

## 푸리에(1822) 그 후

이문호  
전북대학교

### 요 약

본 논문에서는 신호 정보의 뿌리를 더듬어 분석했다. 통신 신호 처리 분야의 선구자(pioneer)인 푸리에(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768~1830)가 1822년 발표한 푸리에 행렬은 하나의 매개변수(parameter)로 고정된 값을 갖지만, 멀티미디어에 대한 요구가 급증한 오늘날의 상황에 맞추어  $2N-1$ 의 매개변수를 갖는 수정된 푸리에 행렬을 제안, 중계망(Relay Network)으로 어떻게 적용하는지와 융합 DFT와 DCT-II를 보이고, 직교 푸리에 다중 분할(Orthogonal Fourier Division Multiplexing, OFDM)의 변천과 표준화에 대해 간략히 논한다.

### 1. 서론

#### 1. 신호 정보는 어디서 왔는가?

신호 정보의 역사는 우주의 시작으로까지 거슬러 올라가야 하고 정보라는 관점에서는 우주, 자연, 인간, 사회의 역사를 모두 관통해서 하나의 역사로 엮을 수 있다. 여기서는 공학적인 관점에서 신호 정보의 역사를 살펴본다 [1].

신호 정보는 어디서 왔을까? 이것을 알기 위해서는 신호 처리의 대가인 푸리에의 연구 역사를 더듬을 필요가 있다.

세상에는 아무리 시간이 흘러도 그 빛을 잃지 않는 것들이 있으니, 프랑스 사람 푸리에의 이름도 그 중의 하나라 할 수 있을 것이다. 열 전도(傳導)와 경계치 문제(境界値 問題)를

다루던 중 발견한 결과물을 집대성한 “Theorie analytique de la chaleur”란 논문을 1822년에 발표했는데, 당시 그의 나이 54세였으니, 대기만성의 한 예라고 볼 수 있다. 이 위대한 기여가 없었더라면 오늘날의 통신 회로망(回路網) 이론, 그리고 더 나아가서는 정보 통신 공학 전체가 얼마나 빈곤했을 것인가? 여담이지만, 그 후로 2년이 흐른 후, 우연인



(그림 1) 만돌린을 든 소녀(피카소, 1910년)

지 필연인지는 모르겠으나, 54세의 귀 먹은 베토벤(Beethoven)이 그의 교향곡 중에서 마지막이자 가장 거대한 제 9번 교향곡 "Choral(합창)"을 완성했다. 이 정교하면서 수려한 두 창작은 얻고자 하는 누구에게나 주어질 수 있는 영원한 자산이다. 푸리에에는 삼각 함수(Trigonometric Function)의 직교 함수(Orthogonal function)와 정현파의 신호 처리로, 베토벤은 9번 교향곡 합창의 울동으로 신(神)과 대화를 했다고나 할까?

한편, 스페인의 화가, 입체주의 창시자인 대 화가 피카소(Pablo Ruiz Picasso, 1881~1973)는 <아비뇰의 아낙네들(1906 - 1907)>의 그림 등의 풍경화나 인물화를 큐브(Cube)나 삼각형으로 그려 세상 이치를 삼각형으로 본 것 같고(그림 1) 세잔느는 자연을 원통, 원추, 원구로 다뤘다. 또 고흐도 우주의 대폭발(Big Bang) 원리를 직접 그림으로 그렸다. 화가나 과학자나 사물의 이치를 보는 눈은 동일한 것인가? 그래서일까? 사람이나 동물이 감각기관인 눈, 코, 귀, 입 등을 보면 생김새가 모두 정현파 형태인 삼각과 모양이다. 외부에서 들어오는 신호와 감각기관이 임피던스 매칭(Impedance Matching) 탓이다. 그 간단한 예를 공간 임피던스(300 Ω)와 Yagi 안테나(292 Ω)가 같기 때문에 최대 신호가 전송된다.

통신 신호 처리도 수많은 과학자들의 발자취이다. 통신 신호처리에서 푸리에 해석기법의 발달은 많은 학자들과 많은 상이한 물리적 현상의 연구들로 이어지는 유구한 역사를 가지고 있다. 주기적인 현상을 표현하기 위해서 서로 연관된 사인(Sine Wave)과 코사인(Cosine Wave), 또는 주기적인 복소지수를 합치는 "삼각함수의 합"의 개념을 사용한 것은 적어도 기원전 2600년 전인 바빌로니아 시대인 천체관측 때부터다. 삼각함수에 대한 현대적인 연구는 1748년 L.Euler<sup>9)</sup>에 의해 시작되었는데, 그는 진동하는 현의 동작을 조사하였다. 이러한 현의 처음 몇 가지 표준 형태를 나타내었는데 시간이  $t$ 이고 현에서의 거리가  $x$ 일때의 수직편향  $f(x)$ 는 어떤 고정된 시간  $t$ 에서의 표준 형태이며, 고조파적으로 관련된  $x$ 의 정현 함수이다. 여기서 Euler가 중요시한 점은, 어떤 시점에서의 진동하는 현의 형태가 이런 표준형태의 선형결합이라면, 이후의 어떤 시간에서도 그러할 것이라는 점이다. 또한 Euler는 미래의 한 시점에 있어서의 선형결합의 계수를 과거의 시점에 대한 계수로부터 직접 계산할 수 있음을 보여주었다.

