한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 2, 179-198, June 2011

수학적 사고의 발달 메커니즘에 기초한 교과서 분석 연구

이환철[1] · 강옥기[2]

수학적 사고는 많은 학자들의 관심사항이었으며 지속적으로 강조되고 있는 주제 중 하나이다. 특히 우리나라 수학과 교육과정에서는 학생들의 수학적 사고 신장을 위한 교수 학습을 강조하고 있다. 본 연구에서는 수학적 사고의 발달 메커니즘을 정의하고 이를 중심으로 하여 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서를 분석하였다. 분석 결과 수학 교과서 집필자와 수학 교사는 학습해야 할 개념이 개념의 발달 과정의 어느 위치에 있는 개념이며, 어떠한 과정으로 발생하는지에 대한 면밀한 분석을 할 필요가 있으며, 이러한 요소를 반영되기 위해서 학습해야 할 개념과 관련된 개념의 흐름을 학생들에게 제시하고, '개념 만들기' 등과 같이 미래의 학습 개념을 추측해 볼 수 있는 활동을 제공해야 한다는 결론을 얻었다.

주요 용어 : 수학적 사고, 수학적 사고 발달 메커니즘, 수학 교과서 분석

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

인간의 인식을 수동적인 수용 과정으로 언급한 Kant 이전의 철학과는 달리 Kant 이후에는 인간을 인식의 주체로 삼고 인간의 능동적인 면을 강조하는 사상이 본류가 되었다(홍진곤 외, 1997). 인간의 능동성이 강조되면서 철학, 심리학 등의 학문 영역에서는 인식(認識)이라는 용어보다는 인지(認知)라는 용어를 사용하였고, 20세기 중반에 이르러서는 인간의 정신적 구조 자체를 연구의 대상으로 삼는 인지주의와 구성주의 심리학이 등장하게 되었다. 특히 Piaget는 인간이 지식을 구성함에 있어 특정한 단계를 거치면서 인지가 발달한다고 하는 인지 발달 단계 이론을 발표하였다. 또한 후속 연구로서 Piaget & Garcia(1983)는 개념의 역사 발달 메커니즘과 심리 발생 메커니즘은 일치하며, intra, inter, trans의 3단계를 거친다고 하는 인지 발

1) 홍익대학교사범대학부속여자중학교 교사, 성균관대학교 강사(singgri@hanafos.com)
2) 성균관대학교(okkang@skku.ac.kr)
본 논문은 이환철의 박사학위 논문 일부를 요약한 것입니다.

달 메커니즘을 발표하였다.

수학교육에서도 인간의 인지에 대한 관심이 시작되었다. 비록 행동주의적 관점이기는 하지만 1922년 Thorndike의 『산술의 심리학(Psychology of Arithmetic)』을 통해 시작되었으며(Ginsburg, 1983), Piaget를 비롯한 여러 연구자들의 인지 과정과 인지 발달에 관한 연구가 수학교육에도 영향을 끼쳐서 수학적 사고 과정과 발달에 관한 연구들(van Hiele, 1986; Hershkowitz et. al., 2001; Williams, 2002; Wood et. al., 2006)이 이루어졌다.

본 연구에서는 Piaget & Garcia(1983)의 인지발달 메커니즘을 기본으로 하고 수학적 사고 과정과 발달에 관한 다양한 연구들과의 공통점을 비교하여 수학적 사고의 발달 메커니즘을 정의하였다. 수학적 사고의 발달과 관련하여 인지 과학에서는 수학적 사고 학습 기술의 개발과 적용에 대해 연구하고 있다(이정모, 2010; Ginsburg, 1983). 또한 우리나라 수학과 교육과정에서는 수학적 사고력의 신장을 지속적으로 강조하고 있다. 특히 2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에서는 수학 교육을 통해 추구해야 할 총괄 목표의 하나로 수학적 능력 즉 수학적 사고력, 의사소통 능력, 문제해결 능력의 신장을 제시하고 있다. 교과용 도서 특히 교과서는 교육과정에 제시된 내용을 기반으로 하여 집필된다는 점에서 수학 교과서 집필자는 수학적 능력의 신장을 어떻게 교과서에 구현해 낼 것인가를 고민해야 한다. 따라서 본 연구에서는 우리나라 수학 교과서에 수학적 사고의 발달 메커니즘이 반영되어 있는지를 분석하고, 보다 적극적으로 반영하기 위해서는 어떠한 구성 요소가 필요한지에 대해 살펴보고자 한다.

2. 용어의 정의

1) 수학적 사고

인지심리학에서는 '사고'를 개념적 사고, 추리, 판단, 결정, 문제해결의 사고, 창의적 사고 등의 비교적 좁은 그러나 명확히 규정된 의미들을 사용한다(이정모 외, 2009). 그런데 이러한 사고의 종류에 관계없이 개념의 획득은 모든 학습과정의 토대가 되며, 획득된 개념은 추리, 판단, 문제해결, 의사결정, 창의성 등 모든 복합 사고의 형성에 중추적인 역할을 담당하게 된다는 점에서 사고의 기본 단위는 '개념'이다(신현정, 2000; Smith, 1988). '개념'이란 추상화의 결과이며(Skemp, 1987), 정신적 표상의 결과(Dreyfus, 1991; Medin & Rips, 2005)이다. 따라서 '사고'는 추상적 개념의 발생·발달 과정에 사용된다.

'수학적 사고'의 정의는 학자마다 다르다. '수학적 사고'가 문제해결에 있어 방법 또는 기술의 역할을 한다는 측면에서 문제해결의 사고와 관련하여 정의한 학자들도 있고(Polya, 1956; Mason & Johnston-Wilder, 2004; O'Daffer & Thornquist, 1993; 강완 외, 1998; 片桐重男, 1988), 수학적으로 사고하는 것과 같이 보다 포괄적인 의미로 정의한 학자들도 있다(Burton, 1984; 우정호, 1998; 강시중, 1975; Greeno, 1992). 또한 어떤 하나의 문장으로 정의하지 않고 기계적 사고, 기초적 사고, 비판적 사고, 창의적 사고의 네 가지 사고의 범주로 분류하거나(Krulik and Rudnick, 1993, 1996, 전평국 외, 2002 재인용), 원형적 모델(prototypical model)을 이용하여 정신분석적 접근, 계산적 접근, 인류학적 접근, 교육적 접근, 수학적 접근과 같이 5가지 방식으로 접근하기도 하였다(Sternberg et. al., 1996). 수학적 사고에 관한 다양한 정의에

도 불구하고 그 기본 단위는 '수학 개념'이다. 따라서 본 연구에서는 '수학적 사고'를 추상적 수학 개념의 발생・발달 과정에 사용되는 사고라고 정의한다.

2) 수학적 사고의 발달 메커니즘

진화주의의 등장으로 인해 인간의 발달에 관한 연구가 하나의 과학으로 성립되었고, 유기체의 지적 능력의 변화를 구조와 조직화의 개념으로 이해한 20세기 초 Baldwin의 연구로 인해 인지 발달이 과학의 관심사가 되었다. Piaget는 Baldwin의 사상적 전통을 실증적인 연구로 보여 주었으며 인식론과 생물학에 기초한 인간의 지적 능력의 변화가 발달이라는 것을 보여주었다(이익환 외, 1998). 이러한 Piaget의 초기 연구를 기반으로 하여 인지 발달에 관한 연구는 급속도로 발전하게 된다. Piaget는 Garcia와 함께 자신의 후기 연구를 통해 인지 발달의 공통적인 메커니즘에 관심을 갖고 수학, 과학 개념에 있어서의 역사 발달, 심리 발생적 메커니즘에 관한 연구를 하였다.

