산업의 VaR를 측정할 수 있고, 추정된 VaR를 통해 투자자는 다양한 정보를 가지고 투자를 할 수 있다.

본 연구의 2절에서는 Copula 함수의 기본적인 설명과 함께 네변량일 때를 가정하여 FNAC의 12가지 종속적 구조 그리고 PNAC의 세가지 종속적 구조에 대해 알아보며 모수적 그리고 비모수적 모수추정 방법에 대하여 설명한다. 3절에 대해서는 Copula 함수를 이용한 수익률분포의 적합과 VaR 추정방법을 제안하는데 n 차원의 다변량인 경우를 4차원인 경우로 대체하여 Copula 함수의 확률난수 추출방법과 네변량 분포로부터 VaR를 추정하는 방법을 소개한다. 4절에서는 한국의 주식수익률 자료를 수집한 실증예제를 통해 다변량 VaR를 추정하여 토론하며 마지막으로 5절에서는 추정된 VaR를 가지고 결론을 유도한다.

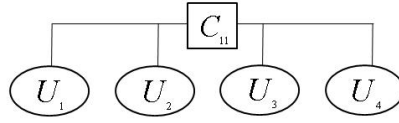


그림 2.1. Exchangeable archimedean Copula의 종속구조

표 2.1. Archimedean Copula의 생성함수와 모수의 조건

	Clayton Copula	Frank Copula	Gumbel Copula
생성함수 $\varphi(u)$	$u^{-\theta} - 1$	$\ln \left(\frac{\exp(\theta u) - 1}{\exp(\theta) - 1} \right)$	$(-\ln(u))^\theta$
역함수 $\varphi^{-1}(t)$	$(t + 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$-\frac{1}{\theta} \ln\{1 + \exp(t)(\exp(-\theta) - 1)\}$	$\exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$
모수 θ 의 조건	$\theta > 0$	$\theta \neq 0$	$\theta \geq 0$

2. Copula 함수와 모수추정

2.1. Copula 함수

Copula 함수는 다변량 변수들 사이의 종속성 구조를 고려하면서 누적분포함수를 추정하는데 유용한 방법이다. Copula 모형을 연구하는데 핵심적인 역할을 하는 확률변수 X_1, \dots, X_n 의 주변분포함수를 $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ 일 때, Sklar (1959)의 정리는 확률변수들의 결합분포함수 $F(x_1, \dots, x_n)$ 에 대하여 n 차원의 Copula 함수 C 가 존재하며 다음이 성립한다.

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \tag{2.1}$$

Sklar의 정리를 통해서 결합분포함수는 연속적인 주변분포함수와 종속구조로 분리될 수 있고, 종속구조는 Copula 함수로 표현된다는 것을 알 수 있다.

Copula 함수는 균일분포(uniform distribution)를 따르는 확률변수들의 결합분포함수로 정의하며 확률 변수 U_1, \dots, U_n 이 구간 $[0, 1]$ 에서의 균일분포를 따르고 $F_1(x), \dots, F_n(x)$ 이 연속형인 경우에 Copula 함수 C 는 유일하게 존재하며 Copula 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \\ &= C(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

여기서 $u_i \in [0, 1]$ 이고 $F_i^{-1}(\cdot)$ 은 $F_i(\cdot)$ 의 역함수이다 ($i = 1, \dots, n$).

하나의 모수와 생성함수(generator)로 구성된 EAC 함수는 종속구조가 그림 2.1과 같으며 다음과 같이 정의한다 (McNeil, 2008; Savu와 Tiede, 2006).

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \varphi(u_3) + \varphi(u_4)]. \tag{2.3}$$

본 연구에서는 다변량의 경우를 네변량으로 가정하고 그 이상인 경우에 쉽게 확장 가능하다. 본 연구에서 사용되는 Clayton, Frank, Gumbel Copula의 생성함수와 그의 역함수 그리고 모수의 조건은 표 2.1과 같다. $\varphi(u)$ 는 Copula의 생성함수로 모든 $0 \leq u \leq 1$ 에 대하여 $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(u) < 0$, 그리고 $\varphi''(u) > 0$ 를 만족하는 연속함수이다.