이 과정에서 Euler는 선형 시불변(Linear Time Invariant, LTI)시스템을 해석하는데 유용한 삼각함수 합 특성중 하나를 유도했다. 즉, 선형 시불변 시스템의 입력이 주기적인 지수 함수나 정현파의 선형결합으로서 표시된다면, 출력도 같은 형태로 표현되며, 계수들도 입력의 계수로서 쉽게 표현됨을 알 수 있을 것이다<sup>9)</sup>.

그러나 18세기 중반에는 이러한 문제가 열띤 논쟁의 주제거리였다. 1753년, D. Bernoulli는 물리적인 배경에서 현(絃)의 모든 물리적인 동작은 표준형태의 선형결합으로 표시될 수 있다고 주장하였지만, 그는 이런 주장을 수학적으로 전개하지 못했기 때문에 그의 생각은 폭넓게 받아들여지지 못하였다. 사실상, Euler 자신도 삼각급수를 중요시하지 않았고, 1759년 J. L. Lagrange는 진동하는 현의 연구에서 삼각급수를 사용하는 것을 강력히 비판하였다.

그의 비판은 각(즉, 불연속적인 기울기)을 갖는 신호를 삼각급수를 사용해서 표현한다는 것은 불가능하다는 자신의 신념에 바탕을 둔 것이었다. 삼각급수로 표현될 수 있는 형태는 현을 팽팽하게 당겼다가 놓을 때만 발생하므로 Lagrange는 이것을 아주 제한된 용도에만 사용할 수 있다고 했다. 그리고 나서, 17년 후 푸리에에는 1786년 3월 21일, 프랑스의 Auxerre에서 태어났다. 그는 삼각급수에 의한 신호처리인 푸리에 시리즈를 54살에 발표했는데, 그의 많은 업적, 특히 그의 이름을 후세에 남기게 한 급수와 변환에 대한 공적은 그가 연구하던 주위 상황과 환경에 영향을 많이 받았다. 그의 획기적인 발견은, 비록 그의 생전에 완전하게 이해되지는 못했지만, 수학의 발전에 지대한 영향을 끼쳤고, 오늘날 매우 광범위하게 과학과 공학에 사용되고 있다.

그는 수학에 관한 연구를 하면서도 활발한 정치활동을 계속하였다. 사실상, 프랑스 대혁명이 일어나고 몇 년 동안, 두 번씩이나 단두대의 처형을 가까스로 피할 만큼, 푸리에에는 행동 때문에 거의 죽을 뻔하였다. 그 이후 푸리에에는 나폴레옹의 친구가 되어, 그의 이집트 원정을 수행했고(그동안 푸리에에는 이집트문명의 정보를 수집했고 후일 이집트 학에 대한 논문의 기초로 사용하였다.), 1802년 나폴레옹은 그를 Grenoble을 중심으로 한 프랑스 지방의 장관으로 임명하였다. 장관으로 재직할 당시, 바로 그 곳에서 푸리에에는 삼각급수에 관한 개념을 발전시켰다. 그레노블에는 지금도 푸리에 대학이 있고 옆에 미친 푸리에에는 죽을 때에도 숨웃(?)을 입

고 죽지 않았을까?

푸리에의 연구에 대한 자연과학적인 동기는 열전달과 열의 확산에 관한 현상이었다. 이러한 현상은 그 자체가 수리물리학에 대한 대부분의 과거의 연구에서 중요한 과정이었다. 1807년, 푸리에에는 열확산에 대한 그의 연구의 중요한 부분을 완성시켰고, 1807년 12월 21일, 이 결과를 Institut de France에 발표하였다.<sup>3)</sup>

이 연구에서, 푸리에에는 고조파적으로 관련된 정현 급수가 물체를 통한 열의 분포를 나타내는데 유용하다는 사실을 발견하였다. 즉, 열의 분포를 삼각함수로 나타냈다. 또한, 어떤 주기신호도 이런 급수로 나타낼 수 있다고 주장하였다. 이러한 주제에 관한 그의 논리가 중요한 것이었지만, 그 뒤에 가려진 많은 기본개념들은 다른 사람들에 의해 발견되었다. 또한, 푸리에의 수학적인주장은 그때까지도 부정확하였는데, 1829년에야 P. L. Dirichlet에 의해서 주기적인 신호가 푸리에 급수로 표시될 수 있는 정확한 조건들이 제시되었다. 따라서 푸리에에는 푸리에 급수의 수학적이론에는 실질적인 공헌을 못하였다.