Piaget & Garcia(1983)는 기하학과 대수학 분야에 대하여 각각 개념의 역사 발달적인 측면과 심리 발생적인 측면으로 나누어 분석하였고 심리 발생과 역사 발달 사이에서 발견하려고 했던 공통적인 메커니즘은 절대적인 수준과는 상관없이 발달 수준의 규칙화된 과정이라고 하였다. 이는 수학 이론에서의 개념의 발달과 아동의 수학 개념의 발생 간에 존재하는 엄청난 수준 차이에도 불구하고 공통적인 발달 메커니즘을 가진다는 것을 의미한다(이홍숙, 1995). 일반적으로 Piaget의 이론을 수학의 역사발생과 개인에 있어서의 수학의 심리발생 사이의 역평행성을 보여주는 것으로 이해되지만 의식화의 측면에서는 심리발생과 역사발생에서의 개념 발달의 메커니즘이 평행하다는 것을 보여준다(민세영, 2002). 결과적으로 영역과 수준에 관계없이 triad라고 명명한 공통적인 발달 메커니즘 intra, inter, trans[3]의 세 단계를 가지며, trans 단계는 다른 개념의 intra 단계에 작용함으로써 세 단계는 무한히 반복되고, 각각 하위 구조-예를 들어 trans의 하위 구조로서 trans-intra, trans-inter, trans-trans 단계-를 가진다. intra 단계는 개념의 내적 또는 개별적인 요소를 다루는 분석 단계이고, inter 단계는 개념들 간의 외적 또는 변환 관계를 통해 새로운 개념을 형성하는 단계이고, trans 단계는 inter 단계를 통해 형성된 개념이 통합적 구조로서 구성되는 단계이다(Piaget & Garcia, 1983; 이홍숙, 1995; 민세영, 2002; Montangero et. al., 1997; 김청자 외, 2004).

한편, 수학적 사고의 발달에 관한 여러 연구들을 Piaget의 인지발달 메커니즘과 비교 분석해 볼 수 있다. van Hiele(1986)은 기하 사고 수준을 시각화 수준, 분석 수준, 비형식적 연역 수준, 형식적 연역 수준, 엄밀 수준으로 구분하였다(Burger et. al., 1986; 한태식, 1991; 황혜정 외, 2007). 시각적 외관에 주목하는 시각화 수준이나 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 분석 수준은 개별 도형에 대한 분석이 이루어지는 intra 단계이고, 도형 간의 관계를 파악하고 이해하는 비형식적 연역 수준은 개념 간의 관계를 이해하는 inter 단계이고, 기하의 연역체계를 이해하는 형식적 연역 수준이나 추상화된 기하 체제를 이해하는 엄밀 수준은 통합적 구조

3) Piaget & Garcia(1983)는 intra, inter, trans 단계마다 기하학 개념과 관련해서는 'figural', 대수학 개념과 관련해서는 'operational'이라는 표현을 각 단계의 이름 뒤에 붙여서 사용하였다. 또한 이를 통합하여 'object'를 붙여서 사용하기도 하였다. 본 연구에서는 어느 특정 영역이나 주제에 국한되지 않고 보다 포괄적인 의미에서 각 단계를 다루고자 하였다. 따라서 구분이 필요 없는 부분에서는 각 단계의 이름을 'intra', 'inter', 'trans'라고 하여 사용한다.

로 개념이 구성되는 trans 단계이다. 또한 Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus(2001)는 개념의 추상화 과정을 인식하기(recognition), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)으로 구분하였고, 이 구분을 Williams(2002), Wood et. al.(2006)는 인지적 복잡성(cognitive complexity)에 따라 보다 세분화하였다. 대표적으로 Wood et. al.(2006)의 연구를 분석해 보면, 인식 단계는 배운 아이디어나 알고 있는 전략으로 개념을 이해하는 단계를 포함하고 있으므로 주어진 개념의 내적 요소에 관심을 갖는 intra 단계이다. 다음으로 형성 단계는 다른 수학적 절차나 해결책과의 연결, 다양한 풀이 방법 등을 포함하고 있으므로 개념의 외적 관계를 통해 새로운 개념을 형성하는 inter 단계이다. 또한, Clark et. al.(1997)은 대학생들이 미적분학의 연쇄법칙(The Chain Rule)을 학습하는 데 있어서의 schema 구성에 관한 연구를 통해 schema의 발달이 intra, inter, trans의 단계를 따라 진행된다고 하였고, Baker et. al.(2000)은 미분에 관한 스키마의 발달 과정을 intra, inter, trans와 연결시켜 설명하였다. 이상으로부터 본 연구에서는 수학적 사고의 발달 메커니즘을 다음의 3단계로 정한다.

<표 Ⅰ-1> 수학적 사고의 발달 메커니즘

수학적 사고의 발달 메커니즘	설명
intra 단계	수학 개념의 내적 또는 개별적인 요소를 다루는 분석 단계
inter 단계	수학 개념들 간의 외적 또는 변환 관계를 통해 새로운 수학 개념을 형성하는 단계
trans 단계	inter 단계를 통해 형성된 수학 개념이 통합적 구조로서 구성되는 단계

Ⅱ. 연구의 실제

1. 연구방법

본 연구의 진행을 위해 먼저 연구를 위해 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치한다고 생각되는 개념의 흐름을 찾고자 하였다. 분석 대상 개념은 넓은 의미로서 개념의 발달이라는 측면에서 세 가지 개념이 각각 intra, inter, trans 단계의 개념으로서 발달되는 과정을 분석하는 것과 좁은 의미로서 개념의 발생이라는 측면에서 intra, inter, trans단계를 통해 하나의 개념이 발생되는 과정을 분석하기로 하였다. 수학적 사고의 발달 메커니즘을 이해하고 있는 수학교육과 교수 1명, 수학교육학 박사 1명과 1, 2차 협의를 하였다.

개념의 발달 과정을 분석하는 측면에서, 각각 intra, inter, trans의 단계에 해당하는 세 개의 개념으로 이루어진 흐름이 명확히 드러난다고 판단되는 예를 찾고자 하였고 1차 협의 결과 다음 <표 Ⅱ-1>과 같은 예가 제시되었다.

<표 Ⅱ-1> 개념의 발달 과정 분석 주제

trans	연립방정식과 일차함수	포물선의 기하적 정의	큰 수의 법칙	집합의 연산법칙	원의 방정식
inter	연립방정식의 해	이차함수와 이차방정식	수학적 확률	집합의 연산	원의 성질
intra	일차방정식의 해	이차함수의 그래프	경험적 확률	집합	원의 구성요소

위의 5가지 중에서 가장 적절한 것을 찾기 위해 2차 협의를 하여 두 가지를 선정하였다. 하나는 중학교 1학년과 고등학교 1학년의 첫 단원을 구성하고 있다는 중요성 때문에 집합, 집합의 연산, 집합의 연산법칙으로 이어지는 개념의 발달 과정을 선정하였고, 다른 하나는 교육과정 전반의 흐름을 판단하기 위해 초등학교, 중학교, 고등학교에 걸쳐 있는 내용을 분석하는 것이 필요하다는 이유 때문에 원의 구성요소, 원의 성질, 원의 방정식으로 이어지는 개념의 발달 과정을 분석 대상으로 선정하였다.