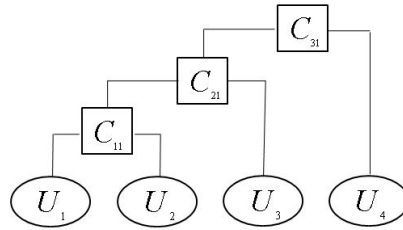


그림 2.2. Full Nested archimedean Copula의 종속구조

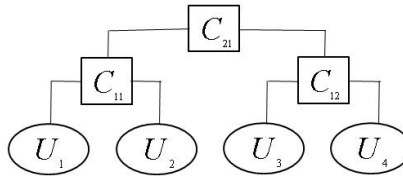


그림 2.3. Partial Nested archimedean Copula의 종속구조

2.2. Full Nested Archimedean Copula(FNAC)

EAC 경우에는 하나의 종속구조로만 표현되기 때문에 결합확률분포를 표현하는데 한계가 있다. 여러 종속구조를 표현하기 위해 FNAC와 2.3절에 설명할 PNAC가 개발되었다. FNAC의 종속적 구조는 그림 2.2와 같고 $(n - 1)$ 개의 모수를 가지며 다음과 같이 정의된다 (McNeil, 2008; Savu와 Tiede, 2006).

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C_{31}(C_{21}(C_{11}(u_1, u_2), u_3), u_4) \\ &= \varphi_{31}^{-1}(\varphi_{31} \circ (\varphi_{21}^{-1}(\varphi_{21} \circ (\varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)))) + \varphi_{21}(u_3)) + \varphi_{31}(u_4)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

식 (2.4)는 [1234]의 구조를 가지고 있지만 [1243], [1324], ..., [3421]의 총 12개의 구조로 표현될 수 있다. 이러한 종속구조에서 C_{11} 에서 모수 θ_{11} , C_{21} 에서 θ_{21} , C_{31} 에서 모수 θ_{31} 을 구할 수 있고 추정된 모수는 $\theta_{11} > \theta_{21} > \theta_{31}$ 을 만족해야한다 (Nelson, 2006).

2.3. Partial Nested Archimedean Copula(PNAC)

PNAC는 EAC와 FNAC를 혼합한 형태로서 4차원 이상에서만 존재한다. 그림 2.3과 같은 종속적 구조를 가지는 PNAC는 $(n - 1)$ 개의 모수를 가지며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C_{21}(C_{11}(u_1, u_2), C_{12}(u_3, u_4)) \\ &= \varphi_{21}^{-1}(\varphi_{21} \circ \varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)) + \varphi_{21} \circ \varphi_{12}^{-1}(\varphi_{12}(u_3) + \varphi_{12}(u_4))). \end{aligned} \quad (2.5)$$

식 (2.5)는 [1234]의 구조를 가지고 있지만 [1324], [1423] 총 세개의 구조로 표현될 수 있다. 이러한 종속구조에서 C_{11} 에서 모수 θ_{11} , C_{12} 에서 모수 θ_{12} , C_{21} 에서 모수 θ_{21} 을 구할 수 있고 추정된 모수는 $\min\{\theta_{11}, \theta_{12}\} > \theta_{21}$ 을 만족해야한다.

2.4. Copula 함수의 모수추정

Copula 함수의 모수추정은 모수적인 방법, 비모수적인 방법으로 구분된다. 모수적인 방법으로는 주변분포함수를 가지고 추정하는 MLE(Maximum Likelihood Method) 방법과 주변확률분포의 모수와

Copula 함수의 모수를 분리하여 두 단계에 걸쳐서 추정하는 IFM(Inference Function for Margins Method) 방법이 있다. 비모수적인 방법으로는 주변분포함수에 대해 모수적 분포함수를 가정하지 않고 경험적 분포함수로 추정한 후에 Copula 함수의 모수벡터를 추정하는 CML(Canonical Maximum Likelihood) 방법이 있다 (Joe, 2005). 본 연구에서는 모수추정이 비교적 쉽고 널리 쓰이는 Maximum Pseudo Likelihood 추정법으로 CML 방법과 유사하지만 경험적 분포함수를 이용하지 않고 확률변수 $X = (X_1, \dots, X_n)$ 로부터 유사자료(pseudo data)를 구하여 최우추정하는 방법을 이용하였으며 다음과 같이 추정한다 (Shih와 Louis, 1995; Genest 등, 1995).

$$\hat{\theta} = \arg \max L(\theta) = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t), \quad (2.6)$$

여기서 $u_i = \text{Rank}(x_i)/T + 1$, $T =$ 관측치 수이다.

3. Copula 함수를 이용한 다변량분포의 적합과 VaR

3.1. 다변량 Copula 함수의 확률난수 추출방법

Copula 함수를 이용하여 VaR를 추정하기 위해서는 추정된 모수를 포함한 Copula 함수의 난수들을 추출하는 시뮬레이션 과정이 필요하다. 일반적인 알고리즘은 확률변수 $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ 의 조건부 분포 함수와 그의 역함수를 사용한다. 네변량의 경우 확률난수를 추출하는 방법은 다음과 같다.