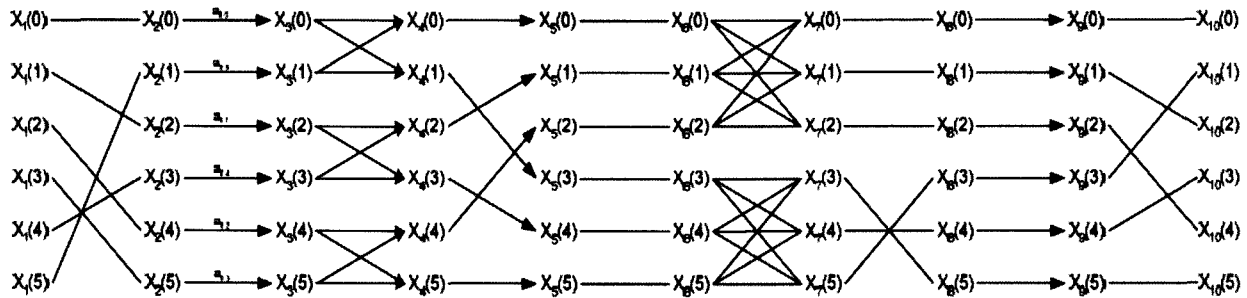
그러나, 그는 연구와 주장으로 푸리에 급수에 대한 계속되는 연구에 박차를 가하였다. 더욱이, 푸리에에는 이런 표현 형태를 이전의 그 어느 누가 생각했던 것보다 더 큰 범위로 생각했다. 즉 열의 분포를 삼각함수(Twiddle Factor)로 나타냈다. 특히, 그는 비주기적 신호에 대한 표현을 고조파적으로 관련된 정현파의 가중 합으로서가 아니라, 모두가 고조파적으로 관련되지는 않은 정현파의 가중 적분으로서 얻어내었다. 푸리에 급수와 함께 푸리에 적분과 변환은 선형 시불변 시스템을 해석하는데 한 강력한 수단이 되고 있음은 물론이다. 1807년 푸리에가 지금까지 연구한 결과를 쓴 논문에 대하여 4명의 심사를 했는데, 그들 중 셋은 S. F. Lacroix, G. Monge, P. S. Laplace<sup>4)</sup>로서 그들은 이 논문의 발표를 찬성하였지만, 나머지 한사람 J.L.Lagrange는 그가 50년 전 발표했던 삼각급수에 대해서 강한 반대 의사를 표시하였다. Lagrange의 강력한 반대에 부딪혀 푸리에의 논문은 발표되지 못하였다. 푸리에에는 Institut de France에 그의 논문이 인정되고 발표될 수 있도록 보완수정하고 제출한 것이 "Theorie analytique de la chaleur" (영문판은 The Analytical Theory of Heat.)이다. 이 논문은 Fourier가 Institut de France에 처음으로 연구 결과를 제출한지 15년 만인 1822년에 발

표되었다. 푸리에가 이론 가장 중요한 업적은 그의 연구가 수학, 과학, 공학 분야의 수많은 원리들에 끼친 커다란 영향이다. 푸리에 급수와 적분의 해석에 근원을 두고 있는 수학적 주제와 몇가지 예를 들면, 적분 이론, 점집합, 위상학, 고유함수의 전개 등이다. 즉, 푸리에 열전달 방정식은 1차 선형 편미분 방정식이고 맥스웰(Maxwell) 파동 방정식은 2차 선형 편미분 방정식이다.

진동과 열확산과 같은 기본적인 연구에서와 같이, 과학과 공학의 여러 가지 문제에서도 정현파 신호와 이에 대한 푸리에 급수와 변환이 중요한 역할을 한다. 그 이유는 정현파 신호가 지구의 기후의 주기적인 현상을 나타내면서 자연적으로 생겨난 것이기 때문이다. 마치 우리들이 심장이 숨을 규칙적으로 들며 마셔야 모든 신체기능이 정상적으로 동작하는 것과 같은 것인데 이것이 단축 배열의(Systolic Array, 심장 기능)이치다. 지구는 자전과 공전으로 해가 뜨고 달이 지면서 세월이 흐름이란 큰 동기 신호(Synchronization Signal)가 나가면 지구에 사는 모든 만물이 그 동기신호에 맞춰 살아가고 있다. 즉 그 중요한 마스터(Master) 클락 동기 신호(Clock Synchronization Signal)가 정현파 신호이며 그것이 바로원초적인 신호정보의 뿌리이다. 사람이 태어나서 살다가 병들고 늙어서 죽듯, 나무 잎사귀도 봄이면 싹이 트고 여름에 무성하지만 가을에는 잎이 지고 봄이면 다시 싹이 나는 것(Recycling)도 지구가 발전하는 큰 정현파 주기신호의 동기 때문일 것이다.

