한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 2, 227-239, June 2011

삼각형의 외심 정의와 증명에 관한 고찰

변희현[1]

삼각형의 외심은 중학교 2학년에 처음 도입되는 논증기하의 부분에서 다루어진다. 증명을 통해 도형의 성질을 다루는 과정에 본질적으로 상당한 어려움이 내포되어 있긴 하나, 학생들은 교과서에서 다루는 외심과 관련한 명제의 증명을 학습하는데 특히 많은 어려움을 겪는다. 따라서 본 연구에서는 우리나라 교과서에서 다루는 외심의 정의와 증명을 오랜기간 논증기하의 교과서로 사용된 유클리드 원론 및 현행 미국 교과서의 방식과 비교함으로써 삼각형의 외심 지도에 관한 시사점을 끌어내고자 한다.

주요 용어: 외심, 외접원, 존재성, 유일성.

Ⅰ. 서론

현재 교육과정에 따르면 중학교 2학년 기하 영역에서 논증기하를 도입하여 주로 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 연구하기 위한 주요 방법으로 증명을 다루기 시작한다. 그러나 대부분의 학생들은 중학교 2학년에서 증명을 처음 학습하는데 많은 어려움을 겪으며, 중학교 2•3학년에서는 상당히 많은 시간을 할애하여 평면도형에 대한 증명을 다루고 있으나 증명을 제대로 이해하지 못할 뿐만 아니라 증명을 다루는 수업 시간을 가장 지루하고 따분한 시간으로 여기며 기계적인 방식으로 증명을 단지 암기하고 있다는 심각한 문제점이 지적된 바 있다(나귀수, 1998). 물론 증명이 이론적인 것을 추구한다는 점에서 본질적으로 상당한 어려움을 내포한다는 점도 그 원인 중의 하나가 될 수 있으나, 교수 학습 방법에서 개선해야 할 부분은 없는지를 살펴보는 것 또한 필요하다.

본 연구에서는 특별히 중학교 2학년에서 다루는 삼각형의 성질 중 외심에 관한 증명을 이해하는데 학생들이 많은 어려움을 겪는 점에 주목한다. 관련한 선행연구들을 살펴보면 학생들의 부족한 이해 양상을 드러내는 연구(강남민, 2010; 전영준, 2007; 강윤수·서은정, 2009)와 교구 또는 컴퓨터 프로그램을 활용한 지도 방법의 연구(연제철, 2001; 장훈, 2008) 그리고 분석법을 이용한 증명 지도 방법의 보완 연구(이용민, 2000; 강윤수•서은정, 2009) 등이 있다. 그러나, 정작 학교에서 학생들이 학습하고 교사들이 가르치는 데 중심이 되는 교과서에서 외심을 다루는 방법에 대한 논의는 찾기 어려웠다. 이에 본 연구에서는 우리나라 교과서

1) 한국교육과정평가원 (bhhmath@kice.re.kr)

에서 외심을 전개하는 방식, 특별히 외심 정의와 관련 명제의 증명 범위를 논증기하 교과서로서 역사적으로 오랜시간 독보적인 지위를 누린 유클리드 원론 및 미국 교과서의 방식과 비교 분석하여 교수 학습 방법에의 시사점을 찾고자 한다.

본 연구를 위하여 설정한 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 오랫동안 논증기하를 지도하기 위한 교과서로 사용된 유클리드 원론에서는 삼각형의 외심과 관련한 명제를 어떻게 다루는가?

둘째, 미국과 한국 교과서의 외심 정의와 증명을 다루는 방식에는 차이가 있는가?

셋째, 삼각형의 외심을 지도하는데 도움을 줄 수 있는 시사점을 끌어낼 수 있는가?

Ⅱ. 유클리드 원론의 내용 분석

이 장에서는 첫 번째 연구문제를 해결하기 위해 유클리드 원론에서 삼각형의 외심을 어떻게 다루는지 살펴보았다. 중학교에서 다루는 논증기하는 2천년 전에 성인 수학자를 위해 쓴 유클리드 원론의 내용을 중학교 학생 수준에 맞추어 초등화한 것으로 공리계까지 지도하지는 않지만 도형의 몇가지 기본적인 성질을 받아들이고 삼각형의 합동조건과 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하도록 하는 유클리드 기하의 틀을 그대로 가지고 있으므로 삼각형의 외심과 관련한 원론의 내용을 살펴보는 것이 필요하다고 생각하였다(우정호, 1998, p.316).

유클리드 원론의 제4권 시작부분에는 다음과 같은 다각형과 원 사이에 존재하는 외접과 내접의 관계 정의로 시작한다(Heath, 1956, p.78).

3. 다각형의 모든 각이 원의 둘레에 있을 때 그 다각형은 원에 내접한다고 말한다.
4. 다각형의 모든 변이 원의 둘레에 접할 때 그 다각형은 원에 외접한다고 말한다.
5. 원의 둘레가 다각형의 각 변에 접할 때 그 원은 다각형에 내접한다고 말한다.
6. 원의 둘레가 다각형의 모든 각을 지나갈 때 그 원은 다각형에 외접한다고 말한다.[2)]

이어서 원론 제 4권에는 모두 16개의 정리(Proposition)와 그 증명이 제시되는데 그 내용은 다음과 같다(Heath, 1956, p.80-111).

