한국학교수학회논문집 제 14 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 14, Number 2, 163-178, June 2011

2007년 개정 교육과정에 따른 교과서의 문제 만들기 문항 -수학7의 대수영역을 중심으로-

최상기[1] · 목연하[2]

2007년 개정 수학과 교육과정에는 학생들의 문제 해결력을 높이기 위하여 문제 만들기 활동을 새롭게 추가하였다. 수학에서 문제 만들기와 문제해결은 함께하는 상호적인 작용으로, 교육과정에 문제 만들기 활동이 구체적 제시되어 학생들의 문제해결력을 높이는 효과를 기대할 수 있다. 본 연구에서는 수학7의 대수영역을 중심으로 문제 만들기 문항을 수록한 16종의 교과서를 분석하였다. 문제 만들기 문항의 단원별 개수와 분포, 유형별 개수와 문항내용 등을 분석하였다.

주요 용어 : 문제 만들기, 문제해결, 조건 또는 수치의 변화, 집합 또는 식 만들기

I. 서론

1. 문제 만들기의 의미

Brown과 Walter(1990)는 문제 제기(problem posing)에 대하여 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제로 재구성하는 것과 문제를 해결한 후에 다른 문제를 만들고 분석하는 두 가지 방식이 있다고 하였다. 또한 Brown과 Walter는 문제 만들기를 위한 전략을 제시하였다. 먼저 주어진 것을 받아들이는(accepting) 1단계를 지나, 주어진 것에 도전하는(What-If-Not전략) 2단계가 있다고 하였다. What-If-Not 전략은 다음과 같이 요약될 수 있다. 문제에서 주어진 조건을 하나하나 나열한 후 '열거한 조건들이 그렇지 않다면 어떻게 될까?'하는 의문을 가져본다. 이 의문을 기초로 새로운 문제를 만들어보고, 그 문제를 분석하거나 해를 구해보는 것이다.

박영배(1991)는 문제 만들기란 수학적 문제를 보고 새로운 문제로 바꾸어 나가는 활동이고, 다른 하나는 문제 꾸미기로서 현실적인 상황을 수학적 문제로 바꾸는 활동, 즉 상황을 수학적으로 해결하는 활동이라 하며 문제 만들기에 대한 두 가지 관점을 제시하였다. Silver(1994)는 문제생성(problem generation)을 수학적 문제를 보고 기존 문제를 수정하거나, 새로운 문제를 만드는 활동이라 하였다. Kilpatrick(1987)은 문제 수식화(problem formulation)에 대해 문제를 해결하는 과정에서 자신만의 방법으로 문제를 재구성하고, 특정한 상황을 수학적 문제로 변환

1) 건국대학교 수학교육과 (schoi@konkuk.ac.kr)
2) 건국대학교 교육대학원(mokhaha@naver.com)

하는 수학화의 과정을 의미한다고 하였다. 이와 같이 문제 만들기는 문제 제기, 문제 바꾸기, 문제 꾸미기, 문제 생성, 문제 수식화 등의 다양한 용어로 사용되고 있다. 이는 문제 만들기에 대한 조금씩 다른 정의이면서 또한 하나의 주제인 문제를 만든다는 자연스런 수학활동에 대한 해석으로 일치하는 부분이 많다.

Brown과 Walter가 지적하는 문제의 조건에 대한 의문과 그로 인한 조건의 변화와 Silver의 기존 문제의 수정, 박영배의 새로운 문제로 바꾸는 활동은 이 논문에서 분류한 유형 1과 유형 2에 가깝다. 박영배의 현실적인 상황을 수학적 문제로 바꾸는 활동과 Kilpatrick의 특정한 상황을 수학적 문제로 변환은 이 논문에서 분류한 유형 3과 유형 5에 해당한다. 교과서에는 유형 3 또는 유형 5의 반대(역) 과정인 주어진 수식으로부터 그 수식에 해당하는 상황(문장)을 만드는 문제도 제시되어 있는데 이는 유형 4로 분류하였다. 이 논문에서 5개의 유형으로 분류하였지만 하나의 주제인 문제를 만든다는 자연스런 수학활동에 대한 분석으로 공통되는 부분이 있으며, 또한 하나의 문제가 두 가지 이상의 유형에 해당될 수도 있다.

2. 제7차 개정 수학과 교육과정과 문제 만들기

1990년대 이후로 학교 수학에서 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하여 왔다. 제7차 수학과 교육과정에서는 이러한 흐름을 반영하고 있지만 문제해결력을 높이는데 필요한 문제 만들기가 구체적인 항목으로 포함되지 않았다. 이에 제7차 개정 수학과 교육과정에서는 문제 만들기가 새롭게 추가되었다. 이는 문제해결과 문제 만들기라는 수학 학습의 상호적인 작용이 교육과정에 함께 포함되었다는 점에서 의의가 있다. 제4차 교육과정 이래로 지속적으로 강조되고 있는 문제해결력 신장이 서로 도와줄 수 있는 필수적인 상대를 만난 셈이다.