1. 확률난수 (v_1, v_2, v_3, v_4) 를 균일분포 $U(0, 1)$ 로부터 독립적으로 추출한다.
2. $u_1 = v_1$ 으로 둔다.
3. $v_2 = C(u_2|u_1) \equiv \Pr(U_2 \leq u_2|U_1 = u_1) = \partial C(u_1, u_2)/\partial u_1$ 을 만족하므로 $u_2 = C^{-1}(v_2|u_1)$ 을 계산한다.
4. 3번의 과정을 통하여 $u_3 = C^{-1}(v_3|u_2)$, $u_4 = C^{-1}(v_4|u_3)$ 를 계산한다.

반복추출한 (u_1, u_2, u_3, u_4) 는 Copula 함수로부터의 네변량 자료가 된다.

3.2. 다변량 분포의 VaR 추정

네 개의 금융자산 A, B, C, D 로 구성된 포트폴리오를 고려해보자. W, X, Y, Z 는 금융자산 A, B, C, D 의 투자기간 동안의 각 수익률을 나타낸다고 하자. 초기 가치를 p_0 , 투자기간 말의 가치를 p_1 이라고 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$p_1 = p_0 (w_1 e^W + w_2 e^X + w_3 e^Y + w_4 e^Z), \quad (3.1)$$

여기서 $p_0 = n_A S_A + n_B S_B + n_C S_C + n_D S_D$ ($n_i = i$ 자산의 수, $S_i = i$ 초기 가격)이며 w_1, w_2, w_3, w_4 는 금융자산 A, B, C, D 의 각 투자비중을 나타낸다. 투자기간 동안에 W, X, Y, Z 의 수익률은 다음과 같이 구한다 (여성철, 2006).

$$R_p = \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) = \ln (w_1 e^W + w_2 e^X + w_3 e^Y + w_4 e^Z). \quad (3.2)$$

신뢰수준 $100(1 - \alpha)\%$ 의 VaR를 네변량 자료의 수익률 분포함수의 경우로 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$\text{VaR}_\alpha = r_\alpha, \quad (3.3)$$

여기서 $\alpha = P(R_p \leq -r_\alpha)$, 즉 $r_\alpha = -F_{R_p}^{-1}(\alpha)$ 이다.

VaR $_\alpha$ 를 구하기 위해서는 수익률 분포함수에서 α 번째 분위수를 계산하는 것이 필요하다. 네개의 금융 자산의 수익률 결합확률밀도함수 $f(w, x, y, z)$ 그리고 $F_W(w), F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)$ 는 W, X, Y, Z 각각의 주변분포함수라고 할 때, 네변량의 Copula함수를 이용하여 $C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \alpha$ 를 만족하는 α 번째 분위수 $(u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, u_{3\alpha}, u_{4\alpha})$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha &= C(u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, u_{3\alpha}, u_{4\alpha}) = P[U_1 \leq u_{1\alpha}, U_2 \leq u_{2\alpha}, U_3 \leq u_{3\alpha}, U_4 \leq u_{4\alpha}] \\ &= P(R_p \leq -r_\alpha) \\ &= \iint_{\{(w,x,y,z): w_1 e^W + w_2 e^X + w_3 e^Y + w_4 e^Z \leq e^{-r_\alpha}\}} f(w, x, y, z) dw dx dy dz \\ &= \iint_{\{(u_1, u_2, u_3, u_4): w_1 e^{F_W^{-1}(u_1)} + w_2 e^{F_X^{-1}(u_2)} + w_3 e^{F_Y^{-1}(u_3)} + w_4 e^{F_Z^{-1}(u_4)} \leq e^{-r_\alpha}\}} c(u_1, u_2, u_3, u_4) du_1 du_2 du_3 du_4, \end{aligned} \quad (3.4)$$

여기서 $u_1 = F_W(w)$, $u_2 = F_X(x)$, $u_3 = F_Y(y)$, $u_4 = F_Z(z)$ 이다. W, X, Y, Z 의 수익률 분포함수에서 r_α 는 다음과 같이 구해진다.

$$r_\alpha = -\ln \left(w_1 e^{F_W^{-1}(u_{1\alpha})} + w_2 e^{F_X^{-1}(u_{2\alpha})} + w_3 e^{F_Y^{-1}(u_{3\alpha})} + w_4 e^{F_Z^{-1}(u_{4\alpha})} \right). \quad (3.5)$$

따라서 본 연구는 위에서 제시한 방법을 이용하여 EAC, FNAC, PNAC 각 구조별로 세 종류의 archimedean Copula 함수를 이용하여 Copula 함수의 모수를 추정하고 몬테칼로 방법을 이용하여 0.1%, 1%, 2.5%, 5%의 VaR를 산출한다.