정리1. 주어진 원에 지름보다 크지 않은 길이의 선분을 현에 위치시키기
정리2. 주어진 원에 주어진 삼각형과 각의 크기가 같은 삼각형을 내접시키기
정리3. 주어진 원에 주어진 삼각형과 각의 크기가 같은 삼각형을 외접시키기
정리4. 주어진 삼각형에 원을 내접시키기
정리5. 주어진 삼각형에 원을 외접시키기
정리6. 주어진 원에 정사각형을 내접시키기
정리7. 주어진 원에 정사각형을 외접시키기
정리8. 주어진 정사각형에 원을 내접시키기
정리9. 주어진 정사각형에 원을 외접시키기
정리10. 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 꼭지각의 크기의 2배인 삼각형을 작도하기

2) 정의 1. 2. 는 두 다각형 사이의 내접과 외접의 관계를 정의한 것으로 본 연구 내용의 범위를 벗어나므로 제시하지 않았다.

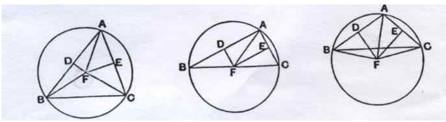
정리11. 주어진 원에 정오각형을 내접시키기
정리12. 주어진 원에 정오각형을 외접시키기
정리13. 주어진 정오각형에 원을 내접시키기
정리14. 주어진 정오각형에 원을 외접시키기
정리15. 주어진 원에 정육각형을 내접시키기
정리16. 주어진 원에 정십오각형을 내접시키기

위의 정리 1-16을 전체적으로 보면 유클리드 원론 제 4권에서는 다각형의 변의 개수를 점점 늘려 가면서 다각형과 원 사이의 내접 및 외접 관계를 다룸을 알 수 있다. 정리 2-5는 삼각형과 원 사이의 내접 및 외접 관계를 다루고 있고, 정리 6 이후로는 정다각형과 원 사이의 내접 및 외접 관계를 다루고 있다. 이는 삼각형을 제외한 임의의 다각형에서는 항상 내접하는 원과 외접하는 원이 존재하는 것이 아니기 때문이다. 그러나 유클리드 기하는 공리-연역적 방법으로 전개되는 것으로 이에 대한 발견의 과정은 드러내지 않고, 사각형 이상의 다각형에서는 원과 내, 외접 관계를 항상 말할 수 있는 정다각형과 원 사이의 관계를 다루고 있다. 즉, 유클리드 원론 제 4권은 크게 '임의의 다각형에 대하여 외접원과 내접원이 존재하는가?'와 '임의의 원에 대하여 특정한 특징을 갖는 외접 다각형과 내접 다각형이 존재하는가?' 라는 의문을 해결하는 과정에서 얻은 결과들을 연역적으로 제시한 것으로 판단된다.

이러한 점에 기초하면 삼각형의 외심은 원론 제 4권 정리 5에 해당하는 것으로, 본 연구에서 상정한 유클리드 원론 4권을 구성하는 내용의 축을 이루는 두 질문 중 '임의의 다각형에 대하여 외접원과 내접원이 존재하는가?'라는 질문의 첫 단계에 대응하는 것이고 자연스럽게 사각형, 오각형 등의 일반적인 다각형 문제로 사고를 확장할 수 있다.

유클리드 원론의 삼각형 외심과 관련한 정리 5 '주어진 삼각형에 원을 외접시키기'의 증명은 다음과 같다(Heath, 1956, pp.89-90).

ABC 를 주어진 삼각형이라 하자 ;
그러면 삼각형 ABC에 대하여 원을 외접시키는 것이 필요하다.



[그림 Ⅱ-1] 삼각형과 외접원 (Heath, 1956)

점 D와 E는 각각 변 AB와 AC의 중점이고 변 AB와 AC의 수직이등분선의 교점을 F라 하자;
점 F는 삼각형의 내부 또는 변 BC위 또는 변BC 밖에 위치한다.
첫째 F가 삼각형의 내부에 있는 경우 FB, FC, FA를 연결하면,
$\triangle ADF \equiv \triangle BDF$ 이므로
$\overline{AF} = \overline{BF}$
같은 방법으로 $\overline{CF} = \overline{AF}$ 임을 보일 수 있다.

$\therefore\ \overline{FB} = \overline{FC}$

따라서 세 선분 FA, FB, FC는 모두 서로 길이가 같으므로, F를 중심으로 하고 세 선분 FA, FB, FC 중 하나의 길이를 반지름으로 하는 원을 그리면 나머지 점들을 모두 지난다。이 원은 삼각형 ABC의 외접원이 된다.

둘째, 두 번째 그림과 같이 점 F가 변 BC위에 있다고 하자; 그리고 선분 AF를 연결하여라. 그러면 유사한 방식으로 점 F는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이 됨을 증명할 수 있다.

셋째, 세 번째 그림과 같이 점 F가 삼각형 ABC 밖에 있다고 하고 AF, BF, CF 를 연결하면,

$\triangle ADF \equiv \triangle BDF$ 이므로

$\overline{AF} = \overline{BF}$

같은 방법으로 $\overline{CF} = \overline{AF}$ 임을 보일 수 있다.