수학적 능력의 신장을 위한 교수·학습 방법 중 문제해결력 신장을 위한 권장 사항은 아래와 같다.(2006년 개정 중학교 교육과정 해설-수학)

- 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
- 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
- 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.
- 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
- 생활 주변 현상, 사회형상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

3. 문제 만들기와 문제해결

수학에서 문제 만들기와 문제해결은 서로 주고받는 상호적인 작용이다. 가설이라 불리는 미해결 문제를 만들고 이를 해결하는 과정에서는 다시 이차적인 문제 만들기가 일어난다. 이차적인 문제 만들기란 미해결 문제에서 수치나 조건을 변화시키거나, 문제를 재구성하여 다른 방식으로 서술하는(rephrasing) 문제 만들기이다. 또 이미 해결된 문제에서도 조건이나 수치를 변화시키거나, 문제를 재구성하여 변형된 문제를 제시하는 이차적인 문제 만들기가 활발하게 일어난다. 문제를 변형하거나 또는 동치인 문제로 재구성하는 것은 문제를 더 쉽게 이해하고, 가지

고 있는 도구를 적용하기 위함이다. ‘콘웨이[3](J. H. Conway)는 하나의 수학 명제를 자신이 잘 이해한다고 생각하지 않고, 누구에게나 설명할 수 있을 정도로 쉬운 명제가 될 때까지 그 명제를 끊임없이 재구성한다’고 한다(Guy, 1985 p44). ‘누구에게나 설명할 수 있을 정도로 쉬운 명제’는 힐베르트가 1900년 파리에서 열린 제2회 국제수학자대회에서 지적한 ‘좋은 수학문제의 조건’이다. 힐베르트는 이 대회에서 20세기에 해결해야 할 23개의 미해결 문제를 제안하면서 그 중 18번째 문제인 케플러의 ‘공쌓기 가설’을 그와 같은 문제로 꼽았다(Hales, 2000, p440).

오래된 수학의 미해결 문제의 어려움을 논의하는 과정에서 더 잘 이해할 수 있는 명제 또는 도구를 적용할 수 있는 명제로 변형되어야 접근가능하리라고 지적되는 경우가 많다. 와일즈(A. Wiles)가 페르마의 마지막 정리를 해결할 수 있었던 것도 G. Frey에 의하여 ϵ-가설이 제시되고(Frey, 1986) K. Ribet이 ϵ-가설의 해결했기 때문이다(Sigh, 1998). ϵ-가설은 타니야마의 가설의 따름 결과로 페르마의 마지막 정리가 성립함을 보여주는데, 1994년 와일즈는 타니야마의 가설을 해결함으로써 페르마의 마지막 정리가 성립함을 보였다(Wiles, 1995). 즉, 와일즈에게는 페르마의 마지막 정리보다 타니야마의 가설이 그가 가지고 있던 도구인 타원곡선에 관한 계산 방법을 적용할 수 있는 문제인 것이다.

가설의 제시(문제 만들기)와 제시된 미해결의 문제를 풀어가는 과정은 자연스런 수학의 행위로서 학교수학에서도 같은 과정으로 반복된다. 즉, 학생이 풀고 있는 교과서의 수학문제는 수학을 잘하는 그 누군가가 이미 해결한 문제가 아니라, 학생에게는 스스로 해결해야할 미해결 문제이다. 이 때, 이차적인 문제 만들기인 조건의 변화나 다른 방식으로 서술하는 문제만들기가 학생들의 사고에서도 활발하게 일어나야 한다. 하나의 원리를 이해하여 관련된 다수의 문제를 풀고, 또 원리를 조금씩 변화시켜 다수의 문제를 만드는 것(a variation of theme)은 수학의 기본적인 학습과정이고 목표이기 때문이다. 그러나 학교현장에서 학생들은 주어진 시간 내에 다수의 객관식 문제를 풀어내는 방법에 집중하고 있다. 학생들은 하나의 원리를 이용해서 관련된 다수의 문제를 푸는 학습(a variation of a theme)보다 주어진 문제의 유형을 파악해 유형에 따른 풀이를 적용해 답을 찾는 학습방법을 익히고 있다.

2007년 개정 수학과 교육과정에는 학생들의 문제 해결력을 높이기 위하여 문제 만들기 활동을 새롭게 추가하였다. 이는 문제 만들기와 문제해결이라는 상호 보완적인 학습과정을 더욱 구체화시키는 긍정적인 제시이다. 학생들의 문제해결력을 높이기 위해서도, 또 상상력과 창의력을 자극하기 위해서도 문제 만들기는 교육과정에 포함되어야 한다.

4. 연구문제

2007년 개정 교육과정에 따른 중학교 1학년 수학교과서 중에서 문제 만들기 문항이 포함된 16 종의 교과서를 대상으로 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

- 연구문제 1 – 대수 영역과 전체 영역에 있는 문제 만들기 문항의 개수는 어떠한가? 또 각 중단원 별 문제 만들기 문항의 분포와 내용은 어떠한가?
- 연구문제2 – 대수 영역에 있는 문제 만들기 문항에는 어떤 유형이 있으며, 유형에 따른 분포는 어떠한가?