4. 실증분석

4.1. 수익률 분포의 기초 통계량

실증분석에 사용된 자료는 2008년 3월 3일부터 2011년 3월 31일까지 총 772개의 국내 대기기업의 일일 주식 시가자료에 대하여 유사한 분포를 갖는 네 기업인 포스코, 현대차, SK, 한화를 선정하여 이 기업의 수익률 자료를 사용한다. 그림 4.1은 각 기업의 일별 로그수익률에 대한 시계열 자료이다. 로그수익률 자료의 기초통계량을 정리한 표 4.1을 살펴보면 평균이 모두 0에 가까우며 표준편차는 적은 폭의 변화가 있음을 보여주고 있으며 자료의 수익률의 왜도는 0에 가까우며 큰 값의 침도를 갖는다.

4.2. 다변량의 VaR 추정

신뢰수준이 낮을수록 VaR의 크기가 작아지며 이는 유의수준이 높아진다는 것과 동일하다. 바젤위원회는 1%의 유의수준을 선택하고 있지만, 일반적인 이용자들은 상이한 유의수준을 이용하고 있고 유의수준의 차이가 중요한지 아닌지는 VaR의 용도에 의해 결정된다. 예를 들어 금융위기에도 견딜 수 있는 자본의 크기를 결정하는데 VaR가 직접 이용된다면, 유의수준의 선택은 매우 중요하다. VaR의 유의수준은 기업의 위험회피도(degree of risk aversion)와 VaR를 초과하여 손실이 발생할 때의 비용을 반영하여 결정되어야 한다. 위험회피도가 클수록 또는 비용이 많이 들수록 손실을 줄이기 위한 자본요구액도 늘려야 하며, 이는 곧 유의수준을 낮추는 것으로 이어진다.

VaR를 추정하기 위해서는 각 종속적 구조와 Copula 함수의 종류에 따라 모수를 추정해야하며 개별주변분포함수는 정규분포를 가정하였다. EAC는 하나의 모수를 가지므로 고정되어있지만 FNAC는 12개의 종속구조 중에서 $\theta_{11} > \theta_{21} > \theta_{31}$ 을 만족하는 구조는 [1342], [3412]인 두 가지이며, 세계의 종속구조

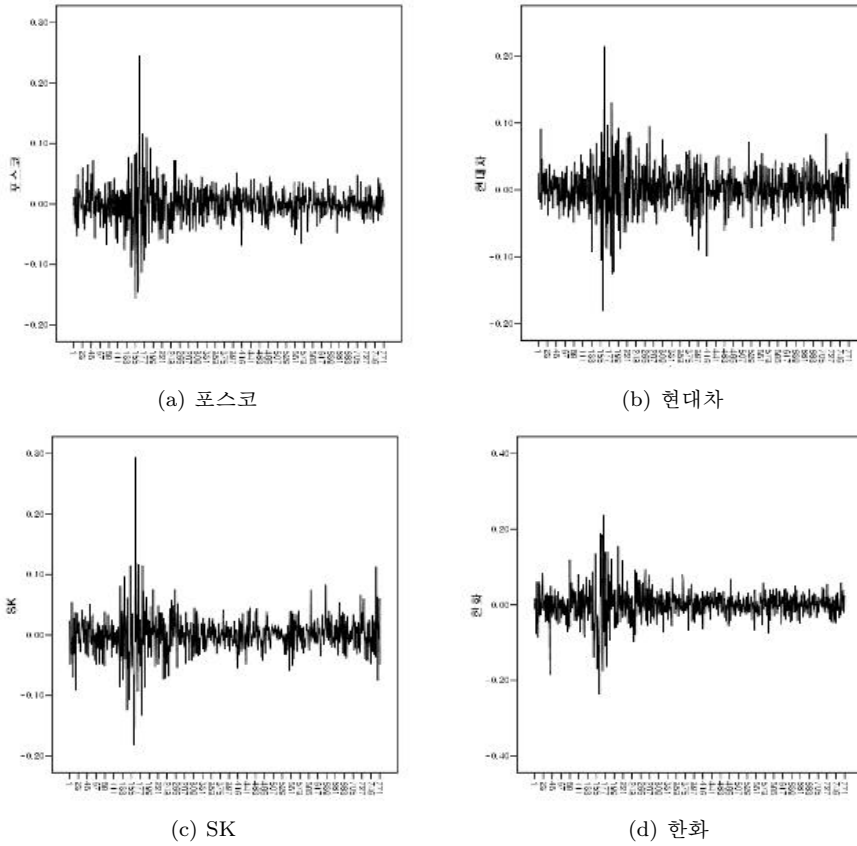


그림 4.1. 수익률 자료의 시계열 도표

표 4.1. 수익률자료의 기초통계량

	평균	표준편차	왜도	첨도
포스코	0.000005037	0.02904877	0.3117982	12.56953
현대차	0.001510	0.03190863	0.0185189	7.828496
SK	-0.00003991	0.03129412	0.7028515	16.46011
한화	-0.0001304	0.04026118	-0.03946698	9.351426