또한, 바다의 파도도 서로 다른 공간적인 주기 또는 파장을 갖는 정현파의 선형결합으로 이루어져 있음을 알 수 있다. 라디오와 TV 방송국에서 보내지는 신호도 근본적으로 정현파이다. 정현파 신호 정보는 시간 축은 표본화로, 진폭 축은 양자화로 나누는데 여기에 비트를 할당하여 컴퓨터로 처리하고 있는 것이 오늘의 디지털 통신 방법이다.

여기서 우리가 눈여겨보아야 할 것은 신(神)이 만든 신호 정보는 반드시 푸리에 급수로 전개가 되는데, 이 원리는 열전달이 모티브가 됐다. 계절의 주기적인 변화로 말미암아 정현파(Sine and Cosine wave)가 생겨났고, 또 이 정현파로 신호를 해석했다. 물론, 푸리에에는 신호처리 이론을 전개했지만 푸리에 이전에 많은 석학들이 연구결과를 집대성한 것이다. 그러나 푸리에에는 고정매개변수(fixed parameter) 푸리에 행렬을 전개했다.



(그림 2) 6x6 재킷 행렬의 고속 신호 흐름도

## II. 다 매개변수(Multi parameter) 푸리에 행렬

Fourier(1822)는 고정매개변수 DFT 행렬을 제안했고 오늘날 신호처리에 유용하게 쓰이고 있다. 여기서는 Fourier 행렬을 포함하는  $2N-1$ 매개변수 상호 협력 직교 재킷 행렬 (Reciprocal Cooperative Orthogonal Jacket Matrix)을 제안하고, 이를 Relay 네트워크에 응용한다.

기존 DFT 3x3 행렬은 식 (1)처럼 주어진다.

$$[DFT]_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} \quad (1)$$

제안한 매개변수 ( $2N-1$ )재킷 행렬은 다음과 같다. 즉, 3x3 행렬인 경우, 매개변수  $2N-1=a, b, c, d, e=5$ 로 이다.

$$\text{제안 } [J]_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & \frac{bd}{a}w & \frac{dc}{a}w^2 \\ e & \frac{bc}{a}w^2 & \frac{ce}{a}w \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Inverse } [J]_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{d} & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{bdw} & \frac{a}{dcw^2} \\ \frac{1}{c} & \frac{a}{bcw^2} & \frac{a}{cew} \end{pmatrix} \quad (3)$$

따라서,

$$[J]_3 [J]_3^{-1} = [I]_3 \quad (4)$$

(그림 2)는 매개변수  $6 \times 6$  재킷 행렬의 고속 신호 흐름도를 보여주었고, <표 1>은 연산량에 따른 복잡도 비교를 보여준다 [4,5,6,17].

<표 1> 계산 복잡도 비교

	기존 DFT [2]	ROP [3]	제안된 $3 \times 2'$
매개변수	1 (고정)	$3N/2$	$2N-1$
가산	$(N-1)N$	$N \log_2 N$	$3N \log_2 N$
승산	$N^2$	$3N/2$	$N \log_2 N$

이를, 중계 전처리 코딩(Relay Precoding)에 적용하면 재킷 행렬은  $[J]_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = JAJ^{-1}$ 로 다음과 같다 (부록 참조).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -\sqrt{bc} \\ -\sqrt{bc} & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \pm \sqrt{bc} & 0 \\ 0 & a \mp \sqrt{bc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b & -\sqrt{bc} \\ -\sqrt{bc} & -c \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

이 식의 분해 과정에서, 첫 번째 항은 고유 벡터(Eigen Vector)이고 두 번째 항은 고유값(Eigen Value) 이고 세 번째 항은 첫 번째 항의 역이다.