또한 개념의 발생 과정을 분석하는 측면에서, intra, inter, trans의 단계를 통해 새로운 개념이 발생하는 예를 찾고자 하였고 1차 협의 결과 1차 협의 결과 다음 <표 Ⅱ-2>와 같은 예가 제시되었다.

<표 Ⅱ-2> 개념의 발생 과정 분석 주제

집합의 연산	복소수	제곱근	삼각함수

위의 4가지 중에서 가장 적절한 것을 찾기 위해 2차 협의를 하여 두 가지를 선정하였다. 하나는 중학교 수학 개념으로부터 고등학교 수학 개념이 발생되는 예로써 중학교의 삼각비와 관련된 삼각함수의 개념 발생 과정을 선정하였고, 다른 하나는 제7차 교육과정부터 수학 교과서에서 보편적으로 사용하고 있는 수학적 활동을 통해 개념이 발생되는 예로써 제곱근 개념의 발생 과정을 선정하였다.

이러한 과정을 통해 선정된 4가지의 종류의 분석 대상 개념은 다음 <표 Ⅱ-3>과 같다.

<표 Ⅱ-3> 교과서 분석 대상 개념

목적	분석 대상 개념
개념들의 발달 과정 분석	[분석 대상 1-1] 집합, 집합의 연산, 집합의 연산법칙
	[분석 대상 1-2] 원의 구성요소, 원의 성질, 원의 방정식
하나의 개념 발생 과정 분석	[분석 대상 2-1] 삼각함수
	[분석 대상 2-2] 제곱근

정해진 네 가지 종류의 분석 대상 개념 각각에 대하여 2007 개정 수학과 교육과정에 제시되어 있는 학습 목표와 교육과정 해설서의 내용을 조사한 후, 개념의 발생과 발달 과정에서 수학적 사고의 발달 메커니즘이 반영되어 있는지에 대해 교과서 분석을 실시하였다.

2. 연구대상

분석 대상에 포함된 수학교과서는 초등학교 3학년, 중학교 1학년, 중학교 3학년, 고등학교 1학년에 해당하는 것으로 초등학교 3학년은 국정교과서 1종, 중학교 1학년 14종, 중학교 3학년 14종, 고등학교 1학년 16종이었다. 중학교 1학년, 중학교 3학년, 고등학교 1학년 교과서의 경우 분석의 편의성을 위해 코딩하였다. 이를 정리하면 다음 <표 Ⅱ-4>와 같다.

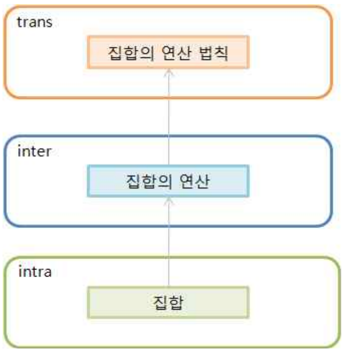
<표 Ⅱ-4> 분석한 수학교과서의 대상 학년과 종 수

대상 학년	대상 수학교과서의 종 수
초등학교 3학년	국정교과서
중학교 1학년	14종(A_1, A_2, A_3, ⋯, A_{13}, A_{14})
중학교 3학년	14종(B_1, B_2, B_3, ⋯, B_{13}, B_{14})
고등학교 1학년	16종(C_1, C_2, C_3, ⋯, C_{15}, C_{16})

3. 연구결과

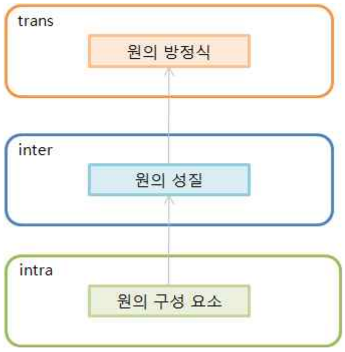
1) 개념들의 발달 과정은 수학적 사고의 발달 메커니즘을 따르는가?

교육과정 해설서와 교과서의 내용을 분석해보면, [분석 대상 1-1]인 집합, 집합의 연산, 집합의 연산 법칙의 학습 내용은 오른쪽 [그림 Ⅱ-1]과 같이 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치하는 것으로 판단된다. intra 단계의 학습 내용은 모두 집합의 내적인 관계에 대해 분석하는 것이다. 즉, 집합이란 무엇이고 집합의 구성 요소는 무엇이며 각각을 명확히 표현하고, 집합의 구성 요소인 원소를 분석하여 그에 따라 집합의 종류를 구분하는 내용이다. inter 단계의 학습 내용은 두 집합 사이의 외적 관계에 대한 분석을 통해 새로운 개념을 형성하는 단계이다. 즉, 두 집합 사이에 발생할 수 있는 연산에 대해 직관적으로 개념을 이해하는 단계로 아직은 구조화되지 않은 단계이다. trans 단계의 학습 내용은 직관적으로 접근했던 집합의 연산에 대해 구조적으로 접근하는 것이다. 즉, 집합의 연산을 연산법칙이라는 구조에 의해 일반화하여 사용하는 내용이다.



[그림 Ⅱ-1] 집합 개념의 발달 과정 분석

또한 [분석 대상 1-2]인 원의 구성요소, 원의 성질, 원의 방정식의 학습 내용도 오른쪽 [그림 Ⅱ-2]와 같이 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치하는 것으로 판단된다. intra 단계의 학습 내용은 모두 원의 내적인 관계에 대해 분석하는 것이다. 즉, 원이란 무엇이고 원의 구성 요소는 무엇이며 구성 요소 사이의 관계는 무엇인지에 대한 내용이다. 초등학교 3학년 내용 뿐 아니라 중학교 1학년의 원의 성질 단원의 첫 부분은 현, 호, 부채꼴, 활꼴, 중심각과 같은 원의 구성 요소에 대해 학습한다. inter 단계의 학습 내용은 원과 직선, 두 원과 같이 원과 어떤 도형의 외적인 관계에 대해 분석하는 것이다. 즉, 원과 직선 사이의 위치 관계, 두 원 사이의 위치 관계, 원에서 현에 관한 성질, 원에서의 비례 관계 등의 내용이다. trans 단계의 학습 내용은 이전 단계에서 학습한 내용은 기하 영역과 대수 영역과의 연결을 통해 보다 구조적인 개념으로 접근하는 것이다.



[그림 Ⅱ-2] 원의 개념 발달 과정

[분석 대상 1-1], [분석 대상 1-2]에 대한 분석 결과, 대상 모두 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치한다고 판단된다. 그러나 교과서 내용을 세부적으로 분석해 보면 몇 가지 문제점을 확인할 수 있다. [분석 대상 1-1]에서 C_2 교과서는 trans 단계의 '집합의 연산법칙'의 첫 부분인 교집합의 교환법칙을 설명하면서 inter 단계의 '집합의 연산'의 교집합 부분에서 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$와 같이 조건제시법으로 나타내는 것을 배웠다고 하면서 본문을 전개했다. 그러나 중학교 1학년의 14종 교과서에서 교집합 내용을 분석한 결과는 다음 <표 Ⅱ-5>와 같다.