3) 프린스톤대 수학과 폰노이만 석좌교수

II. 교과서 분석

1. 분석 대상

본 연구는 중학교 수학에서 문제 만들기에 대한 내용을 분석하기 위해, 2007년 개정 교육과정에 따른 수학교과서 중에서 중학교 1학년 대수 영역에 초점을 두어 분석하였다. 대수영역에 문제 만들기 문항이 포함된 교과서는 다음의 16 종으로 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 2007년 개정 교육과정에 따른 분석 대상 16종 교과서 목록

교과서 (중학교 1)	저자	발행년도	출판사
A	강신덕 외	2009	(주)교학사
B	김부윤 외	2009	교과서다음(주)
C	김원경 외	2009	(주)비유와상징
D	김홍종 외	2009	성지출판(주)
E	박규홍 외	2009	(주)동화사
F	박영훈 외	2009	(주)천재문화
G	박종률 외	2009	(주)도서출판 디딤돌
H	송근화 외	2009	(주)새롬교육
I	유희찬 외	2009	대한교과서(주)
J	이대현 외	2009	두레교육(주)
K	이영하 외	2009	(주)교문사
L	이준열 외	2009	(주)천재교육
M	정광식 외	2009	(주)대교
N	정상권 외	2009	(주)금성출판사
O	정순영 외	2009	(주)두산
P	정찬현 외	2009	(주)대교

2007년 개정 중학교 교육과정에서 대수 영역에는 수와 연산, 문자와 식의 대단원이 있다. 2007년 개정 중학교 1학년 수학 교과서 16종의 대수 영역에 있는 문제 만들기의 54 문항을 대단원별, 중단원별로 나누어 문항의 내용 요소를 살펴보고, 유형별 문항 분석을 하였으며, 또한 단원과 유형 사이의 문제 만들기 문항의 분포도 조사하였다.

2. 분석 방법

1) 단원별 문항 분석

연구문제 1을 위하여 중학교 1학년 개정 수학 교과서 16종의 문제 만들기 문항을 각 단원별로 문항을 나누고, 각 중단원별로 세부적인 문항 분석을 하였다. 또한 내용요소의 분류 기준은 2007년 개정 교육과정 중학교 1학년 수학 대수 영역의 교육목표의 세부 항목으로 정하였다. 이를 토대로 J교과서에 수록된 대단원과 중단원을 기준으로 다시 통합하여 단원별 문항 분석한 결과를 정리하였다.

2) 유형별 문항 분석

연구문제 2를 위하여 2007년 개정 교과서의 문제 만들기 문항들은 다음의 다섯 가지 유형으

로 구분하였다.

<표 II-2> 문제 만들기 유형

문제 만들기 유형		분석 대상
유형 1	주어진 문제로부터 숫자 또는 조건을 바꾸어 유사한 문제 만들기	제 7차 개정 중학교 수학 교과서
유형 2	문제의 조건을 약화시키거나, 조건의 일부만 제시하한 상황에서 문제 만들기	
유형 3	원소, 숫자, 문자, 기호 등을 주고, 그로부터 여러 가지 집합, 식 만들기	
유형 4	주어진 수식으로부터 이야기 만들기	
유형 5	실생활 소재로부터 문제 만들기	

● (유형1) 주어진 문제로부터 숫자 또는 조건을 바꾸어 유사한 문제 만들기

제시된 문제에서 수치 또는 조건을 변화시키되 제시된 문제와 같은 방법으로 풀 수 있는 유사 문제를 만들어 푸는 유형이다. 문제를 푸는 과정이나 문제를 푼 후에 그 문제의 틀 안에서 사용된 수치 또는 조건을 변화시킨다는 점에서 Brown & Walter의 What-If-Not 전략의 내용이라 할 수 있다.

● (유형2) 문제 조건을 약화시키거나 조건의 일부를 제시한 상황에서 문제 만들기

문제의 조건이 약화시켜 일반화 하는 유형이거나 또는 문제를 해결하기 위해 조건이 부족한 상황에서 스스로 필요한 조건을 추가하여 문제를 완성하는 유형이다. 문제 조건의 일부가 되는 수학적 대상이나, 수학적 성질을 이용하여 조건을 새롭게 추가하여 문제를 구성하는 유형이다. 또한 제시된 일부 조건을 가지고 다양한 발전적인 문제 만들기를 하는 내용도 포함된다.

● (유형3) 원소, 숫자, 문자, 기호 등을 주고, 그로부터 여러 가지 집합, 등식, 부등식 만들기

주어진 원소, 숫자, 문자, 기호 등을 이용하여 다양한 수학적 대상(집합, 등식, 부등식 등)을 만드는 문제 유형이다. 문제에서 제시한 조건을 만족하는 범위 내에서 학생은 주어진 자료를 사용하여 자유롭고 창의적인 방법으로 다양한 답안을 구성할 수 있다. 학생이 정의, 용어, 기호 등의 수학적 내용을 이해했는지 확인하기 좋은 문제 유형이다.

● (유형4) 주어진 수식으로부터 이야기 만들기

주어진 등식이나 부등식으로 풀 수 있는 수학 외적 상황(실생활 소재)의 문장을 구성하는 유형이다.

● (유형5) 실생활 소재로부터 문제 만들기

수학 외적 상황, 실생활 소재를 수식화하는 유형이다. 유형4의 역과정으로 아직 수학화되어 있지 않은 수학 외적 상황으로부터 수학의 개념, 원리, 법칙을 적용하여 수식화하는 유형이다.