$\therefore\ \overline{BF} = \overline{CF}$

그러므로 F를 중심으로 하고 세 선분 FA, FB, FC 중 하나의 길이를 반지름으로 하는 원을 그리면 나머지 점들을 모두 지난다。즉, 삼각형 ABC에 대하여 원을 외접시킬 수 있다.

그러므로 주어진 삼각형에 대하여 원을 외접시킬 수 있다.[3)]

위의 증명은 임의의 삼각형 ABC 에 대하여 두 변 AB와 AC의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같으므로 외접원을 그릴 수 있음을 보이는 것으로 외접원의 존재성을 나타내는 것이다. 그러나, 증명과 다른 두 변 즉 (AB 와 BC) 또는 (BC 와 AC)의 수직이등분선의 교점에서도 외접원을 그릴 수 있는지 나아가 다른 두 변의 수직이등분선의 교점에서도 외접원을 그릴 수 있다면 외접원은 여러 개가 존재하는 것인지 아니면 동일한 것인지에 대해서는 증명하지 않는다. 즉, 유클리드 원론에 있는 삼각형의 외심과 관련한 정리는 '주어진 삼각형에 원을 외접시키기'이므로 그 증명 또한 임의의 삼각형에 대한 외접원의 존재성에 그치고 있음을 확인할 수 있다.

Ⅲ. 미국 교과서의 내용분석

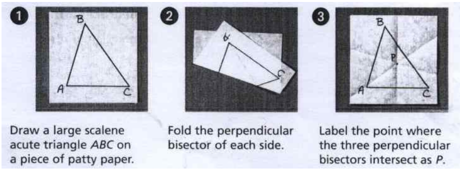
미국의 경우 중학교 기하교과서의 '삼각형 내에서의 관계(Relationships within Triangles)' 또는 '삼각형의 속성(Properties and Attributes of Triangles)' 등의 단원에서 삼각형의 외심을 다루고 있다. 본 연구에서 조사한 두 교과서 Holt Geometry와 Prentice Hall Mathematics Geometry[4)]에서는 모두 이 단원에서 삼각형의 외심, 내심, 무게중심과 수심을 다루는데, 이를 위해 먼저 셋 또는 그 이상의 직선들이 한 점에서 만날 때 그 직선들을 '**concurrent**' 라 정의하고, 직선들이 만나는 그 점을 '**point of concurrency**' 라 정의한다 (Burger et al., 2007, p.307; Bass et al., 2009, p.273). 그리고 삼각형에서 '**concurrent**' 한

3) 유클리드 원론에서는 증명이 끝난 후 외접원의 중심은 $\angle BAC$의 크기에 따라 삼각형의 내부, 변 위, 또는 외부에 존재함이 자명함을 언급한다 (Heath, 1956, pp.89-90).

4) 이하에서는 분석대상인 두 교과서 Holt Geometry와 Prentice Hall Mathematics Geometry를 순서대로 교과서 A와 B로 칭하기로 한다.

직선들의 집합은 4개가 있음과 이는 삼각형의 세 변의 수직이등분선, 세 내각의 이등분선, 세 중선, 세 꼭지점에서 대응변에 내린 수선들의 집합임을 언급하는데 교과서에서는 외심을 이러한 사실에 기초하여 다룬다.

두 교과서를 각각 살펴보면 먼저 A 교과서에서는 아래와 같은 종이접기 활동을 도입에서 시도한다.



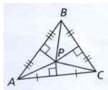
[그림 Ⅲ-1] 미국 교과서의 삼각형 외심 도입 활동

(Burger et al., 2007)

이로부터 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 알 수 있다고 언급하고 이 교점으로 삼각형의 외심을 정의한다. 그리고 나서, 외심과 관련한 다음의 정리를 제시하고 증명한다(Burger et al., 2007, p.307).

삼각형의 외심으로부터 삼각형의 각 꼭지점에 이르는 거리가 같다.

$PA = PB = PC$



즉, A 교과서는 삼각형에서 세 변의 수직이등분선의 교점으로 외심을 정의하나 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남은 종이접기 활동을 통해 파악할 뿐 논리적 증명은 시도하지 않는다. 그런데 외심으로부터 각 꼭지점에 이르는 거리가 같음은 증명함으로써 외심을 중심으로 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 외접원을 그릴 수 있음을 이해하도록 한다.

비교하여, B 교과서를 살펴보면 도입부에서는 A 교과서와 비슷한 종이접기 활동을 시도한 후 삼각형의 세 변의 수직이등분선에 대한 성질을 추측해보게 한다. 그리고 나서 다음의 정리를 제시한다.

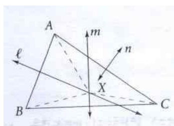
삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고 각 꼭지점에 이르는 거리가 같다.

(Bass et al., 2009, p.273)

그러나 정리의 증명은 연습문제로 돌린 후 다음과 같이 빈칸 채우기의 형태로 질문한다.