중에서 $\theta_{11}, \theta_{12} > \theta_{21}$ 를 만족해야하는 PNAC는 [1234] 구조가 모수충족조건을 만족하며 표 4.2에 나타내었다.

표 4.2의 FNAC와 PNAC의 구조 중에서 모수의 조건을 만족하는 구조는 변수들의 종속성(독립성)에 의존하기 때문에 실증예제에서 네 변수의 의존성 구조를 살펴보기 위한 하나의 방법으로 상관관계 행렬을 구하고 상관계수가 큰 것부터 정리해보면 다음과 같다.

$$r_{13} = 0.6246 > r_{34} = 0.5892 > r_{41} = 0.5288 > r_{12} = 0.5095 > r_{42} = 0.4507.$$

FNAC에서 모수의 조건이 $\theta_{11} > \theta_{21} > \theta_{31}$ 를 만족해야하므로 상관계수의 관계 중에서 $r_{13} = 0.6246 > r_{34} = 0.5892 > r_{42} = 0.4507$ 에 적합한 표 4.2의 구조 중에서의 [1342] 구조와 $r_{34} = 0.5892 > r_{41} =$

표 4.2. Copula 함수의 모수추정값

종속구조	Copula	구조	모수추정값
Exchangeable Copula	Clayton		0.6159
	Gumbel		1.3560
	Frank		2.5128
Full Nested Copula	Clayton	1342	$\theta_{11} = 0.8965, \theta_{21} = 0.7785, \theta_{31} = 0.6159$
		3412	$\theta_{11} = 0.8148, \theta_{21} = 0.7785, \theta_{31} = 0.6159$
	Gumbel	1342	$\theta_{11} = 1.4913, \theta_{21} = 1.4268, \theta_{31} = 1.3560$
		3412	$\theta_{11} = 1.4671, \theta_{21} = 1.4268, \theta_{31} = 1.3560$
	Frank	1342	$\theta_{11} = 3.3405, \theta_{21} = 2.9369, \theta_{31} = 2.5128$
		3412	$\theta_{11} = 3.1249, \theta_{21} = 2.9369, \theta_{31} = 2.5128$
Partial Nested Copula	Gumbel	1234	$\theta_{11} = 1.3613, \theta_{12} = 1.4671, \theta_{21} = 1.3560$
	Frank	1234	$\theta_{11} = 2.5427, \theta_{12} = 3.1249, \theta_{21} = 2.5128$

표 4.3. 네변량 VaR

종속구조	Copula	VaR _{0.1}	VaR ₁	VaR _{2.5}	VaR ₅
Exchangeable Copula	Clayton	4.6723	2.4572	1.5030	0.7634
	Gumbel	4.6712	2.4780	1.5433	0.7493
	Frank	3.2955	1.9057	1.2355	0.6483
Full Nested Copula	Clayton	5.0496	2.7781	1.8059	0.9245
	Gumbel	2.8471	1.6748	1.0920	0.5598
	Frank	2.7894	1.6910	1.1183	0.6309
Partial Nested Copula	Gumbel	2.4848	1.3702	0.7521	0.2814
	Frank	2.4017	1.3335	0.8518	0.3189

$0.5288 > r_{12} = 0.5095$ 에 적합한 [3412]의 구조가 적절하며 그 외의 구조는 모수의 조건이 성립하지 않음을 판단할 수 있다. 그리고 PNAC에서는 모수의 조건이 $\theta_{11}, \theta_{12} > \theta_{21}$ 를 만족해야하므로 상관계수가 큰 $r_{13} = 0.6246, r_{34} = 0.5892$ 에 대하여 우선 변수 [13]과 [34]를 우선 적용하고 나머지 [24]와 [12]를 그 다음에 적용할 때, $r_{12} = 0.5095, r_{24} = 0.4507$ 중에서 큰 계수는 변수 [12]이므로 변수 [34]와 [12]의 구조로 채택되어 표 4.2의 PNAC 구조 중에서 [1234]의 구조가 적절하고 그 외의 구조는 모수의 조건이 성립하지 않는다고 판단할 수 있다. 그러므로 예를 들어 상관관계를 바탕으로도 FNAC에서는 두개의 구조와 PNAC에서는 하나의 구조만이 모수의 조건을 만족한다.