<표 Ⅱ-5> 교집합을 조건제시법으로 나타내는 방식 분석

	교집합을 조건제시법으로 나타내는 방식	대상 교과서
방법1	본문에서 조건제시법으로 나타내었다.	A_3, A_4, A_5, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}
방법2	본문에 참고 표시를 하여 조건제시법으로 나타내었다.	A_1, A_2
방법3	여백을 이용하여 조건제시법으로 나타내었다.	A_6, A_{11}

분석 결과, 본문에서 교집합을 조건제시법의 형태로 나타낸 것은 분석 대상인 14종의 교과서 중 10종이고, 나머지 4종은 본문 문장으로 제시한 것이 아니라 참고 표시를 하여 제시한 것이거나 여백에 제시한 것이다. 본문 문장으로 제시하지 않았다고 해서 중학교에서 배우지 않았다고 말할 수는 있는 것은 아니지만 필수 학습 요소가 아니며 교육과정에서도 제시되어 있지 않다는 점에 각각의 개념을 도입하는 단계에서 고려해야할 사항이다. 따라서 '중학교에서 배운 교집합의 정의로부터 조건제시법으로 나타내면'과 같은 표현을 통해 조건제시법을 언급하는 형태로 하여 설명하는 방안을 고려하는 것이 옳다.

또한 [분석 대상 1-1]에서 intra 단계의 집합에 대한 분석은 inter 단계를 거쳐 trans 단계에 이르게 하는데 중요한 역할을 한다. 따라서 학교 수학에서는 intra 단계에서 집합의 구성 요소들을 언급함에 있어 inter, trans 단계와 관련 있는 것을 언급해야 한다. 그러나 중학교 1학년 집합 단원에서 배운 용어와 기호 중 대부분이 이후의 중학교 과정에서 거의 사용되지 않는다(조예은, 2008). 한국교육과정평가원(2000)은 이와 유사한 의견을 제시하였다.

> 중학교에서 집합은 다른 영역의 내용과의 연계성이 비교적 적을 뿐만 아니라 기본적인 연산을 중학교에서 도입하고 그 연산의 성질과 법칙은 고등학교에서 다루기 때문에 고등학교에서 다시 반복 설명하여야 하는 불편함이 있으며, 집합의 원소의 개수를 구하는 문제 등은 중학교 학생들이 이해하기 어렵다. 따라서 우선 중학교에서는 집합의 뜻과 표현 정도만 간단히 다루도록 하거나 집합에 관한 내용을 고등학교에서 모두 다루는 방안에 대하여 좀 더 논의할 필요가 있다.

또한 이경화 외(2002)는 집합론이 여전히 학문으로서의 수학의 기초를 이루고 있을지 모르나 현재 중학교 수학의 집합 단원은 중학교 수학의 기초가 아니라고 하면서 중학교 1학년 집합 단원의 재구성하는 안을 제시하기도 하였다.

본 연구의 수학적 사고의 발달 메커니즘과 관련하여, 집합 단원에서 배운 용어와 기호 중에서 중학교 전 영역에 걸쳐 다시 언급되지 않는 것이 존재한다는 것은 중학교 1학년의 집합 단원의 내용 중에서 intra 단계로서 작용하기 어려운 것이 존재한다는 것이다. 따라서 다른 개념과의 연결을 통해 inter 단계에 진입하기 위해 중학교 학생들의 수학적 사고 수준에서 필요한 용어와 기호를 중심으로 재구성될 필요가 있으며, 이 때 어떤 개념과 밀접하게 위치해야 하는지도 고려되어야 한다.

2) 하나의 개념의 발생 과정은 수학적 사고의 발달 메커니즘을 따르는가?

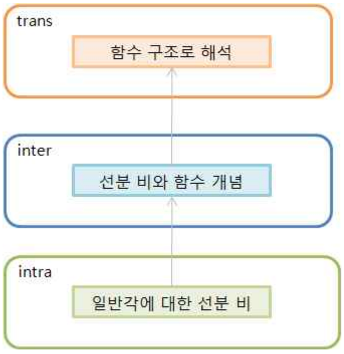
[분석 대상 2-1]은 삼각함수의 개념 발생 과정으로, 고등학교 1학년 16종의 교과서에서 어떠한 방법으로 본문 전개를 하여 삼각함수 개념의 발생을 전개하였는지에 대해 분석하였다. 이를 정리하면 다음 <표 Ⅱ-6>과 같다.

<표 Ⅱ-6> 삼각함수 도입 과정 분석

	삼각함수 도입 과정	대상 교과서
도입1	삼각비의 확장 언급 → 일반각에 대한 선분의 길이의 비 → 함수임을 언급 → 삼각함수 정의	C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_7, C_9, C_{10}, C_{12}, C_{13}, C_{15}
도입2	일반각에 대한 선분의 길이의 비 → 함수임을 언급 → 삼각함수 정의	C_6, C_8, C_{11}, C_{14}, C_{16}

도입1에 제시된 바와 같이 ‘삼각비의 확장 언급’ 부분을 제외하고는 16종의 모든 교과서가

동일한 방법으로 본문을 전개하고 있다. 삼각함수가 정의되는 과정을 분석해보면 오른쪽 [그림 Ⅱ-3]과 같이 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치하는 것으로 판단된다. 중학교에서 배운 삼각비가 임의의 예각에 대한 것이라면 일반각으로 확장하였을 때 sin, cos, tan에 해당하는 선분의 길이의 비를 탐구하는 단계가 intra 단계이고, sin, cos, tan에 해당하는 세 선분의 길이의 비가 각각 하나로 결정된다는 것을 인식하여 함수 개념과의 연결을 시도하는 단계가 inter 단계이고, inter 단계를 통해 형성된 개념이 함수로 구조화되어 삼각함수라는 개념이 구성되는 단계가 trans 단계이다.



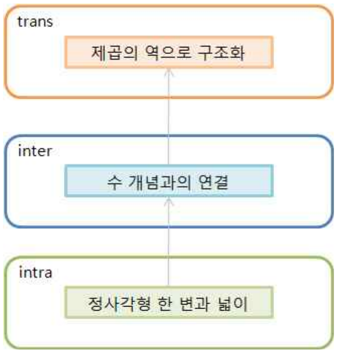
[그림 Ⅱ-3] 삼각함수의 개념 발생 과정

[분석 대상 2-2]는 제곱근의 개념 발생 과정으로, 중학교 3학년 14종의 교과서에서 어떻게 본문 전개를 하여 제곱근 개념이 발생시켰는지를 분석하였다. 이를 정리하면 다음의 <표 Ⅱ-7>과 같다.