가정 : 직선 l, m, n은 삼각형의 세 변의 수직이등분선이다.
X는 l, m의 교점이다.
결론 : 직선 n은 점 X를 포함하고, $XA = XB = XC$

증명 : l은 (a. ?) 의 수직이등분선이므로 $XA = XB$ 이다.
m은 (b. ?) 의 수직이등분선이므로 $XB = (c.\ \ ?\ \ )$이다.



그러므로 $XA = XB = XC$ 이다.
$XA = XC$ 이므로, (d. ?) 정리의 역에 의해 점 X는 직선 n위에 있다.
(Bass et al., 2009, p.277)

B 교과서도 외심은 증명이 아닌 구체적 활동을 통해 파악한 'concurrent' 한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점으로 정의한다. 그러나 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한점에서 만남'과 '외심에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음'에 대한 명제의 증명은 교과서 본문이 아닌 연습문제에서 빈칸 채우기 형식으로 다룸을 알 수 있다. 빈칸 채우기 형식의 증명은 제시된 증명의 흐름에서 필요한 몇 부분만을 생각하면 되는 것으로 전체적인 증명의 방향과 논리를 학생 스스로 끌어내도록 하는 증명과는 많은 차이를 갖는다.

미국 A, B 교과서의 경우 삼각형에서는 4종류의 'concurrent'한 직선들이 존재함을 중요한 삼각형의 특성으로 다루고 이에 대응하는 'point of concurrency'로서 삼각형의 외심, 내심, 무게중심, 수심을 정의함을 알 수 있다. 다시 말하면, 외심은 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 만나는 한 점으로 정의한다. 이 때 삼각형에서 'concurrent' 한 직선들은 특별한 맥락없이 소개되는 형식을 취하므로 외심을 정의하는 단계에서는 외접원과의 관계를 상정하기 어려우며 증명의 결과 외심을 중심으로 외접원을 그릴 수 있음을 알게 하는 방식으로 전개된다.

이 때 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남은 반드시 논리적인 증명을 통해 인식하도록 하지는 않으나, 외심으로부터 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음은 A, B 교과서 모두 논리적인 증명을 시도한다. 즉, 미국 교과서에서 삼각형의 외심과 관련하여 다루는 증명은 세 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음 즉 외심을 중심으로 외접원을 그릴 수 있음에 대한, 바꾸어 말하면 외심을 중심으로 한 외접원의 존재성 증명에 더욱 중점을 두는 것으로 볼 수 있다.

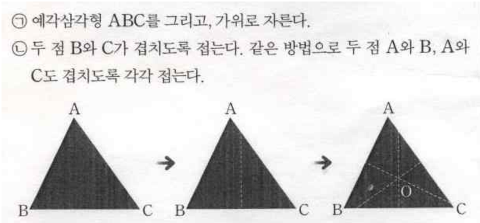
Ⅳ. 한국 교과서의 내용 분석

본 연구에서는 2007 개정 교육과정에 따른 중학교 2학년 교과서 중 15종[5)]을 대상으로 하여 교과서에서 삼각형의 외심을 도입하는 활동과 정의, 관련 명제의 증명 등을 비교한 결과 외심을 다루는 방식을 크게 두 가지로 구분할 수 있었다.

첫째, 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남에 관한 구체적 활동과 증명으로부터 외심을 다루는 방식으로 15종 중 12종의 교과서가 이에 해당한다 (강신덕 외 5인, 2010; 김원경 외 6인, 2010; 김홍종 외 3인, 2010; 박규홍 외 4인, 2010; 박영훈 외 5인, 2010; 신항균 외 3인, 2010; 윤성식 외 5인, 2010; 이강섭 외 4인, 2010; 이준열 외 5인, 2010; 정상권 외 6인, 2010; 정창현 외 4인, 2010; 최용준 외 5인, 2010). 외심을 도입하기 위한 구체적 활동은 다음과 같이 종이접기를 한 후 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만나는지를 확인하게 한다. 이외에 대부분의 교과서가 컴퍼스를 사용하여 세 꼭지점에 이르는 거리가 같은

5) 본 연구에서 분석 대상으로 한 중2 수학 교과서의 저자와 출판사는 다음과 같다. 김홍종 외 3인 : 성지출판(주), 정상권 외 6인 : (주)금성출판사, 신항균 외 3인 : (주)지학사, 김원경 외 6인 : 비유와상징, 윤성식 외 5인 : 더텍스트, 이강섭 외 4인 : 도서출판 지학사, 이준열 외 5인 : 천재교육, 박영훈 외 5인 : 천재문화, 최용준 외 5인 : 천재문화, 정창현 외 4인 : 대교, 박규홍 외 4인 : (주)동화사, 강신덕 외 5인 : (주)교학사, 우정호 외 9인 : 두산동아, 유희찬 외 7인 : (주)미래엔 컬처그룹, 박윤범 외 3인 : 웅진씽크빅.

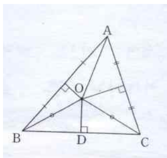
지도 확인하게 하나 이는 모든 교과서의 공통적인 활동은 아니다.



[그림 Ⅳ-1] 한국교과서의 삼각형 외심 도입 활동 1

(이강섭 외 4인, 2010)

이러한 활동을 통해 파악한 직관적으로 자명하지 않은 '삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다' 는 성질을 증명하도록 한다. 교과서 증명의 한 예를 제시하면 다음과 같다(김원경 외 6인, 2010, pp.196-197).