실증예제에서 네 변수의 상관계수를 바탕으로도 종속성의 구조가 복잡함을 알 수 있는데 간단하지 않은 종속성 구조에서 하나의 종속구조만을 고려하는 고전적인 방법인 단일모수방법(EAC)으로는 충분하게 자료를 표현할 수 없다. 최근에 연구된 유연하며 다양한 종속구조를 표현할 수 있는 장점을 가진 FNAC와 PNAC를 고려하였다. 이 과정에서 추정된 모수는 상이하나, EAC에서 Clayton, Gumbel 그리고 Frank의 모수추정값은 각각 0.6159, 1.3560 그리고 2.5128은 FNAC의 가장 상위 계층 모수 θ_{31} 과 PNAC의 가장 상위 계층 모수 θ_{21} 과 같은 값으로 수렴함을 파악할 수 있다.

VaR를 추정하는 다음단계는 추정된 모수를 바탕으로 표본크기가 772인 확률난수를 생성하여 유의수준이 0.1%, 1%, 2.5%, 5%일 때 $C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \alpha$ 를 만족하는 $(u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, u_{3\alpha}, u_{4\alpha})$ 를 구한다. 그리고 식 (3.5)를 이용하여 r_α 값을 계산하여 VaR를 구한다. 이 과정은 확률난수를 이용하기 때문에 좀 더 정확한 값을 구하고자 1,000번을 반복 시뮬레이션하여 평균값을 구하였고 FNAC에 포함된 Clayton, Gumbel, Frank Copula는 [1342], [3412] 두 가지 구조를 평균을 내어 VaR를 계산하여 표 4.3과 그림 4.2에 나타내었다.

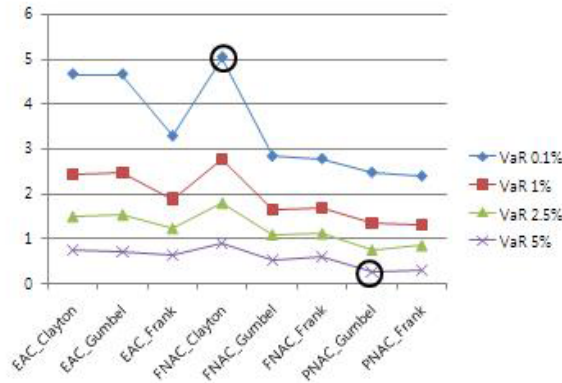


그림 4.2. 네변량 VaR의 비교

만일 연구의 관심이 투자목적으로 최대손실을 알아보는 것과 또는 산업내의 자기자본을 낮게 설정하기 위하여 즉, 최대평가되는 VaR와 최소평가되는 VaR를 알아보려고 한다면, 그림 4.2와 표 4.3을 통하여 최대평가되는 VaR는 유의수준 0.1%일 때 FNAC의 Clayton Copula로 VaR는 5.0496이며, 최소평가되는 VaR는 유의수준 5%일 때 PNAC의 Gumbel Copula로 VaR는 0.2814임을 파악할 수 있다. 그리고 각 유의수준에서 살펴보면 다음과 같이 요약된다. 0.1%일 때 최대평가 또는 최소평가되는 VaR는 각각 FNAC의 Clayton Copula와 PNAC의 Frank Copula로 5.0496과 2.4017이다. 1%일 때 최대평가 또는 최소평가되는 VaR는 0.1%일 때와 동일하게 FNAC의 Clayton Copula와 PNAC의 Frank Copula이며 값은 2.7781과 1.3335이다. 2.5%일 때 최대평가 또는 최소평가되는 VaR는 각각 FNAC의 Clayton Copula와 PNAC의 Gumbel Copula로 1.8059와 0.7521이다. 그리고 5%일 때 최대평가 또는 최소평가되는 VaR는 2.5%일 때와 동일하게 FNAC의 Clayton Copula와 PNAC의 Gumbel Copula이며 값은 0.9245와 0.2814임을 파악할 수 있다. 본 연구에서는 다양한 유의수준에서의 VaR를 계산하였고 이용자는 활용하는 목적에 따라 표 4.3을 바탕으로 각 신뢰수준과 Copula 함수를 적용시키면서 VaR를 추정할 수 있다.