3. 분석 결과

1) 교과서 문제 만들기 활동 분석

본 연구의 분석 대상이 되는 제7차 개정 수학교과서 16종에서 교과서별 문제 만들기 문항 수를 조사하였다. 중학교 1학년 수학 전 영역에서 문제 만들기 문항 수와 대수 영역에서 문제 만들기 문항수로 구분하였다. 교과서에서 문제 만들기라고 한 문항과 유형1 – 유형5에 해당하는 문항들을 문제 만들기 문항으로 하였다. 이에 따른 문제 만들기 문항 수는 <표 II-3>과 같다. 대수 영역에 해당하는 대단원은 'Ⅰ.집합과 자연수, Ⅱ.정수와 유리수, Ⅲ.문자와 식' 이고,

전체 영역은 ‘대수 영역을 포함한 Ⅳ.함수, Ⅴ.통계, Ⅵ.도형의 기초, Ⅶ.도형의 성질’ 대단원을 일컫는다.

<표 Ⅱ-3> 교과서별 문제 만들기 문항 수

교과서	문제 만들기 문항 수		교과서	문제 만들기 문항 수	
	대수 영역	전체 영역		대수 영역	전체 영역
A	3	4	I	3	5
B	1	1	J	3	6
C	7	12	K	2	2
D	1	2	L	5	8
E	6	13	M	6	16
F	3	4	N	2	2
G	6	7	O	2	4
H	1	5	P	3	4
			합계	54	95

중학교 1학년 16종의 교과서에 있는 문제 만들기 문항의 개수는 95개이며 그 중 54개가 대수 영역에 있다. 개수는 C교과서가 전체 영역 12문항, 대수 영역 7문항, E교과서가 전체 영역 13문항, 대수 영역 6문항, M교과서가 전체 영역 16문항, 대수 영역 6문항으로 다른 교과서에 비하여 많은 문제 만들기 문항을 수록하고 있다. 27종의 검정교과서 중에서 16종의 교과서만이 문제 만들기 문항을 가지고 있고, 또 16종의 교과서 사이에도 문제 만들기 문항의 빈도수 차이가 상당함을 볼 수 있다.

2) 문제 만들기 문항의 단원별 개수

대수 영역에인 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 단원에서의 문제 만들기 문항의 개수는 <표 Ⅱ-4>와 같다. ‘집합과 자연수’ 단원에 비교적 많은 문제 만들기 문항이 있음을 볼 수 있다.

<표 II-4> 대단원별 문제 만들기 문항 수

교과서 \ 단원	Ⅰ.집합과 자연수	Ⅱ.정수와 유리수	Ⅲ.문자와 식	합계
A	1	2	0	3
B	1	0	0	1
C	2	2	3	7
D	0	0	1	1
E	2	2	2	6
F	2	0	1	3
G	3	1	2	6
H	0	1	0	1
I	1	1	1	3
J	1	1	1	3
K	0	1	1	2
L	2	2	1	5
M	2	2	2	6
N	2	0	0	2
O	1	0	1	2
P	2	0	1	3
합계	22	15	17	54
(%)	40.7	27.8	31.5	100

대단원을 중단원으로 세분화하여 각 중단원마다 문제 만들기 문항의 개수를 조사하여 <표 II-5>에 제시하였다. 중단원 중에서는 집합 단원이 15문항(27.8%)으로, 보통 5-7문항을 가지고 있는 다른 중단원의 2배가 넘는 문제 만들기 문항을 가지고 있다.

<표 II-5> 중단원별 문제 만들기 문항 수

대단원	중단원	문제 만들기 문항 수
Ⅰ. 집합과 자연수	1. 집합	15 (27.8%)
	2. 자연수의 성질	7 (13.0%)
Ⅱ. 정수와 유리수	1. 정수	9 (16.7%)
	2. 유리수	6 (11.1%)
Ⅲ. 문자와 식	1. 문자의 사용	6 (11.1%)
	2. 일차방정식	5 (9.2%)
	3. 일차방정식의 활용	6 (11.1%)
합 계		54 (100%)

3) 문제 만들기 문항의 유형별 개수

분석 방법의 내용 중 <표 II-2>에서 제시한 문제 만들기의 다섯 가지 유형을 토대로 문제 만들기 전체 54문항을 유형별로 분류하면 <표 II-6>과 같다.

다섯 가지 유형 중 가장 빈도수가 높은 것은 유형3(원소, 숫자, 문자, 기호 등을 주고, 그로부터 여러 가지 집합, 등식, 부등식 만들기)이며, 전체 문항의 절반가량인 26문항이 유형3에 속한다. 또한 유형1(주어진 문제로부터 숫자 또는 조건을 바꾸어 유사한 문제 만들기)에 속하는 문항은 22개로 전체 54문항의 40.7%이다. 유형1과 유형3의 문항을 합하면 전체의 88.9%에 이른다. 반면에 유형2, 유형4, 유형5에 속하는 문항은 각각 2개씩 출제되어 문제 만들기 문항이 특

정 유형에 집중되고 있음을 볼 수 있다.

유형2(조건의 약화나 일부 제시))는 유형1(조건이나 수치의 변화)과 함께 문제해결력 신장을 위해 필요한 학습 방법이다. 조건의 약화(일반화)나 조건의 일부 제시는 난이도가 높은 문제가 될 수 있으나, 학생들에게 필요한 사고이므로 문항 개발이 더 이루어져야 한다. 유형4(주어진 수식으로부터 이야기 만들기)는 학생들의 창의적인 상상력을 유도한다는 면이 있으나 문제 제시에 더 구체적인 면이 있어야 한다.