△ABC에서 두 변 AB, AC의 수직이등분선이 만나는 점을 O라고 하자.
점 O는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 수직이등분선 위의 점이므로
$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OA} = \overline{OC}$ ⋯ ①
이다.
이제 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라고 하면,
$\triangle OBD$ 와 $\triangle OCD$ 에서
$\angle ODB = \angle ODC = 90°$ ⋯ ②
$\overline{OB} = \overline{OC}$ ⋯ ③
$\overline{OD}$는 공통이므로 ⋯ ④
②, ③, ④에 의하여 $\triangle OBD \equiv \triangle OCD$
따라서 $\overline{BD} = \overline{CD}$ 이므로 점 D는 $\overline{BC}$의 중점이고 $\overline{OD}$는 변 $\overline{BC}$의 수직이등분선이다.
그러므로 세 변 AB, BC, AC의 수직이등분선은 한 점 O에서 만난다.

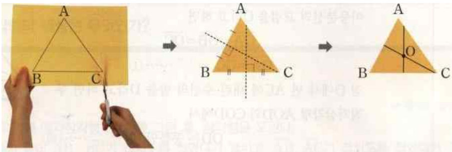
명제는 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'이나 증명은 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 나머지 변에 내린 수선이 그 변의 수직이등분선이 됨을 보이는 것으로 한다. 이는 세 직선이 한 점에서 만남을 직접 보이기는 어려우므로 이를 위해 두 직선의 교점을 먼저 생각한 후 나머지 한 직선이 그 교점을 지남을 순차적으로 보이는 것이다. 이와 같은 이유로 명제의 진술과 증명이 전개되는 방식에 차이가 존재함을 이해해야 하는데, 우정호는 '세 직선이 한 점을 지난다'는 것이 '한 직선이 다른 두 직선의 교점을 지난다'는 것과 같음을 아는 것은 중요한 진전임을 지적하였다(우정호, 2000, p.419).

또한, 위의 증명 내용을 꼼꼼히 살펴보면 ①로부터 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 임을 알 수 있고 이는 점 O를 중심으로 외접원을 그릴 수 있음을 의미한다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 ①까지의 증명이 유클리드 원론의 증명과 같은 것임을 알 수 있다. 그리고 ① 이하의 증명에서

는 두 변의 수직이등분선의 교점 O에서 나머지 한 변 BC에 수선의 발 D를 내리면 $\overline{OD}$가 $\overline{BC}$의 수직이등분선이 됨을 보임으로써 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다. 이를 외접원과 관련지어 생각해보면 전반부의 증명에서 삼각형의 세 변 중 AB, AC의 수직이등분선의 교점을 중심으로 외접원을 그릴 수 있음을 보였는데, 후반부의 증명으로부터 삼각형의 세 변 중 어느 두 변을 이용하여 수직이등분선의 교점을 구하여도 그 위치는 동일함을 의미하는 것이다. 즉, 주어진 삼각형에 대하여 외접시킬 수 있는 원의 중심은 유일함을 의미한다. 정리하면 교과서에서 다루는 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'의 증명에는 삼각형에 대한 외접원의 존재성과 유일성의 문제가 동시에 포함됨을 확인할 수 있다.

교과서에서 위의 명제를 증명한 후에 삼각형의 외심을 정의하는 경우 정의는 세 변의 수직이등분선의 교점 또는 외접원의 중심 두 가지로 이루어짐을 확인할 수 있다. 먼저, '삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점'으로 외심을 정의하는 경우는 증명에서 드러난 외심으로부터 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음을 기초로 외심이 곧 외접원의 중심이 됨을 이해해야 한다. 즉, 이는 삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 성질을 앞에 내세우고 이를 증명하는 과정에서 밝혀진 내용에 따라 외접원과 관련지을 수 있음을 보이는 것이다. 비교하여 다른 하나는 '외접원의 중심'으로 외심을 정의하나 증명에서 밝혀진 내용에 따라 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 곧 외심이 됨을 이해하는 것이다.

둘째, 교과서에서 외심을 다루는 또 다른 하나의 방식은 증명할 명제를 '삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'와 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다' 두 가지로 나누어 다루는 것으로 15종 중 3종의 교과서가 이에 해당한다(박윤범 외 3인, 2010; 우정호 외 9인, 2010; 유희찬 외 7인, 2010). 도입활동은 아래와 같은 종이 접기 또는 작도를 한 후 두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리의 비교를 통해 첫 번째 명제를 파악하도록 한다.

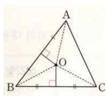


[그림 Ⅳ-2]한국교과서의 삼각형 외심 도입 활동 2

(우정호 외 9인, 2010)

이후 위와 같은 활동으로 파악한 '삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'는 명제를 증명한다. 세 교과서 모두 '선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 선분의 양 끝점에 이르는 거리가 같다'는 수직이등분선의 성질을 이용하여 증명하며 한 예를 제시하면 다음과 같다(우정호 외 9인, 2010, p.207).