<표 Ⅱ-7> 제곱근 도입 과정 분석

	제곱근 도입 과정	대상 교과서
도입1	정사각형의 한 변의 길이와 넓이 관계 → 두 수 사이의 관계로 해석 → 제곱의 역으로 구조화 → 제곱근 정의	B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}
도입2	x와 x^2의 관계 → 두 수 사이의 관계로 해석 → 제곱의 역으로 구조화 → 제곱근 정의	B_8

14종의 교과서 중에서 도입2에 해당하는 B_8 교과서를 제외하고는 13종의 교과서가 모두 동일한 방법으로 본문을 전개하고 있다. 이들 교과서에서 제곱근이 정의되는 과정을 분석해보면 오른쪽 [그림 Ⅱ-4]와 같이 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치하는 것으로 판단된다. B_8 교과서를 제외한 13종의 교과서를 대상으로 생각해 보면, 도입활동을 통해 정사각형의 내적 관계인 한 변의 길이, 넓이를 분석하는 단계가 intra 단계이다. intra 단계에서 탐구한 정사각형의 한 변의 길이와 넓이 사이의 관계를 추상화하여 수 개념으로 재해석하여 어떤 수와 그 수의 제곱의 관계로 인식하는 단계가 inter 단계이다. inter 단계를 통해 형성된 관계를 제곱의 역으로 구조화하여 제곱근의 개념이 발생하는 단계가 trans 단계이다.



[그림 Ⅱ-4] 제곱근의 개념 발생 과정

[분석 대상 2-1], [분석 대상 2-2]에 대한 분석 결과, 두 분석 대상 모두 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치한다고 판단된다. 그러나 세부적인 면에서 문제점이 나타났다. [분석 대상

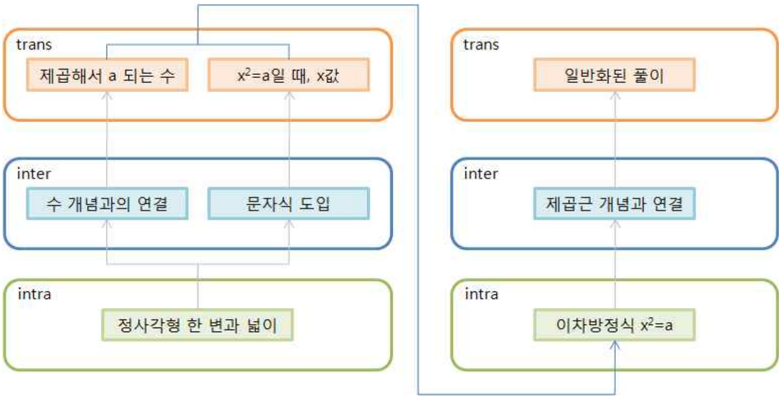
2-2]와 관련하여 중학교 3학년 14종 교과서에서 언급하고 있는 제곱근의 정의를 분석하면 다음의 <표 Ⅱ-8>과 같다.

<표 Ⅱ-8> 제곱근의 정의 분석

	제곱근의 정의	대상 교과서
정의1	어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2=a$일 때, x를 a의 제곱근이라고 한다	B_1, B_2, B_5, B_6, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{13}
정의2	어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, 즉 $x^2=a$를 만족하는 x를 a의 제곱근이라고 한다	B_7
정의3	음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$인 수 x를 a의 제곱근이라고 한다	B_{12}
정의4	제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다. 즉, $x^2=a$을 만족하는 x의 값이 a의 제곱근이다.	B_3, B_8
정의5	어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, x를 a의 제곱근이라고 한다. 즉, $x^2=a$을 만족하는 x의 값이 a의 제곱근이다.	B_4
정의6	음이 아닌 수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다	B_{14}

분석 결과, 정의1, 정의2, 정의3은 제곱근을 정의할 때 $x^2=a$를 사용하였고, 정의4, 정의5는 제곱근을 정의한 후 부연 설명의 형태로 $x^2=a$를 사용하였으며, 정의6은 $x^2=a$를 전혀 사용하지 않고 정의하였다. 어떤 개념을 정의한다는 것은 그 개념이 구조화되었음을 의미하므로 수학적 사고의 발달 메커니즘 중 trans 단계에 해당한다. 따라서 정의1, 정의2, 정의3과 같이 $x^2=a$를 사용하여 제곱근을 정의하였거나 정의4, 정의5와 같이 부연설명이지만 $x^2=a$를 사용하였다면 이를 이끌 수 있는 inter 단계가 있어야 한다. x와 x^2의 관계를 도입활동으로 제시한 B_8 교과서를 제외한 13종의 교과서는 교육과정 해설서에 언급되어 있는 예와 같이 정사각형의 한 변의 길이와 넓이의 관계를 기반으로 하는 도입활동을 제시하였다. 즉 정사각형의 내적 관계인 한 변의 길이, 넓이를 분석하는 것을 intra 단계로 사용한 것이다. 따라서 $x^2=a$를 정의에서 사용하려면 이를 유추해낼 수 있는 inter 단계가 교과서에 제시되어 있어야 한다. 따라서 $x^2=a$를 정의에서 언급하지 않은 B_{14}교과서를 제외한, 13종의 교과서를 분석하였다. 13종의 교과서 중 $x^2=a$를 이끌어 내기 위해 도입활동에서 x라는 문자를 사용하여 물음을 한 것은 B_4, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}의 7종이었다. 특히 본문에서 $x^2=a$를 이끌어 내기 위해 언급한 것은 B_{11}, B_{13}의 2종뿐이었다. 제곱근의 개념을 정의함에 있어 제곱근의 정의에 사용된 요소를 언급하는 단계가 부족하였음을 말하는 것이다.

한편, 수학적 사고의 발달 메커니즘의 원리에 의하면 trans 단계에서 구성된 개념은 새로운 개념의 intra 단계에 작용하여 무한 순환한다. 이는 Freudenthal이 말하는 본질이 다음 단계의 현상이 된다는 것과도 관련된다. trans 단계를 통해 구성된 제곱근의 개념은 '제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이' 단원의 intra 단계에 작용한다. 이를 도식화하면 다음의 [그림 Ⅱ-5]와 같다.



[그림 Ⅱ-5] 제곱근의 개념 발생 과정과 발달 과정 유형1

또한 B_{14}교과서와 같이 제곱근의 정의를 위한 intra, inter, trans 단계에서 $x^2=a$과 관련된 내용을 언급하지 않고 전개한 후 '제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이' 단원에서 언급하는 방법도 교과서의 내용을 구성하는데 있어 생각해 볼 필요가 있다. 이를 도식화하면 다음의 [그림 Ⅱ-6]과 같다.

[그림 Ⅱ-6] 제곱근의 개념 발생 과정과 발달 과정 유형2

14종의 교과서를 분석한 결과는 다음의 <표 Ⅱ-9>와 같다.

<표 Ⅱ-9> 제곱근의 개념 발생 과정에 대한 교과서 분석 결과

<그림 Ⅱ-10>에 속하는 교과서	B_4, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12}, B_{13}
<그림 Ⅱ-11>에 속하는 교과서	B_{14}
그 외의 교과서	B_1, B_2, B_3, B_5, B_6, B_7

제곱근의 개념 발생 과정에 대한 분석 결과, 14종의 교과서 중에서 수학적 사고의 발달 메커니즘이 적용된 교과서는 8종이었다. 나머지 6종의 경우 inter 단계에서 trans 단계로의 전이 과정에서 부족함이 나타났다. 따라서 교과서를 집필함에 있어 반드시 수학적 사고의 발달 메커니즘을 고려해야 한다. 다시 말해, intra, inter 단계에 해당하는 내용에 따라 trans 단계의 내용을 구성하는 것이 필요하며, 거꾸로 trans 단계의 내용에 알맞은 intra, inter 단계를 구성하는 것이 필요하다.