본 연구에서의 VaR는 보유기간 1일의 VaR이다. JP Morgan의 리스크메트릭스(risk matrix)에서는 95%의 신뢰수준과 보유기간 1일의 VaR을 사용하고, 바젤위원회는 99%의 신뢰수준과 보유기간 10일의 VaR (10 VaR)를 사용하도록 권장하고 있다 (김철중, 2001). 만약 10 VaR는 $10VaR = VaR \times \sqrt{10}$ 를 이용하여 구한다. 따라서 각 금융기관이나 투자자들은 다양한 VaR 중에서 원하는 VaR를 가지고 목적에 맞게 이용할 수 있다.

하나의 종속구조로 표현되는 EAC와 다양한 종속구조로 표현되는 PNAC와 FNAC가 Clayton, Gumbel, Frank Copula 함수에 따라 VaR를 어떻게 추정하는지 그림 4.3에 나타내었다. Clayton Copula 경우는 EAC가 FNAC에 비해 낮은 VaR가 측정되었으나 Gumbel, Frank Copula 경우는 EAC가 FNAC와 PNAC 보다 큰 VaR가 측정되었다. 특히 Gumbel Copula 경우 유의수준 0.1%일 때 VaR가 매우 큰 값으로 측정되었으며 FNAC는 PNAC보다 높은 VaR가 추정됨을 파악할 수 있다.

5. 결론

Copula 함수를 이용하여 VaR를 측정한 기존 연구는 하나 또는 두 종류의 금융자산이 대부분이었다. 그러나 현실생활에서는 어떤 특정한 금융자산의 VaR를 추정하는 것 보다는 국내 전체 산업의 VaR나

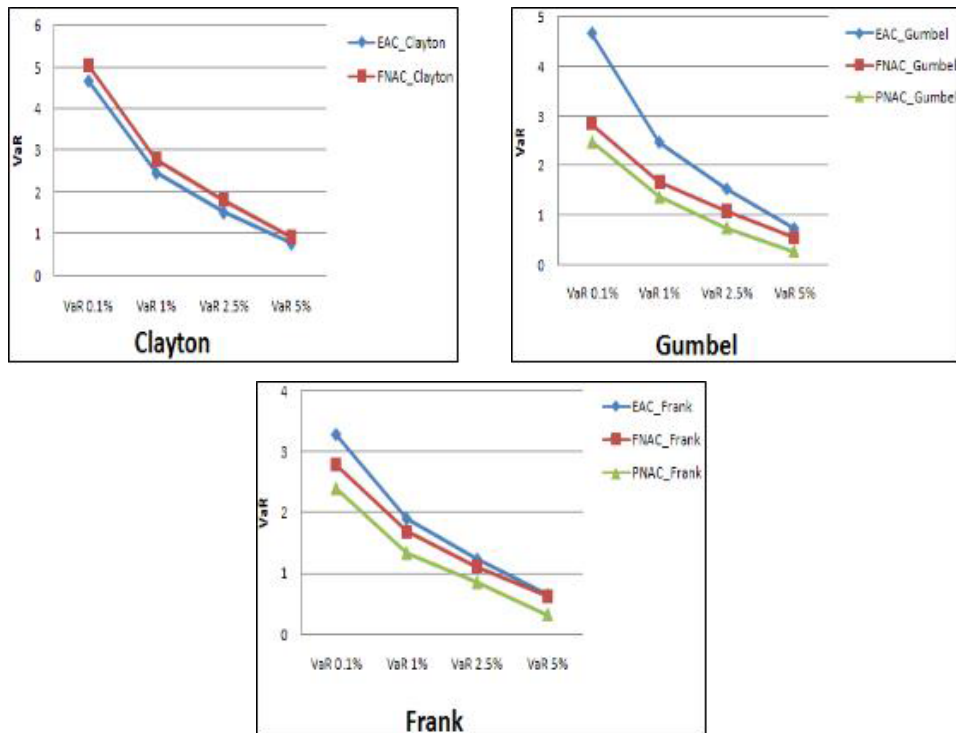


그림 4.3. Copula 함수에 따른 VaR의 비교

특정 회사에 포함된 몇 개의 산업에 대한 다변량 자료를 고려한 VaR를 측정해야 한다.

본 논문에서는 최근 재무 금융분야에서 활발히 응용되고 있는 Copula 함수를 이용하여 실증예제의 수익률분포에 적합시켜 네변량 분포의 VaR를 추정하였다. Copula 함수를 이용한 VaR의 장점은 종속성이 반영된 VaR를 산출할 수 있다. 기존의 일반적인 구조에서 더 나아가 FNAC, PNAC 등 다양한 종속적 구조와 Clayton, Gumbel, Frank Copula 함수를 포함한 archimedean Copula 함수의 모든 가능한 경우의 VaR를 국내 대기업 중 유사한 수익률 분포를 따르는 네 기업의 자료를 바탕으로 계산하였다.