재킷 행렬  $[J]_3$ 는

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\omega+c\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\omega^2+c\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

재킷 행렬  $J_6$ 는 다음과 같다.

$$J_6 = J_2 \otimes J_3 = (J_2 \otimes J_3)(\Lambda_2 \otimes \Lambda_3)(J_2 \otimes J_3)^{-1}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$$

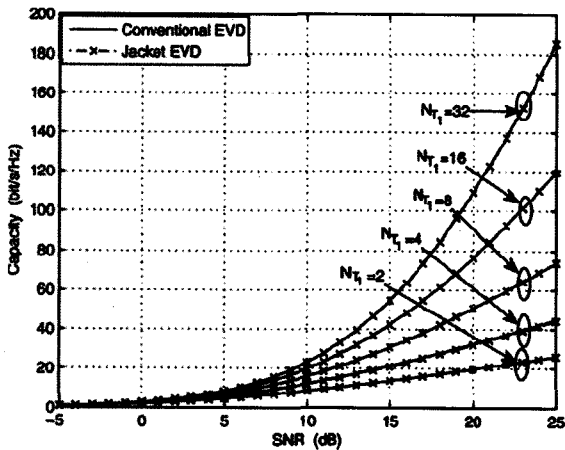
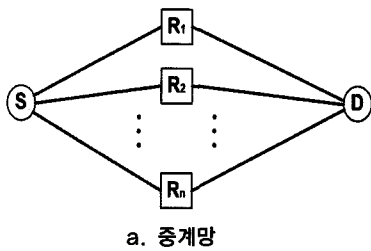
$$\otimes \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\omega+c\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\omega^2+c\omega \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} a & a \\ a & -a \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \right]^{-1}$$
(7)

따라서, 재킷행렬  $J_6$ 는

$$J_6 = (J_2 \otimes \Lambda_2 J_2^{-1}) \otimes (J_3 \otimes \Lambda_3 J_3^{-1})$$

$$= (J_2 \otimes J_3)(\Lambda_2 \otimes \Lambda_3)(J_2 \otimes J_3)^{-1}$$
(8)

식 (5)의 증명은 부록에서 다루었다.



(그림 3) 중계망에서의 채널 용량

재킷 행렬을 중계망(Relay Network)에서 사용하는 모델은 (그림 3)(a)와 같으며, 레일리 페이딩 채널(Rayleigh Fading Channel)에서의 성능 비교는 (그림 3)(b)와 같다.

성능은 변함이 없으나 다음 표와 같이 시간적으로 1/2초 [sec]가 감소됨을 보인다. 앞으로 이에 대한 확장 EVD 연구를 함으로써 Relay 선형 Beamforming Precoding에 대한 연구로 확장할 수 있다.

<표 2> 기존방식과 재킷 행렬과 연산 시간 비교

EVD method	Numer of time slots				
	2	4	7	16	32
conventional	71,157	93,2	117,094	178,438	483,937
Jacket	40,875	56,86	72,407	115,547	195,11

### III. 융합 DFT와 DCT-II

신호처리의 핵심인 DFT와 영상신호 MPEG-4의 표준 DCT(Discrete Cosine Transform)를 공통부분을 밖으로 내놓고 핵심끼리 묶어 놓는 융합(Fusion) 알고리즘을 제안한다 [17].

DFT의 일반식 :

$$X(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{nm}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad W_N = e^{-2\pi/N}$$
(9)

이 때,  $N=2$ 인 경우  $[F]_2 = \begin{bmatrix} W^{0/2} & W^{0/2} \\ W^{0/2} & W^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [H]_2$   
또,  $N=4$ 인 경우

$$[F]_4 = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 2} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 3} \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 2} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 4} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 6} \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 3} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 6} & e^{-j\frac{\pi}{2} \times 9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-j & -1 & j & \\ 1-1 & 1 & -1 & \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$
(10)



DFT (10)식과 DCT-II (13)식을 보면, 각 Inverse는 DFT일 경우 Element-wise Inverse인데 DCT-II의 경우 Transpose가 Inverse이다.

그런데, DCT-II를 Jacket 행렬 기반으로 분해 해 보면((14)식) Block-wise Inverse가 됨을 알 수 있다. 따라서, Block-wise Inverse와 Element-wise Inverse의 동일점은 행렬 Dimension 확장이 공통된다는 점이다. 여기에 착안, 공동 H/W 구조를 (그림 6)처럼 제안했다.

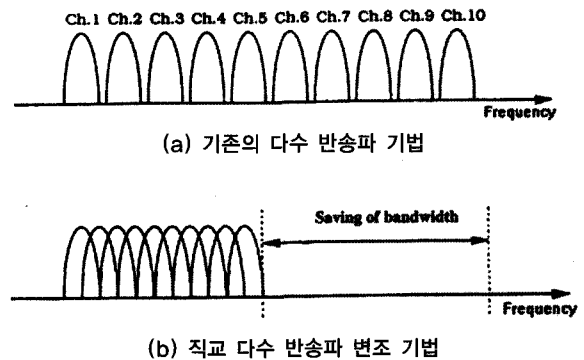
#### IV. 왜 직교 푸리에 분할 다중화 (OFDM)인가?