3) 발달 메커니즘의 단계 간의 전이 과정에는 어떤 방법이 사용되었는가?

[분석 대상 1-1]에서 inter 단계에 해당하는 '집합의 연산' 특히 '집합의 연산'의 첫 부분인 '교집합'의 개념을 학습하기 위한 도입 부분에서 intra 단계인 '집합'의 개념이 사용되었는지를 분석하였다. 14종의 교과서 모두 '교집합'의 개념을 도입하는 데 있어 두 집합 A, B를 각각 원소나열법과 벤다이어그램으로 나타내고 그 공통부분을 언급하게 함으로서 '교집합'의 개념을 도입하였다.

또한 trans 단계에 해당하는 '집합의 연산 법칙' 특히 첫 부분인 교집합에 대한 '교환법칙'을 도입하는 데 있어 inter 단계의 '집합의 연산' 개념이 사용되었는지를 분석하였다. 16종의 교과서를 분석한 결과는 다음의 <표 Ⅱ-10>과 같다.

<표 Ⅱ-10> 교집합의 교환법칙 설명 방법 분석

	교집합의 교환법칙의 설명 방법	대상 교과서
방법1	$A\cap B$, $B\cap A$을 직접 구하여 비교하였다.	C_1, C_6, C_7, C_9, C_{12}, C_{16}
방법2	벤다이어그램을 통해 도입하였다.	C_5, C_{10}, C_{13}
방법3	중학교 교집합의 정의로부터 설명하였다.	C_8, C_{11}
방법4	방법1과 방법2를 함께 사용하였다.	C_4, C_{14}, C_{15}
방법5	방법1과 방법3을 함께 사용하였다.	C_3
방법6	방법2와 방법3을 함께 사용하였다.	C_2

위의 <표 Ⅱ-8>로부터 알 수 있듯이 16종의 모든 교과서가 trans 단계의 도입 부분에서 inter 단계에서 형성된 교집합 개념을 이용하는 것으로 분석되었다.

또한 [분석 대상 1-2]에서 inter 단계에 해당하는 '원의 성질' 특히 중학교 1학년의 '원과 직선의 위치 관계' 첫 부분에서 intra 단계인 '원의 구성 요소'의 개념이 사용되는지를 분석하였다. 14종의 모든 교과서에서, inter 단계에 해당하는 중학교 1학년의 '원과 직선의 위치 관계'는 intra 단계에 해당하는 중학교 1학년 '원의 구성 요소'의 바로 다음 단원에서 학습하게 되므로 자연스럽게 도입되고 있다. 또한 trans 단계에 해당하는 원의 방정식 중에서 특히 고등학교 1학년 '원과 직선의 위치 관계' 첫 부분에서도 inter 단계에 해당하는 중학교 1학년의 '원과 직선의 위치 관계' 개념이 사용되는지를 분석하였다. 분석한 결과는 다음의 <표 Ⅱ-11>과 같다.

<표 Ⅱ-11> 고등학교 원과 직선의 위치관계 설명 방법 분석

	고등학교 원과 직선의 위치관계의 설명 방법	대상 교과서
방법1	원과 직선의 위치 관계를 상기시키는 활동을 제시하였다.	C_2, C_5, C_7, C_8, C_9, C_{12}, C_{13}
방법2	원과 직선의 위치 관계 3가지를 언급하였다.	C_{11}
방법3	방법1과 방법2를 함께 사용하였다.	C_1, C_3, C_6, C_{10}
방법4	판별식을 이용하는 활동을 통해 곧바로 고등학교 학습 내용을 설명하였다.	C_4, C_{14}, C_{15}, C_{16}

방법4에 해당하는 4종의 교과서를 제외하고는 12종의 교과서가 inter 단계에서 학습한 ‘원과 직선의 위치 관계’ 개념을 도입으로 하여 trans 단계에 진입하도록 전개하고 있다. 방법4에 제시된 4종의 교과서는 도입활동이나 본문을 통해 inter 단계의 개념을 언급하지는 않았으나 다음 [그림 Ⅱ-7]의 C_{16} 교과서와 같이 간단한 글이나 그림으로 대신하고 있다.

지구 위의 일정한 궤도를 돌고 있는 인공위성이 지구와 전파를 주고받을 수 있는 범위는 어디까지일까? 인공위성의 전파는 직진하므로 인공위성에 대하여 지구 반대쪽에 있는 지역에서는 인공위성과 전파를 주고 받을 수 없다.
전파를 주고받을 수 있는 범위의 경계가 어디일지 생각해 보자.

[그림 Ⅱ-7] C_{16} 교과서에 제시된 도입활동 앞에 제시된 생각 거리

[분석 대상 1-1], [분석 대상 1-2]를 분석한 결과, 수학적 사고의 발달 메커니즘의 단계 간의 전이 과정에서 중요하게 사용된 도입 활동은 이전 단계의 개념이라는 것을 확인하였다. 따라서 이전의 단계에서 학습한 수학 개념을 정확히 이해하도록 하는 것이 필요하다. 그러나 이전에서 학습 수학 개념으로부터 현재 학습해야할 수학 개념을 이끌어 가는 흐름은 유지하고 있지만 미래에 학습할 수학 개념에 대한 추측 활동을 제시한 교과서는 없었다. 수학적 사고의 발달 메커니즘은 이전의 trans 단계를 통해 구성된 개념이 새로운 개념 구성을 위한 intra 단계로 작용한다는 면에서 이러한 추측활동은 반드시 필요하다.

Ⅲ. 연구의 결론

본 연구에서는 수학적 사고의 발달 메커니즘 중 intra 단계를 수학 개념의 내적 또는 개별적인 요소를 다루는 분석 단계, inter 단계를 수학 개념들 간의 외적 또는 변환 관계를 통해 새로운 수학 개념을 형성하는 단계, trans 단계를 inter 단계로부터 형성된 수학 개념이 통합적 구조로서 구성되는 단계라고 하였다. 수학적 사고의 발달 메커니즘에 대한 정의를 바탕으로 하여 본 연구에서는 수학 교과서에 수학적 사고의 발달 메커니즘이 적용되고 있는지를 확인하고 그 과정을 분석하였다.