△ABC에서 변 AB, BC의 수직이등분선의 교점을 O라고 하면,
점 O는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OA} = \overline{OB}$ … ①



또, 점 O는 $\overline{BC}$의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OB} = \overline{OC}$ ⋯ ②
①, ②에 의해 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 임을 알 수 있다.

이는 임의의 삼각형에 대하여 세 꼭지점에 이르는 거리가 같은 점이 존재함을, 바꾸어 말하면 세 꼭지점을 모두 지나는 원을 그릴 수 있음을 증명한 것이다. 이는 삼각형에 대한 외접원의 존재성을 증명한 것으로 이를 기초로 세 교과서는 모두 외접원을 정의하고 외접원의 중심으로 외심을 정의한다. 그리고 나서 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'는 명제의 증명을 다루는데 세 교과서 모두 첫 번째 방식으로 외심을 다루는 12종의 교과서 증명과 크게 다르지 않다. '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'는 명제를 외접원과 관련지어 생각한다면 외접원의 중심인 외심이 유일하게 존재함을 의미하는 것으로 앞서 첫 번째 명제의 증명으로 외접원의 존재성만을 보인 것과는 차별성을 갖는다. 그런데, 본 고 233쪽에 제시한 증명과 같이 교과서에서 외접원이 유일하게 존재함에 대한 증명은 존재성의 증명으로부터 시작하므로 첫 번째 명제의 증명이 두 번째 명제의 증명 전반부에 반복되어 나타나는 특징을 갖는다.

정리하면 우리나라 교과서에서 외심을 지도하는 방식을 관련 명제의 증명 측면에서 보면 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 삼각형에 대한 외접원의 존재성과 유일성의 문제를 하나의 명제 '세 변의 수직이등분선은 한점에서 만난다'를 통해 동시에 증명하는 방식이고 다른 하나는 '두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'는 명제로 존재성을 먼저 증명하고 나서 '세 변의 수직이등분선은 한점에서 만난다'를 통해 유일성을 증명하는 방식이다. 외접원의 존재성과 유일성의 문제를 분리하여 증명한 것은 명제의 증명을 삼각형과 원의 위치관계에서 가질 수 있는 의문에 대한 해결이라고 볼 때 의문을 제기하는 보다 실제적인 과정을 염두에 둔 것으로 판단된다. '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'는 증명은 외접원의 존재성과 유일성에 대한 의문을 동시에 해결하나 두 가지 의문을 동시에 제기하는 것은 쉽지 않다. 먼저 "임의의 삼각형에 대하여 외접원이 존재하는가?" 라는 의문을 제기하고 답을 찾은 후에 그렇다면 "임의의 삼각형에 대한 외접원은 유일한가?"라고 질문하는 것이 보다 실제적인 과정에 근사할 것으로 여겨진다. 따라서, 두 번째 방식으로 전개한 교과서는 이러한 의문을 상정하고 이에 대응하는 명제를 차례대로 다룬 것으로 판단된다.

이 때 첫 번째 방식으로 전개한 교과서는 외심 정의를 '세 변의 수직이등분선의 교점' 또는 '외접원의 중심'으로 하나 두 번째 방식으로 전개한 교과서는 모두 처음 명제의 증명을 통해 외접원의 존재성을 보인 후 '외접원의 중심'으로 외심을 정의한다.

Ⅴ. 결론

Ⅱ장에서 Ⅳ장의 분석을 통해 삼각형의 외심을 전개하는 방식을 살펴본 결과 유클리드 원론과 미국 교과서의 전개 방식은 많은 차이를 나타내며 한국 교과서의 전개 방식은 두 가지 방식이 혼용되는 것으로 보여진다.

유클리드 원론에서는 임의의 다각형에 대한 외접원의 정의를 먼저 한 후에 임의의 삼각형

에 대한 외접원의 존재성 정리와 그 증명을 다룬다. 즉, 유클리드 원론에서 외심과 관련하여 다루는 명제 '주어진 삼각형에 원을 외접시키기'의 증명은 삼각형에서 외접원의 존재성을 보이기 위해 두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음을 드러낸다.

미국 교과서에서는 삼각형의 주요한 특성으로 'concurrent'한 직선을 기초로 외심을 정의한다. 즉, 'concurrent'한 직선 중 하나인 세 변의 수직이등분선의 교점으로 외심을 정의하고 '외심으로부터 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'는 명제를 증명함으로써 결과적으로 세 변의 수직이등분선의 교점이 외접원의 중심이 됨을 이해하는 방식이다. 이 때 교과서에서는 특별한 맥락없이 삼각형의 성질로 'concurrent' 한 직선이 4종류가 존재함을 소개하므로 외심을 정의하는 단계에서는 외접원과의 관계를 상정하기 어려우며 증명의 결과 외심을 중심으로 외접원을 그릴 수 있음을 알게 하는 방식으로 전개된다. 또한 세 변의 수직이등분선이 'concurrent'한 직선인지의 여부는 반드시 증명하지 않으며 구체적 활동을 통해 파악하는 정도에서 그치나 외심으로부터 세 꼭지점에 이르는 거리가 같음은 모두 증명함을 확인할 수 있다. 즉, 삼각형의 외접원과 관련하여 존재성의 증명은 모두 다루나 유일성의 증명은 선택적으로 다룬다.