푸리에가 나폴레옹 황제에게, “각하, 푸리에 행렬은 100년 후 후손들을 먹여 살릴 획기적인 기술이 될 것입니다.” 한 듯한 말이 21세기에 현실로 되었다.

OFDM 전송방식은 전체 전송대역을 다수의 협대역 직교 부채널로 분할하여 각 부채널로 데이터를 동시에 전송하는 방식으로 변조와 복조를 각각 IFFT와 FFT를 사용하여 고속으로 구현할 수 있으며, 보호구간을 연속된 두 OFDM 심볼 사이에 삽입하여 심볼 사이의 간섭 및 채널 사이의 간섭을 제거할 수 있기 때문에 등화기의 구조가 매우 간단해 지는 장점이 있어 최근 고속의 전송시스템의 표준안을 채택되었다. OFDM은 디지털 오디오 방송(DAB)와 디지털 비디오 방송(DVB)의 전송방식의 표준안으로 채택되었으며, 최근 고속 무선 LAN의 표준안으로 채택되었다. 즉, OFDM은 고속 무선 LAN의 표준안인 IEEE 802.11a의 전송방식으로 채택되었으며, 유럽의 표준화기구인 ETSI BRAN의 HIPERLAN/2와 일본의 MMAC-PC에서 고속 무선 LAN의 공통된 물리계층 표준안으로 채택되었다. 또한, 광케이블과 기존의 전화선을 사용하여 유선망에서 고속의 데이터 전송을 위한 ADSL 및 VDSL(Zipper Duplexing)에서도 OFDM의 유선망 버전에 해당하는 DMT, 4G 표준으로 채택되었다 [14],[15].

즉, 직교 푸리에 다중 분할(Orthogonal Frequency Division Multiplexing)이다. OFDM은 다수 반송파 전송(multicarrier transmission)의 특수한 형태로 볼 수 있으며 하나의 데이터열이 보다 낮은 데이터 전송률을 갖는 부반송파

를 통해 전송된다. OFDM은 변조기술(modulation technique)과 다중화 기술(multiplexing technique)의 두 가지 형태로 볼 수 있다. OFDM을 사용하는 중요한 이유 중 하나는 OFDM을 사용하면 주파수 선택적 페이딩(frequency selective fading)이나 협대역 간섭(narrowband interference)에 대한 강건함(robustness)이 증가하기 때문이다. 단일 반송파 시스템(single carrier system)에서는 하나의 페이드(fade)나 간섭에 의해 전체 링크가 실패할 수 있지만 다수 반송파 시스템에서는 일부 부반송파만이 영향을 받게 된다. 따라서, 오류정정부호화(forward error correction coding)를 사용하면 소수의 오류 부반송파를 정정할 수 있다. 병렬 데이터 전송과 주파수 다중화를 사용하는 개념은 1960년대 중반에 발표되었다 [6],[10],[11]. 몇몇 초기 개발은 1950년대로 거슬러 올라간다. 1970년 1월에는 U.S. 특허가 공표되었고 초기에 개발된 다수 반송파 기법과 중첩된 다수 반송파 기술을 그림에 보이듯이 중첩된 다수 반송파 변조 기법이 약 50% 대역폭이 절약된다 [7],[8].



(그림 7) OFDM 신호의 개념

1980년대에 OFDM은 고속 모뎀, 디지털 이동 통신, 고밀도 기록(high-density recording)을 위해 연구되었다. OFDM기술을 구현한 시스템 가운데 하나는 DFT를 사용한 다중화 된 직교 진폭 변조(Quadrature Amplitude Modulation, QAM)이다. 또한, 파일럿 부호(trellis coding)를 구현한 시스템도 구현되었다. 이와 함께 다양한 속도의 모뎀이 전화망에서 개발되었다.

1990년대에 OFDM은 이동 통신 FM 채널, 고속 디지털 가입자 회선(High-bit-rate Digital Subscriber Line : HDSL ; 1.6 Mbps), 비대칭 디지털 가입자 회선(Asymmetric Digital Subscriber Line : ADSL ; 6 Mbps까지), 초고속 디지털 가입자 회선(Very-high-speed Digital Subscriber Line : VDSL ; 100 Mps), 디지털 오디오 방송(Digital Audio Broadcasting: DAB), 고선명 텔레비전 지상파 방송(high-definition television terrestrial broadcasting) 등의 광대역 데이터 통신을 위해 연구되었다 [13]. 3GPP LTE에서는 기존 3GPP에서의 WCDMA 무선 접속 기술을 이용하는 대신에 하향링크에 OFDMA 방식과 상향링크에 SC-FDMA 방식을 사용한다.