교과서 분석 결과, 네 가지의 분석 대상 개념 모두 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치하는 것으로 판단된다. 그러나 수학적 사고의 발달 메커니즘과 일치한다고 하기에는 부족한 교과서 또는 학습 요소가 발견되어 개선이 필요하며, 수학적 사고의 발달 메커니즘이 반영되도록 하기 위한 교과서 코너 또는 요소가 제시되어야 할 필요가 있음을 확인하였다. 이를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 수학 교과서 집필자나 수학 교사는 학생들에게 지도해야 할 학습 개념이 전반적인 수학 개념의 발달 과정에서 어떠한 위치를 차지하고 있는지에 대하여 분석해야 한다. 앞에서 분석한 바와 같이 수학 개념들의 발달 과정과 하나의 수학 개념의 발생 과정은 수학적 사고의 발달 메커니즘을 따른다. 하나의 개념의 발생 과정을 분석한 결과 [분석대상 2-1], [분석대상 2-2]에서 제시한 삼각함수와 제곱근의 개념은 각각 [그림 Ⅱ-3], [그림 Ⅱ-4]와 같이 개념의 발달 과정에서 trans 단계에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 따라서 하나의 개념의 발생 과정도 개념들의 발달 과정으로 볼 수 있다. 예를 들어 삼각함수의 개념은 직각삼각형의 세 변의 길이, 삼각비, 삼각함수로 이어지는 세 개념의 발달 과정에서 trans 단계에 해당하면서도 [분석대상 2-2]와 같이 하나의 개념의 발생 과정에서의 trans 단계로도 볼 수 있다. 따라서 수학 교과서 집필자와 수학 교사는 이러한 점을 이해하고 좁게는 하나의 과정을 통해 발생한 개념으로서 개념을 인식하며, 넓게는 개념의 발달 과정에 존재하는 하나의 개념으로서 인식해야 한다. 이러한 인식을 통해 교과서가 집필되어야 하며 수학 수업이 이루어져야 한다.

둘째, 수학적 사고의 발달 메커니즘은 trans 단계를 통해 개념이 구성된다는 측면과 intra 단계로서 개념의 확장이라는 측면을 함께 가지고 있음을 인식해야 한다. 이는 이전 수준에서는 사고의 수단이었던 것이 다음 수준에서는 사고의 대상이 된다는 vans Hiele의 관점과 일맥상통한다. 또한 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정인 수학화로 수학을 규정한 Freudental의 주장과도 일맥상통한다(황혜정 외, 2007). 수학 교과서 집필자나 수학 교사는 학생들에게 지도해야할 학습 개념이 어떠한 위치에 있는지를 파악했다면 이전의 학습 개념에 대해 명확하게 이해하도록 해야 하며, 이해한 개념을 바탕으로 더 높은 사고의 대상 또는 본질에 접근하기 위한 추측 활동의 시간을 주어야 한다. 앞서 밝힌 바와 같이 수학 개념에 대한 이해는 수학적 사고의 발달에 있어 큰 영향을 주는 요인이며, 수학 개념에 대한 이해를 바탕으로 다음 단계로 나아갈 수 있도록 해야 한다. 예를 들어 [분석대상 1-2]에서 중학교 3학년

의 원주각의 성질에 대한 이해를 위해 이전 단계에 해당하는 원에 관한 기본 요소를 이해하게 하고 원주각이 두 현으로 이루어진 각이라는 도형임을 파악하게 한 후, 이후의 과정에서 두 현으로 이루어진 도형으로서 원과 비례의 성질, 네 현으로 이루어진 내접사각형의 성질 등을 학습할 수 있음을 추측해 보게 하는 것을 생각해 볼 수 있다. 또한 해결된 문제 상황으로부터 새로운 문제 상황을 만드는 '문제 만들기' 활동과 같이, 하나의 주된 개념에 대한 이해로부터 새로운 개념을 추측해보는 '개념 만들기' 활동을 하도록 하는 것을 제안한다. '개념 만들기' 활동에서는 필요에 따라 inter 단계로서 개념을 형성하는데 도움이 되는 특정 개념들을 제시해 줌으로써 다음 또는 미래에 도달할 수 있는 개념의 방향을 좁혀줄 수 있다.

참고문헌

강시중 (1975). 수학교육론. 교육출판사.
강신덕, 함남우, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정, 라미영 (2008). 중학교 수학1. (주)교학사.
강신덕, 홍인숙, 김영우, 전민정, 나미영 (2010). 중학교 수학3. (주)교학사.
강완, 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 동명사.
계승혁, 김홍종, 박복현, 남진영 (2010). 고등학교 수학. 성지출판(주).
교육과학기술부 (2010). 초등학교 수학3-2. 두산동아.
교육인적자원부 (2007). 교육인적자원부 고시 제2006-75호 및 제2007-79호에 따른 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) 수학, 과학, 기술・가정. 교육인적자원부.
김수환, 최영기, 이중권, 김진호, 윤오영, 김경현, 최현근, 이향수, 김용준, 안미숙 (2010). 고등학교 수학. (주)교학사.
김원경, 조민식, 김영주, 김윤희, 방환선, 윤기원, 이춘신 (2008). 중학교 수학1 비상교육.
__________ (2010). 중학교 수학3. 비상교육.
김청자, 이홍숙 (2004). Piaget의 인지 발달 매커니즘에 관한 연구. 상명대학교인문과학연구 제15권 pp. 1-20.
김해경, 서동엽, 최은자, 김상철, 김성남, 윤성식 (2010). 고등학교 수학. 더텍스트.
김홍종, 계승혁, 오지은, 원애경 (2008). 중학교 수학1. 성지출판(주).
__________ (2010). 중학교 수학3. 성지출판(주).
민세영 (2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. 박사학위논문, 서울대학교.
박규홍, 최병철, 안숙영, 김준식, 유미경 (2008). 중학교 수학1. (주)동화사.
__________ (2010). 중학교 수학3. (주)동화사.
박영훈, 여태경, 김선화, 심성아, 이태림, 김수미 (2008). 중학교 수학1. 천재문화.
__________ (2010). 중학교 수학3. 천재문화.
박윤범, 남상이, 최소희, 홍유미 (2010). 중학교 수학3. 웅진씽크빅.
박종률, 유종광, 이창주, 홍분남, 김덕진, 박우량 (2008). 중학교 수학1. (주)도서출판 디딤돌.
신항균, 이광연, 윤혜영, 이지현 (2008). 중학교 수학1. (주)지학사.
신항균, 이광연, 황혜정, 윤혜영, 이지현 (2010). 중학교 수학3. (주)지학사.
신항균, 이광연, 신범영, 김홍섭, 김정화 (2010). 고등학교 수학. (주)지학사.
신현정 (2000). 개념과 범주화. 아카넷.
양승갑, 신준국, 윤갑진, 성덕현, 양경식, 김창규, 이승우, 조성철, 박상우 (2010). 고등학교 수학. (주)금성출판사.
우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 지은정, 신보미, 최인선 (2008). 중학교 수학1. 두산동아.
우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 이영란, 고현주, 이정연 (2010). 중학교 수학3. 두산동아.
우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 신보미, 최인선, 박인, 지은정 (2010). 고등