이상의 유클리드 원론 및 미국 교과서에서 외심을 전개하는 방식과 한국 교과서의 방식을 비교하면, 한국교과서에서는 삼각형과 외접원과의 관계를 이해하는데 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'는 명제의 증명을 중심에 두고 이로부터 삼각형에 대한 외접원의 존재성과 유일성을 모두 다루는데 유클리드 원론 및 미국 교과서에서는 존재성의 증명에 무게를 두는 것과는 대조를 이룬다.

또한 Ⅳ장에서 밝힌 한국 교과서에서 삼각형의 외심을 다루는 두 가지 방식 중 첫 번째는 명제 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남'을 중심에 두고 외심을 전개한다는 점에서는 미국 교과서의 전개방식과 유사한 것으로 판단된다. 그런데 외심 정의는 미국 교과서와 같이 'concurrent'한 세 변의 수직이등분선의 교점을 기초로 하는 것 외에 외접원의 중심으로도 이루어진다는 점에서 차이점을 갖는다. 외접원의 중심으로 외심을 정의하는 교과서의 전개 방식은 외접원 문제를 전제로 하고 이를 해결하기 위한 방편으로 명제와 그 증명을 다룬 것으로 본다면 비록 외접원의 유일성의 증명까지 포함되었다 하더라도 유클리드 원론의 방식과 유사한 것으로도 볼 수 있다. 그러나, 유클리드 원론에서 증명하는 명제 '주어진 삼각형에 원을 외접시키기'는 임의의 삼각형에 대한 외접원의 존재성에 대한 것임을 직접적으로 드러내는 반면 '삼각형의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다'는 명제는 외접원과의 관련성이 겉으로 드러나지 않는다. 또한 교과서에서는 증명하는 명제에 대응하는 삼각형과 원의 위치관계에서 가질 수 있는 구체적인 의문을 직접적으로 다루지는 않으므로 명제와 그 증명을 외접원과 관련하여 정확하게 이해하는 것은 어려울 것으로 판단되며 세부적으로는 명제에서 세 변의 수직이등분선을 다루는 맥락 등을 이해하는 것 또한 용이하지는 않을 것으로 보인다.

비교하여 Ⅳ장에서 밝힌 두 번째 방식에서는 첫 번째 방식에서 다루는 명제를 증명하기 전에 명제 '두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다'의 증명을 먼저 다룬다. 명제의 진술은 유클리드 원론과 차이를 보이나 외접원의 존재성에 관한 명제로 그 증명은 동일하다. 그리고 명제의 진술에 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다는 특성이 포함됨으로써 주어진 명제를 외접원과 연결지어 생각하는 것이 첫 번째 방식보다는 용이할 것으로 판단된다. 또한 증명하는 두 개의 명제 중 둘째로 하는 명제의 증명 중 전반부는 첫째로 하는 명제의 증명과 동일하고 후반부는 추가적인 증명이 이루어진다는 점에서 두 명제가 갖

는 의미 차이를 보다 잘 드러낼 수 있을 것으로 생각된다. 그러나 두 번째 방식에서도 증명하는 명제에 대응하는 삼각형과 원의 위치관계에서 가질 수 있는 구체적인 의문을 직접적으로 다루지는 않는다.

이상에서 논의한 한국 교과서의 특징을 바탕으로 외심 지도와 관련한 두가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 현재 교과서에서 다루는 삼각형의 외심이 유일하게 존재함에 관한 명제의 증명 내용이 증명을 처음 다루는 중학교 2학년 학생의 수준에 적정한 지에 관한 실증적 연구가 필요하며, 존재성 이외에 유일성도 반드시 증명을 통해 다루어야 한다면 학생들이 보다 의미있게 학습할 수 있는 현실적인 지도 방안에 대한 구체적인 연구가 필요하다. 실제로 본 연구에서는 예비교사인 서울 소재 사범대학 수학교육과 4학년 학생 3명에게 아래의 두 명제와 그 증명을 주고 비교하게 한 후 차이점을 질문함으로써 두 명제를 어떠한 방식으로 이해하는 지를 확인하고자 하였다.

명제 1 : 삼각형의 두 변의 수직이등분선의 교점에서 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다.
명제 2 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

예비교사들의 답변은 아래와 같다.

예비교사 1 : 두 명제는 같지만 표현이 다를 뿐입니다. 그리고 <u>명제 2는 명제 1에 비하여 외접원을 떠올리기가 매우 힘듭니다.</u>
예비교사 2 : 동치 명제라고 생각합니다. <u>명제 2는 직관적인 이해가 쉽지 않은데 비하여 명제 1은 수직이등분선의 성질을 조금만 생각해보면 학생들이 더 쉽게 이해할 것으로 생각합니다.</u> 동치 명제일지라도 학교에서 학생의 이해 정도를 고려하여 수업에 적용하려고 한다는 점에서는 차이가 있다고 생각합니다.
예비교사 3 : 동일한 맥락이므로 차이가 없다고 생각합니다.