한편, OFDM 전송방식은 다음과 같은 중요한 장점을 갖는데, OFDM은 다중 경로를 다루는 효율적인 방법이다. 특정 지연확산에 대한 구현의 복잡도는 등화기를 갖는 단일 반송파 시스템에 비해 낮다. 상대적으로 느린 시변 채널에서 특정 부반송파에서의 신호 대 잡음 전력비(Signal-to-Noise Ratio: SNR)에 따라 각 부반송파에 대한 데이터 전송률을 적응적으로 조절하여 전송 용량을 크게 향상시킬 수 있다. OFDM에서는 협대역 간섭이 일부 부반송파에만 영향을 주기 때문에 협대역 간섭에 강하다. OFDM은 단일 주파수망이 가능하며 이것은 특히 방송용에 장점으로 작용한다. 반면에 OFDM은 단일 반송파 변조와 비교하여 몇 가지 단점을 가진다. OFDM은 반송파의 주파수 오프셋(frequency offset)과 위상 잡음(phase noise)에 보다 민감하다. OFDM은 상대적으로 큰 첨두 전력 대 평균 전력 비(Peak-to-Average Power Ratio, PAPR)를 가지며, 이는 RF 증폭기의 전력효율을 감소시킨다.

## V. 결론

신호 정보의 역사를 추적했다. 「만들린을 든 소녀」에서 푸리에 급수를 볼 수 있다. 예를 들어, 피카소(1910) 그림에 보듯 삼각파로 그린 푸리에 논문은 1807년에 학회지에 제출되었으나 수락되지 못해 15년이 지난 1822년에 발표되었다. 그 푸리에 행렬이 오늘날 OFDM으로 각광을 받는 것은 과학 역사의 아이러니이다. 원천적인 기술은 세월에 지나야 보석

처럼 빛이 나는 것을 확인할 수 있었다. 현안 연구로 OFDMA, SC-FDMA, MC-OFDM, MIMO-OFDM, CR-OFDM 등 연구가 활발히 진행되고 있다. 또한, 다변수 DFT, 융합 DFT-DCT의 새로운 연구 방향을 제시했다.

## 감사의 말씀

본 연구는 한국 연구 재단(NRF)의 '세계 수준의 연구 중심 대학(World Class University) 육성 사업(R32-2009-000-20014-0)' 과 '기초 연구 사업(Fundamental Research 2010-0020942)' 의 지원을 받아 수행되었음.

## 주 석

- 1) Euler(1707~1783 스위스 수학자)

$$\text{오일러 공식 : } \cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$$

$$\cos \theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$$

(오일러는 푸리에 계수를 구하기도 했다.)

- 2) 선형 시불변은 신호와 시스템을 분석하는 기본이다. 즉 많은 물리적 작용을 모델로 할 수 있어, 시스템을 자세히 분석할 수 있다.

- 3) 푸리에 시리즈 :  $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}$  ( $n=0,1,2,\dots$ )

$$\text{푸리에 변환 : } x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- 4) 프랑스 수학자 라플라스(1749~1827)

$$X(S) = L[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

## 부 록

식 (7)에서 대각 채널 행렬은

$$[H]_N = [J]_{N/2} \otimes [J]_2 \quad (\text{A-1})$$



여기서,

$$\begin{aligned}
 [J]_2 &= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -i \sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & i \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.8881 & -0.3251+0.3251i \\ 0.3251+0.3251i & 0.8881 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.9659-0.2588i & 0 \\ 0 & -0.2588+0.9659i \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.8881 & 0.3251-0.3251i \\ -0.3251-0.3251i & 0.8881 \end{bmatrix} \\
 &= UAU^{-1}
 \end{aligned}$$

(A-2)

4×4경우 : (A-1)에서,

$$[H]_4 = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 & i \end{pmatrix} = [J]_2 \otimes [J]_2 \quad (A-4)$$

(A-3)

로 (A-1)이 일반식이 된다. 여기서 (A-3)식은 Inverse가 Element-wise이고 (A-4)식은 Block-wise이다.

채널의 고유값 분해(Eigen Value Decomposition, EVD)는 행렬의 계수(Rank)가 r인 행렬  $H \in C^{N_r \times N_r}$ 의 특이값 분해(Singular Value Decomposition, SVD)는,

$$H = U \Sigma V^H \quad (A-4)$$

여기서  $U \in C^{N_r \times r}$ ,  $V \in C^{N_r \times r}$ ,  $U^H U = V^H V = I$ ,  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ ,  $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r-1$ 이다.