7차 교육과정의 수학 교과서에 실생활을 소재를 주고 수학 외적 문제를 해결하게 하는 문제는 상당히 소개되었다. 그러니 유형5(실생활 소재로부터 문제 만들기)와 같이 수학의 대상이 되는 실생활 소재부터 찾게 하는 문제 만들기 문항은 7차 개정 교육과정의 수학 교과서에도 매우 적음을 볼 수 있다.

문제 만들기 문항을 가지고 있는 16종의 교과서 중 8종의 교과서는 한 가지 유형의 문항만을 가지고 있다. 반면에 6문항을 수록한 G교과서는 유형1, 3, 5의 세 가지 유형의 문제 만들기 문항이 각각 2, 3, 1개씩 있다.

<표 II-6> 각 교과서 유형별 문제 만들기 문항 수

교과서 \ 유형	1	2	3	4	5	계
A			3			3
B			1			1
C	5		2			7
D					1	1
E	6					6
F			2	1		3
G	2		3		1	6
H	1					1
I	1	1	1			3
J		1	2			3
K			1	1		2
L	3		2			5
M	1		5			6
N			2			2
O			2			2
P	3					3
합계	22	2	26	2	2	54
(%)	40.7	3.7	48.2	3.7	3.7	100

문제 만들기 문항의 각 중단원 별 유형에 따른 개수를 살펴보면 <표 II-7>과 같다. 가장 보편적인 문제 만들기인 유형1(수치나 조건의 변화)은 각 중단원에 고르게 나타난다. 문제 만들기 문항이 가장 많은 유형3은 ‘집합’과 ‘정수’의 중단원에서 높은 빈도수를 보인다. 그 밖에 유형2는 I단원에서만 출제되었고, 유형4와 유형5는 Ⅲ단원에서만 출제되었다. 방정식의 활용부분에서 실생활과의 연계된 문제들이 소개되면서 유형4와 유형5의 문제 만들기 문항이 출제되었다.

각 단원 별로 빈도수가 높은 유형으로 분석하면, 집합 단원에서는 주어진 원소를 가지고 집합을 구성하는 유형3의 문항이 가장 많고, 자연수의 성질에서는 최소공배수의 원리를 이용하되 수치를 변화하는 유형1의 문항이 많다. 또한 정수와 유리수의 단원인 Ⅱ단원에서는 주어진 수를 이용하여 연산하는 식을 만들거나 정답에 알맞은 수식을 구성하는 유형3이 많이 나타났다. 또한 Ⅲ단원에는 유형2를 제외한 모든 유형이 고르게 나타나고 있다.

<표 II-7> 문제 만들기 단원별, 유형별 문항 수

단원 \ 유형		1	2	3	4	5	합계
I	집합	5	1	9			15
	자연수의 성질	4	1	2			7
II	정수	2		7			9
	유리수	2		4			6
III	문자의 사용	3		2		1	6
	일차방정식	2		2	1		5
	일차방정식의 활용	4			1	1	6
합계		22	2	26	2	2	54

(1) 유형1

주어진 문제에서 수치나 조건을 바꾸어 유사한 문제를 만들고 푸는 과정에서 학생들은 그 문제 자체를 더 잘 이해할 수 있을 뿐 아니라 그 문제를 풀기위하여 필요한 공식이나 원리를 정확히 이해할 수 있다. 유형1의 문제 중 ‘수치를 바꾸는 문제 만들기’와 ‘수치와 조건 모두 변형시키는 문제 만들기’의 두 가지로 나누어 예시 문항을 살펴보았다.

① 문제의 수치를 바꾸어 문제 만들기

<그림 II-1>의 문제는 주어진 숫자를 바꾸어 유사한 문제를 만들어 푸는 문제만들기의 유형이다. 학생들은 예시 문제와 다른 수로 문제를 만들고 푸는 과정에서 최소공배수의 원리와 소인수분해에 의한 계산 방법 등 일반적인 풀이 방법에 대해서도 생각하게 될 것이다.

다음 문제와 풀이를 읽고 문제에서 밑줄 친 부분을 바꾸어 새로운 문제를 만들고 그 풀이를 써라.

여러 명의 학생들이 있는데 5줄로 앉아도, 6줄로 앉아도, 7줄로 앉아도 각각 1명이 남는다. 이렇게 되는 가장 적은 학생 수를 구하여라.

[풀이] 1명을 빼면 5줄, 6줄, 7줄로 앉았을 때 꼭 맞게 앉는다는 뜻이므로 구하는 학생 수는 5, 6, 7의 최소공배수에 1을 더한 수이다. 즉, 5, 6, 7의 최소공배수가 210이므로 구하는 학생 수는 211명이다.