학교 수학. 두산동아.
유희찬, 류성림, 한혜정, 강순모, 제수연, 김명수, 천태선, 김민정 (2008). 중학교 수학1. 대한교과서(주).
________________ (2010). 중학교 수학3. 대한교과서(주).
유희찬, 조완영, 조정묵, 임미선, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 정성윤 (2010). 고등학교 수학. 대한교과서(주).
윤성식, 김해경, 조난숙, 김화영, 조준모, 정세연 (2010). 중학교 수학3. 더텍스트.
윤성식, 조난숙, 김화영, 조준모, 장홍월, 김해경 (2008). 중학교 수학1. 더텍스트.
윤재한, 박진석, 조도상, 김영제, 권백일, 신재봉, 정지현, 장인선 (2010). 고등학교 수학. 더텍스트.
이강섭, 왕규채, 송교식, 양인웅 (2010). 고등학교 수학. 도서출판 지학사.
이강섭, 왕규채, 송교식, 이강희, 안인숙 (2008). 중학교 수학1. 도서출판 지학사.
________________ (2010). 중학교 수학3. 도서출판 지학사.
이경화, 박경미, 임재훈 (2002). 교육 내용으로서의 집합 개념에 대한 비판적 고찰. 대한수학교육학회지 수학교육학연구 제12권 제1호 pp. 125-143.
이만근, 이재실, 오은영, 조성오 (2010). 고등학교 수학. (주)고려출판.
이익환, 황상민, 이승종, 임종우, 한광희, 이민행 (1998). 인지과학의 대두. 담화・인지언어학회 연구보고서 pp. 2-95.
이재학, 정상권, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 김정배, 김상훈 (2010). 고등학교 수학. (주)금성출판사.
이정모 (2010). 인지과학, 성균관대학교 출판부.
이정모, 강은주, 김민식, 감기택, 김정오, 박태진, 김성일, 신현정, 이광오, 김영진, 이재호, 도경수, 이영애, 박주용, 곽호완, 박창호, 이재식 (2009). 인지심리학. 학지사.
이준열, 최부림, 김동재, 서정인, 전용주, 장희숙, 조석연 (2010). 고등학교 수학. 천재교육.
이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2010). 중학교 수학3. 천재교육.
이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원 (2008). 중학교 수학1. 천재교육.
이홍숙 (1995). 수학교육과정 구성을 위한 Piaget의 논리・심리병행론 연구. 박사학위논문, 건국대학교.
전평국, 김은희, 김원경 (2002). 수학적 추론 능력 평가 기준에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E 수학교육 논문집, 제13집, pp. 425-455.
정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 서혜숙, 박부성, 강은주 (2008). 중학교 수학1. 금성출판사.
________________ (2010). 중학교 수학3. 금성출판사.
조예은 (2008). 미국, 호주, 한국 교육과정의 집합론 비교. 석사학위논문, 건국대학교.
최용준, 김덕환, 이한주, 위경아, 김윤경 (2010). 고등학교 수학. 천재문화.
최용준, 한대희, 박진교, 김강은, 신태양, 배명주 (2008). 중학교 수학1. 천재문화.
________________ (2010). 중학교 수학3. 천재문화.
한국교육과정평가원 (2000). 수학과 교육 목표 및 내용 체계화 연구. 한국교육과정평가원.

한태식 (1991). 기하교육과 Van Hiele 이론. 한국수학교육학회지 <수학교육> 제30권, 제3호 pp. 47-69.

홍진곤, 임재훈 (1997). 삐아제와 플라톤의 수학적 인식론 비교 연구. 대한수학교육학회 논문집 제7권 제2호 pp. 315-326.

황선욱, 강병개, 김수영 (2010). 고등학교 수학. 좋은책 신사고.

황우형, 권혁진, 김인숙, 김동화, 조남일, 박승렬, 이채형, 차순규, 이병하, 김혜란, 김원중 (2010). 고등학교 수학. 대한교과서(주).

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2007). 수학교육학신론(개정판). 도서출판 문음사.

허민, 박문환, 박진호, 김용식, 한용익, 김창일, 정상일 (2010). 고등학교 수학. (주)중앙교육진흥연구소.

片桐重男 (1988). 수학적인 생각의 구체화(이용률, 성현경, 정동권, 박영배 역). 경문사.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31, No. 5, pp. 557-578.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in Geometry. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 17, No. 1, pp. 31-48.

Burton, L. (1984). Mathematics thinking: The struggle for meaning. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15, No. 1, pp. 35-39.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. S., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema : The Case of the Chain Rule, Journal of Mathematical Behavior, Vol. 16, No. 4, pp. 345-364.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall(Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Ginsburg, H. P. (1983). The Development of Mathematical Thinking. Academic Press, Inc.

Greeno, J. G. (1992). Mathematical and scientific thinking in classrooms and other situations. In D.F. Halpern (Ed.). Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics (pp. 39-62). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 32, No. 2, pp. 195-222.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). Fundamental Constructs in Mathematics Education. RoutledgeFalmer.

Medin, D. L., & Rips, L. J. (2005). Concepts and Categories: Memory, Meaning, and Metaphysics. ; The Cambridge handbook of Thinking and Reasoning. Cambridge university press.

Montangero, J., & Maurice-Naville, D. (1997). Piaget or The advance of Knowledge. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, and proof. In P. S. Wilson(Ed), Research ideas for the classroom; High school mathematics. NY: Macmillan Publishing Company.

Piaget, J., & Garcia, R. (1983). Psychogenes et Historie des Sciences; translated by Feider, H. (1989). Psychogenesis and the History of Science. Columbia University Press New York.

Polya, G. (1956), How to solve it: A new aspect of mathematical method. (2nd Ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Skemp, R. R. (1987). 수학학습 심리학(황우형 역). 사이언스북스.

Smith. E. E. (1988). Concepts and thought. In R. J. Sternberg & E. E. Smith (Eds.), The psychology of human thought. Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Ben-Zeev, T. (1996). The Nature of Mathematical Thinking. Mahwah: Erlbaum.

Williams, G. (2002). Identifying tasks that promote creative thinking in Mathematics: a tool. Paper accepted as a research report for the Mathematical Education Research Group of Australasia Conference. Aukland New Zealand. July 2002.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's Mathematical Thinking in Different Classroom Cultures. Journal for Research in Mathematics Education 2006, Vol. 37, No. 3, pp. 222-255.

An Analysis of Mathematics Textbook on the Developmental Mechanism of Mathematical Thinking

Lee, Hwan Chul[4] · Kang Ok Ki[5]

Abstract

Developing Mathematical Thinking has been continually emphasized in the Korean curriculum and this emphasis has demonstrated its impact on math textbooks and classes in South Korean schools. This study intends to discover how the Developmental Mechanism of Mathematical Thinking should be reflected through School Mathematics regardless of subfields of Mathematics or its levels. Finally, this study concluded that the Developmental Mechanism of Mathematical Thinking is being reflected on School Mathematics. However, more research in certain areas needs to be done. Through analyzing textbooks, it is certain that the Developmental Mechanism of Mathematical Thinking is being reflected on School Mathematics. Moreover, it appears that students are able to develop new concepts using Developmental Mechanism of Mathematical Thinking.

Mathematical Thinking is a subject that many scholars and mathematicians have taken an interest in. Especially with the math curriculum in Korea, designing and implementing classes that would help students develop their mathematical thinking are increasingly being emphasized. This study defines what mathematical development mechanism is, and based on this definition, it further analyzes the math textbook of the revised 2007 curriculum. As a result, textbook developers and math teachers should examine and analyze the concepts that learners need to acquire and how they develop. Further, this study not only presents the concepts students are expected to acquire, but also looks at the flow in which concepts have been introduced to students. It concludes that activities that can help students have an idea of what they are going to learn in the future should be provided during class time.

Key words: Mathematical Thinking, Developmental Mechanism of Mathematical Thinking, Analysis of Mathematics Textbook

4) Hongik University Girl's Middle school (singgri@hanafos.com)
5) Sungkyunkwan University (okkang@skku.ac.kr)