H의 특이값 분해는 고유값 분해와 관련,

$$HH^H = Q \Lambda Q^H \quad (A-5)$$

여기서,  $Q^H Q = Q Q^H = I_{N_r}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_r}\}$ ,  $\lambda_i \geq 0$  (A-5)와 (A-6)에서  $Q=U$ 라 가정하면,

$$\lambda_i = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{if } i = 1, 2, \dots, r \\ 0, & \text{elseif } i = r+1, \dots, n_{N_r} \end{cases} \quad (A-6)$$

따라서, 다중 송수신 안테나 시스템(MIMO)의 채널 전력 이

득은,

$$\begin{aligned}
 \|H\|_F^2 &= \text{Tr}(HH^H) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} |h_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i = \|HH^H\|_F \\
 &= \|A\|_F.
 \end{aligned} \quad (A-7)$$

### 참고 문헌

- [1] 이문호, 뿌리 찾는 정보 통신 이야기, 김영사, 1994.
- [2] Moon Ho Lee, "High Speed Multidimensional Systolic Arrays for Discrete Fourier Transform", IEEE Transactions on Circuit and System, vol. 39, no. 12, December 1992.
- [3] S. Bouguezzel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy, "New Parametric Discrete Fourier and Hartley Transforms, and Algorithms for Fast Computation", IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 58, no. 3, March 2011.
- [4] Moon Ho Lee, M. M. Matalgah, and Wei Song, "Fast method for precoding and decoding of distributive multi-input multi-output channels in relay-based decode-and-forward cooperative wireless networks", IET Communications, vol. 4, no. 2, pp. 144-153, January 2010.
- [5] Moon Ho Lee, "A Novel Class of Element-wise Inverse Jacket Transform with Many Parameters", Algebraic & Combinatorial Coding Theory(ACCT 2010), September 5-11, 2010, Russia.
- [6] Moon Ho Lee, X. D. Zhang, Wei Song, and X. G. Xia, "Fast Reciprocal Jacket Transform with Many Parameters", Accepted in IEEE Transactions on Circuits and System- I, Regular paper.
- [7] R. R. Mosier and R. G. Clabaugh, "Kineplex: A Bandwidth Efficient Binary Transmission System", AIEE Trans. Part 1: Communications & Electronics, vol. 76,

pp. pp 723-728, January 1958.

- [8] R. W. Chang, "Orthogonal Frequency Division Multiplexing," U.S. Patent 3,488,445, filed Nov. 4 1966, issued Jan. 1970.
- [9] S. B. Weinstein and Paul M. Ebert, "Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform," IEEE Transactions on communication technology, vol. COM-19, no. 5, pp. 628-634, October 1971.
- [10] Zou, W. Y., and Y. Wu, "COFDM: an Overview," IEEE Transactions Broadcasting, vol. 41, no. 1, pp. 1-8, March 1995.
- [11] Porter, G. C., "Error Distribution and Diversity Performance of a Frequency Differential PSK HF Modem", IEEE Transactions on communication technology, vol. COM-16, pp. 567-575, August 1968.
- [12] M. S. Zimmerman and A. L. Kirsch, "The AN/GSC-10(KATHRYN) Variable Data Modem for HF Radio", IEEE Transactions on communication technology, vol. COM-15, pp. 197-205, August 1967.
- [13] Hirosaki, B., "An Orthogonally Multiplexed QAM System Using the Discrete Fourier Transform," IEEE Transactions on communication technology, vol. COM-29, pp. 982-989, July 1981.
- [14] S. Hara, M. Mouri, M. Okada and N. Morinaga, "Transmission Performance Analysis of Multi-Carrier Modulation in Frequency Selective Fast Rayleigh Fading Channel," Wireless Personal Communications, Kluwer Academic Publishers, vol. 2, pp. 335-356, 1996.
- [15] T. S. Rappaport, *Wireless Communication Principles & Practice*, Prentice-Hall PTR, New Jersey, 1996.
- [16] 조용수, 무선멀티미디어 통신을 위한 OFDM의 기초, 대영사
- [17] Goran S. Nikolic, Fourier Transforms-Approach to Scientific Principles, Chapter 8. D. Park, Moon Ho Lee "Orthogonal Discrete Fourier and Cosine Matrices for Signal Processing" INTECHWEB.ORG, 2011

## 약 령



이 문 호

1984년 전남대 전기공학과(공학박사, 통신기술사)  
 1985년 ~ 1986년 University of Minnesota 포스트 박사  
 1990년 동경대학 공학박사  
 1970년 ~ 1980년 남양 MBC 송신소장  
 1990년 ~ 2010년 전북대학교 전자정보공학부 교수  
 2010년 ~ 현재 전북대 WCU-II 연구책임 교수  
 관심분야 - 정보 통신의 원형, 뿌리찾는 연구