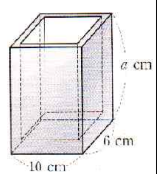
<그림 II-1> L교과서 유형1 문항

② 문제의 수치와 조건(상황)을 변형하여 문제 만들기

<그림 II-2>는 문자를 사용하여 직육면체의 부피를 나타내는 식을 구한 다음, 여러 가지 변형된 문제를 만들어 푸는 문제이다. 학생들은 세로 또는 가로가 문자로 나타나는 경우, 또 안의 직육면체의 가로, 세로, 높이를 달리 짧게 하는 경우 등 여러 가지 변형된 문제를 만들 수 있다. 단, 수학 7의 과정이므로 두 개 이상이 문자로 나타나는 경우는 아직 고려되지 않는다. 이 문제 만들기는 알고 있는 것과 알려고 하는 것들 사이의 변형을 언급함으로써 폭넓게 조건의 변화를 꾀하고 있다. 이는 선행연구에서 살펴본 Brown & Walter의 수준Ⅱ에 해당되는 What-If-Not 전략을 활용하도록 하고 있는 문항이다. 즉, ‘Ⅰ수준에서 열거한 속성들이 그렇지 않다면 어떻게 될까?’하는 의문을 가져보고, 그것들을 변형함으로써 다양한 문항을 만들어낼

수 있다. 이러한 유형의 문제 풀이를 반복한다면, 학생들은 문제의 조건을 분석하는 안목을 갖고 다양한 문제 만들기를 시도할 것이다.

오른쪽 그림과 같이 속이 빈 직육면체 모양의 꽃병이 있다. 겉의 직육면체는 가로의 길이가 10cm, 세로의 길이가 6cm, 높이가 a cm이고 안의 직육면체의 가로, 세로, 높이는 겉의 직육면체보다 각각 2cm 짧다고 한다. 이 꽃병에 물을 가득 채웠을 때의 물의 부피를 a를 사용한 식으로 나타내어라.



| 문제 만들기 | 밑면의 세로의 길이를 모르고 밑면의 가로의 길이와 높이는 안다면 어떻게 될까? 여러 가지로 변형하여 위와 비슷한 문제를 만들고 풀어라.

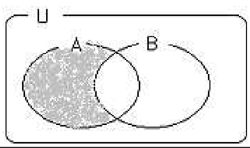
<그림 II-2> L교과서 유형1 문항

(2) 유형2

문제를 해결하기 위해서 조건이 부족한 상황 즉, 필요한 조건들 중에서 일부만을 제시하여 다른 조건을 학생 스스로 추가하여 문제를 구성하는 문제 만들기 유형이다. 유형2는 유형1이 심화된 형태이며, 학생들이 일반화 과정을 경험할 수 있는 유형이기도 하다.

<그림 II-3>에서는 벤 다이어그램의 한 부분이 색칠된 상황에서 집합 U, A, B와 벤 다이어그램의 각 부분에 해당하는 원소의 개수를 생각하여 문제를 만들어야 한다. 차집합 개념을 도입하여 $A-B$의 원소의 개수를 묻는 문제를 다양하게 만들 수 있다. 즉, 학생이 문제 해결을 위해 필요한 조건을 구성하고, 미완성인 문제를 완성시키는 유형이다. 이와 같은 조건의 약화 또는 일반화는 난이도가 높은 문제가 될 수 있으나, 학생들에게 필요한 사고이므로 문항 개발을 위한 연구가 더 필요하다.

아래 벤 다이어그램에서 색칠한 부분에 속하는 집합의 원소의 개수를 묻는 문제를 만들어보자.



<그림 II-3> I교과서 유형2 문항

(3) 유형3

유형3에는 수학적 정의, 기호 등 수학적 내용의 이해를 확인하기 위한 집합, 식 만들기의 문항이 포함되어 있는데, 유형3을 다시 내용의 특성 상 '나열된 원소로 집합 만들기'와 '수, 연산, 기호를 사용하여 식 만들기'로 구분하여 예시 문항을 제시하였다.

① 나열된 원소로 집합 만들기

<그림 II-4>와 <그림 II-5>는 원소, 집합을 가지고 다른 집합을 만들어 보는 문항의 예시이다. 주어진 자료를 활용하여 다양한 집합을 만들어보는 형태이다.

<그림 II-4>에서는 수의 대소 관계, 연산, 약수와 배수, 소수 등에 관련된 다양한 조건을 제시하고 그를 만족하는 부분집합이 만들어 질 수 있다. 학생들의 다양한 사고가 나타날 수 있는

문제이다. 유형2의 조건의 일부만 제시된 형태로도 고려될 수 있으나, 유형3으로 분류하였다.

> 다음의 숫자들이 있다. 이것을 전체 집합으로 하고, 자신이 생각한 기준에 따라 부분 집합 2개를 만들어 조건제시법으로 나타내어 보라. 또 두 집합의 교집합, 합집합, 차집합, 여집합을 구하여보자.
>
> 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

<그림 II-4> B교과서 유형3 문항

<그림II-5>는 정답이 주어진 상황에서 그 정답에 알맞은 문제를 구성하는 역방향의 사고를 요구하는 문제이다. 학생들의 균형 있는 사고를 위하여 역방향의 사고를 요구하는 문항은 필요하다.

> 집합 $A=\{w,o,r,l,d\}$, $B=\{c,r,o,w,n\}$일 때, 교집합 또는 차집합 기호를 사용하여 주어진 집합을 정답으로 하는 문제를 만들어라.
>
> (1) $\{r,o,w\}$ (2) $\{c,n\}$

<그림 II-5> M교과서 유형3 문항

② 수, 연산, 기호를 사용하여 식 만들기

<그림 II-6>는 제시된 일차식과 수를 이용하여 식을 구성하고, 계산하는 문항으로 유형3에 속한다.