답변을 살펴보면 예비교사들은 대체로 명제 1과 2를 동일한 것으로 파악함을 알 수 있다. 이는 예비교사들조차 두 명제를 모두 임의의 삼각형에 대하여 세 꼭지점에 이르는 거리가 같은 점의 존재 즉 외접원의 존재성 관점에서만 이해할 뿐 유일성의 관점에서 두 명제의 차이에 대한 이해는 부족함을 나타낸다. 따라서, 외접원의 존재성과 유일성의 문제를 모두 포함하는 명제의 증명을 학생들이 충분히 이해하는 것은 더욱 쉽지 않을 것으로 판단된다.

둘째, 외심과 관련하여 증명하는 명제를 학생들이 재발견할 수 있는 맥락을 좀 더 적극적으로 다루는 것이 필요하다. 현재의 교과서에서는 명제의 증명 전후에 외접원을 정의함으로써 주어진 명제가 삼각형의 외접원과 관련되어 있음을 파악할 수는 있으나 삼각형과 원의 위치관계에서 가질 수 있는 구체적이고 근본적인 의문인 ‘임의의 삼각형에 대하여 외접원이 존재하는가? 존재한다면 그 외접원은 유일한가?’ 와 명제를 연결하여 이해하는 것은 교과서에서 간접적으로 다루고 있다. 따라서, 교과서에서 다루는 명제의 증명을 학생 스스로 이러한 구체적인 의문에 대응하여 이해할 것을 기대하기는 어려운 것으로 여겨진다. 외심 관련 명제의 증명을 구체적인 의문과 연결짓고 이 과정에서 세 변의 수직이등분선을 다루는 맥락 등이 잘 드러날 수 있도록 지도하는 것이 필요한 것으로 생각된다.

참고문헌

강남민 (2010). 삼각형의 성질의 문제해결과정에서 발생하는 오류분석에 관한 연구 -외심과 내심을 중심으로-, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
강신덕 외 5인 (2010). 중학교 수학 2, (주)교학사.
강윤수・서은정 (2009). 삼각형의 내・외심 지도방법 연구, 한국학교수학회논문집 12(3), 171-188.
김원경 외 6인 (2010). 중학교 수학 2, 비유와 상징.
김홍종 외 3인 (2010). 중학교 수학 2, 성지출판(주).
나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 -중학교 기하 단원을 중심으로-, 서울대학교 대학원 박사학위논문.
박규홍 외 4인 (2010). 중학교 수학 2, (주)동화사.
박영훈 외 5인 (2010). 중학교 수학 2, 천재문화.
박윤범 외 3인 (2010). 중학교 수학 2, 웅진씽크빅.
신항균 외 3인 (2010). 중학교 수학 2, (주)지학사.
연제철 (2001). GSP를 활용한 중학교 기하교육에 관한 연구: 중학교 2학년 삼각형의 무게중심과 외심을 중심으로, 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.
우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.
우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.
우정호 외 9인 (2010). 중학교 수학 2, 두산동아.
유희찬 외 7인 (2010). 중학교 수학 2, (주)미래엔 컬처그룹.
윤성식 외 5인 (2010). 중학교 수학 2, 더텍스트.
이강섭 외 4인 (2010). 중학교 수학 2, 도서출판 지학사.
이용민 (2000). 중학교 기하영역 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명 방법에 대한 연구 -중학교 2학년을 중심으로, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
이준열 외 5인 (2010). 중학교 수학 2, 천재교육.
장훈 (2008). 체험수학 - 교구를 이용한 삼각형의 내심과 외심지도, 한국수학교육학회 전국수학교육연구대회 프로시딩 제40회, 37-45.
전영준 (2007). 중학교 2학년 기하영역에 대한 학습실태 조사, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
정상권 외 6인 (2010). 중학교 수학 2, (주)금성출판사.
정창현 외 4인 (2010). 중학교 수학 2, 대교.
최용준 외 5인 (2010). 중학교 수학 2, 천재문화.
Bass, L. E., Charles, R. I., Hall, B., Johnson, A. and Kennedy, D. (2009). Prentice Hall Mathematics GEOMETRY, Boston: Pearson.
Burger, E. B., Chard, D. J., Hall, E. J., Kennedy, P. A., Leinwand, S. J., Renfro, F. L., Seymour, D. G., & Waits, B. K. (2007). Holt GEOMETRY, New York: Holt, Rinehart and Winston.
Heath, T. L. (1956). EUCLID The Thirteen Books of THE ELEMENTS Vol. 2 (Book 3-9), New York: Dover Publications.

A study on the definition and proof of the circumcenter of a triangle

Byun Hee-Hyun[6]

Abstract

The circumcenter of a triangle is introduced in logic geometry part of 8th grade mathematics. To handle certain characteristics of a figure through mathematical proof may involve considerable difficulty, and many students have greater difficulties especially in learning textbook's methods of proving propositions about circumcenter of a triangle. This study compares the methods how the circumcenter of a triangle is explored among the Elements of Euclid, a classic of logic geometry, current textbooks of USA and those of Korea. As a result of it, this study tries to abstract some significant implications on teaching the circumcenter of a triangle.

Key Words : circumcenter, a circumscribed circle, existence, uniqueness.

6) KICE (bhhmath@kice.re.kr)