추정된 VaR를 통하여 다양한 유의수준에서 최대, 최소 평가되는 VaR와 종속적 구조, Copula 함수의 형태를 파악할 수 있다. 동일한 신뢰수준에서 FNAC의 Clayton Copula 함수를 이용하여 구한 VaR는 최대평가되며, 반면에 최소평가되는 VaR는 유의수준이 1% 이하일 때는 PNAC의 Frank Copula 함수를 이용하는 경우이며 유의수준이 2.5% 이상일 때는 PNAC의 Gumbel Copula 함수를 이용하는 경우이다. 본 연구에서 제공하는 시사점은 Copula 함수의 형태와 종속적 구조에 따른 다양한 VaR를 산출하여 금융자산 또는 부채를 보유한 투자자 또는 금융기관에서 활용할 수 있다.

참고문헌

- 김명직, 신성환 (2003). Copula 함수의 추정과 시뮬레이션, <선물연구>, **11**, 103-131.
 김철중 (2001). VaR 측정의 기본원리, <금융>, **567**, 44-49.
 여성칠 (2006). 코플러와 극단치이론을 이용한 위험척도의 추정 및 성과분석, <응용통계연구>, **19**, 481-504.
 홍종선, 권태완 (2010). 수익률분포의 적합과 리스크값 추정, <한국데이터정보과학회지>, **21**, 219-229.

- 홍중선, 이재형 (2011). Copula 함수를 이용한 이변량분포의 VaR 추정, <응용통계연구>, 게재예정.
- 황수영 (2005). <Copula 함수와 극단치 이론을 이용한 Value at Risk 측정에 관한 실증연구>, 한국과학기술원, 박사학위논문.
- Bae, K. H. and Karolyi, A. (2003). A new approach to measuring financial contagion, *Review of Financial Studies*, **16**, 717–763.
- Breymann, W. (2003). Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance, *Quantitative Finance*, **3**, 1–14.
- Dobric, J. and Schmid, F. (2005). Nonparametric estimation of the lower tail dependence in bivariate copulas, *Journal of Applied Statistics*, **32**, 387–407.
- Embrechts, P., McNeil, A. J. and Straumann, D. (1999). Correlation: Pitfalls and alternatives, *Risk*, **5**, 69–71.
- Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L. P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika*, **82**, 543–552.
- Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copulabased models, *Journal of Multivariate Analysis*, **94**, 401–419.
- Jorion, P. (1997). *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York.
- Li, D. X. (1999). *Value at Risk based on the Volatility Skewness and Kurtosis*, RiskMetrics Group.
- Longin, S. (2001). Extreme correlation of international equity markets, *The Journal of Finance*, **2**, 649–676.
- Marshall, R. and Zeevi, A. (2002). *Beyond Correlation: Extreme Co-movements between Financial Assets*, Working paper, Columbia Business School.
- McNeil, A. J. (2008). Sampling nested archimedean copulas, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **6**, 567–581.
- Nelson, R. B. (2006). *An Introduction to Copula*, 6th Edition, Springer.
- Savu, C. and Trede, M. (2006). Hierarchical archimedean copulas, *International Conference on High Frequency Finance*, Konstanz.
- Shih, J. and Louis, T. (1995). Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data, *Biometrics*, **51**, 1384–1399.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges, *L'Institut de Statistique de L'Universite de Paris*, **8**, 229–231.
- Umberto, C. L. and Walter, V. (2004). *Copula Methods in Finance*, Wiley.
- Zangari, P. (1996). An improved methodology for measuring VaR, *RiskMetrics Monitor*, **2**, 7–25.

VaR Estimation with Multiple Copula Functions

Chong Sun Hong¹ · Won Yong Lee²

¹Department of Statistics, Sungkyunkwan University

²Research Institute of Applied Statistics, Sungkyunkwan University

(Received June 2011; accepted September 2011)

Abstract

VaR(Value at risk) is a measure of market risk management and needs to be estimated for multiple distributions. In this paper, Copula functions are used to generate distributions of multivariate random variables. The dependence structure of random variables is classified by the exchangeable Copula, fully nested Copula, partially nested Copula. For the earning rate data of four Korean industries, the parameters of the Archimedean Copula functions including Clayton, Gumbel and Frank Copula are estimated by using three kinds of dependence structure. These Copula functions are then fitted to the data so that corresponding VaR are obtained and explored.

Keywords: Dependence, earning rate, generator, multivariate, risk.

¹Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sungkyunkwan University, 3-53, Myungryun-Dong, Jongro-Gu, Seoul 110-745, Korea. E-mail: cshong@skku.ac.kr