> 다음 일차식과 수 중에서 각각 한개 씩 골라 일차식에 수를 곱하는 문제와 일차식을 수로 나누는 문제를 각각 만들고, 그 문제를 계산하여라.
>
> 일차식 : $2a+5$, $3x-2$, $y-\frac{1}{3}$ 수 : -3, $\frac{1}{5}$, 4

<그림 II-6> C교과서 유형3 문항

(4) 유형4

유형4는 ‘주어진 수식으로부터 이야기 만들기’이다. 유형5(실생활 소재로부터 문제 만들기)의 역방향 사고를 요구하는 유형이다. 주어진 수식으로 풀 수 있는 실생활 이야기(문장)를 구성하게 함으로써, 수학의 실용성과 실생활과의 연결성을 경험하는 기회가 될 것이다. (그림 II-7)에서는 일차방정식을 주고, 그 방정식으로 풀 수 있는 실생활 이야기를 만들어보는 문항이다.

다음 보기와 같이 주어진 방정식으로 풀 수 있는 문제를 만들어 보아라.
[보기]
① $3x=6$
⇒ 둘레의 길이가 6cm인 정삼각형의 한 변의 길이를 구하여라.
② $4x-3=13$
⇒ 13개의 사탕을 4개씩 나누어 주려고 했더니 3개가 모자랐다.
모두 몇 명에게 나누어 주려고 했는가?
(1) $x-2=6$
⇒______________________________
(2) $\frac{x}{3}=5$
⇒______________________________

<그림 II-7> F교과서 유형4 문항

(5) 유형5

실생활 또는 수학 외적 상황에서 나타나는 이야기를 만든 다음 그 이야기를 수식화하여 문제를 풀어야 한다. <그림 II-8>에서는 친구와의 대화에 있는 나타나는 방정식을 예시하였다. 유형5의 문제 만들기 문항은 학생들이 처음부터 끝까지 모든 것을 구상하여 문제를 만들어야 한다는 점에서 난이도가 높다. 특히 학생들이 수식화할 수 있는 이야기(문장)를 만들고, 수식을 만들어 푸는 것은 익숙하지 않다. 교사는 학생이 만든 문항에는 오류가 없는지 살펴보고, 학생에게 피드백을 해주는 것이 중요한 활동이 된다. 즉, 정답이 존재하는지, 정답이 나오기 위해 필요한 조건은 빠짐없이 제시하였는지, 아니면 반대로 조건이 불필요하게 많아서 제거 가능한 조건은 없는지, 문장의 의미가 잘 전달되고 있는지, 용어·기호 사용은 적절한지 등 자신이 만들 문항에 대한 반성과 보완의 시간이 필요할 것이다.

생활 속에서 방정식 문제를 만들어 보아라. 옆의 친구와 서로 바꾸어 풀고, 재미있는 문제를 뽑아 발표하여 보아라.
(예) 다음 대화를 읽고, 성수와 지희가 만나기로 한 날은 며칠인지 방정식을 세워서 풀어라.

성 수 : 우리가 다음에 만나기로 한 날이 언제지?
지 희 : 글쎄, 달력에서 약속 하루 전의 날짜와 약속 일주일 전의 날짜의 합이 30이었는데…….

<그림 II-8> D교과서 유형5 문항

III. 결론

본 논문의 연구문제에 따른 결론은 다음과 같다.

- 연구문제 1 - 대수 영역과 전체 영역에 있는 문제 만들기 문항의 개수는 어떠한가? 또 각 중단원 별 문제 만들기 문항의 분포와 내용은 어떠한가?

16종의 교과서에 실린 문제 만들기 문항수는 대단원별로 Ⅰ단원(집합과 자연수)에 22문항, Ⅱ단원(정수와 유리수)에 15문항, Ⅲ단원(문자와 식)에 17문항이다. 대단원별 문항 수를

비교하면 문제 만들기 활동이 각 단원별로 고루 분포하고 있다. 그러나 각 중단원에서 문항의 내용 요소(주제)를 살펴보면, Ⅰ,Ⅱ단원의 경우 일부 내용에 국한되어 있다. Ⅰ단원의 중단원인 집합단원의 경우 15문항 중 9문항이 나열된 원소를 이용하여 집합을 만드는 문항이고, 집합의 연산이나 벤다이어그램, 집합의 원소의 개수에 관한 문항은 적은 편이다. 또한 자연수의 성질 중단원에서는 7문항 중 5문항이 최소공배수 관한 문항이다. Ⅱ단원에서는 15문항 중 14문항이 정수와 유리수의 사칙 계산에 관한 문항이고, 1문항이 수의 체계(분류)에 관한 문항이다.

Ⅲ단원의 문자의 사용, 일차방정식, 일차방정식의 활용에서는 각 내용 요소가 문제 만들기 활동에 고루 나타나고 있다. 반면에 Ⅰ단원의 경우에 집합의 포함관계, 거듭제곱, 자연수의 소인수분해, Ⅱ단원의 경우에 정수나 유리수의 대소 관계에 관한 문제 만들기 문항은 어떤 교과서에서도 없다. 대단원별로 문제 만들기 문항이 고루 분포되어 있는 것으로 보이나, 내용 요소를 살펴보면 문제 만들기 활동이 특정 내용 요소에 머무르고 있다는 것을 볼 수 있다.

보통 한 교과서의 대단원에는 60-100개 정도의 문항이 실린다(종합문제 포함). 집합과 자연수 단원이 60문항, 정수와 유리수 단원은 70문항, 문자와 식 단원은 90문항 정도이다. 16종의 교과서에 실린 문제 만들기 54 문항은 한 교과서당 평균 3.375 문항으로 전체 문항의 1.5% 정도이며, 27종의 모든 검정교과서에 실린 문항수에 대한 비율로는 1%에 지나지 않는다. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 문제 만들기 활동을 새롭게 추가하여 이제 시작 단계이기는 하나 이는 매우 미미한 수준이다. 또한 수학에서 문제 만들기와 문제해결은 서로 함께하는 상호 작용이라는 점을 고려할 때, 문제 만들기라는 자연스런 수학 활동을 더 많이 더 구체적인 문제로 제시되어야 한다. 각 중단원의 내용 요소마다 문제 만들기 문항을 연구 개발할 필요가 있다. 이는 학생이 그 내용 요소에 관련된 다른 문제를 해결할 때, 학생 스스로 수치나 조건의 변화시키고 다른 식 만들기를 하는 등의 활발한 문제 만들기를 하게 하는 가이드라인이 될 수 있기 때문이다.

- 연구문제2 - 대수 영역에 있는 문제 만들기 문항에는 어떤 유형이 있으며, 유형에 따른 분포는 어떠한가?

대수영역의 전체 54문항 중에서 유형1이 22문항(40.7%)이고, 유형3가 26문항(48.2%)으로 5개의 유형 중 절대 다수를 차지한다. 유형1이 보편적인 문제 만들기 활동(a variation of theme)으로 전 단원에 고루 분포한다. 또 유형1의 경우에 주어진 숫자 뿐 아니라 상황, 조건, 규칙들을 변형하여 문제를 만드는 문항이 있으며, 이는 Brown과 Walter의 What-If-Not 전략을 활용한 문제로 확인할 수 있다. 유형3의 경우 나열된 원소로 집합을 만드는 문항이 26문항 중 8 문항이다. 본 연구의 분석 내용이 대수 영역이기 때문에 유형3의 문항 수가 많이 나타난 것으로 보여 진다.

유형2는 2문항(3.7%)으로 극히 일부이다. 유형2의 문제를 7학년 학교수학에서 제시하기 어려운 점이 있고, 또 이 유형의 문제는 만들기 어렵다는 것을 엿볼 수 있다. 그러나 유형2는 학생 스스로 더 필요한 조건을 탐색하여 문제를 해결해 나간다는 점에서 유형1의 경우보다 더 심화된 문제 만들기의 활동이다. 이와 같은 유형의 문항을 더 개발할 필요가 있다.

유형5는 2문항(3.7%) 뿐이다. 7차 교육과정에서 실생활 소재, 수학 외적 문제를 강조하여 문항 개발이 활발히 이루어 졌다. 실생활 소재를 주고 문제를 해결하게 하는 문항은 많이 개발되

었으나, 수학의 대상이 될 수 있는 실생활 소재부터 찾아 문제를 만들게 하는 문항의 개발은 아직 미비하다. 학생에게도 유형5의 문항은 처음부터 끝까지 모든 것을 구상하여 문제를 만들고 해결해야 한다는 점에서 난이도가 높다.

유형4도 2문항으로 3.7%에 지나지 않는다. 유형4는 수학 외적 문제 해결의 역과정으로 균형 있는 사고를 위해서도 필요하다 이와 같은 문제 만들기 활동을 통하여 학생 스스로 실생활 상황과 수학적 내용을 연결시킴으로써 학생들의 수학적 개념의 이해를 도울 수 있다. 또 학생들이 장래에 다양한 방면의 전문인이 된다는 점을 고려할 때, 유형4의 문제 만들기 활동이 중요하다.

유형2, 유형 4, 유형5에 해당하는 문항을 개발하기 위해 더 많은 연구가 필요하다고 하겠다.

참고문헌

강신덕 외 (2009). 중학교 수학1. (주)교학사.
교육과학기술부 (2006). 2006년 개정 교육과정 중학교 교육과정 해설-수학.
김남희 외 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 경문사.
김부윤 외 (2009). 중학교 수학1. 교과서다음(주).
김원경 외 (2009). 중학교 수학1. (주)비유와 상징.
김홍종 외 (2009). 중학교 수학1. 성지출판(주).
박규홍 외 (2009). 중학교 수학1. (주)동화사.
박영훈 외 (2009). 중학교 수학1. (주)천재문화.
박종률 외 (2009). 중학교 수학1. (주)도서출판 디딤돌.
송근화 외 (2009). 중학교 수학1. (주)새롬교육.
유희찬 외 (2009). 중학교 수학1. 대한교과서(주).
이대현 외 (2009). 중학교 수학1. 두레교육(주).
이영하 외 (2009). 중학교 수학1. (주)교문사.
이준열 외 (2009). 중학교 수학1. (주)천재교육.
정광식 외 (2009). 중학교 수학1. (주)대교.
정상권 외 (2009). 중학교 수학1. (주)금성출판사.
정순영 외 (2009). 중학교 수학1. (주)두산.
정찬현 외 (2009). 중학교 수학1. (주)대교.
박영배 (1991). 문제 만들기 활동을 통한 발전적 사고의 지도. 제 8회 수학 교육학 세미나 대한수학 교육학회 세미나 그룹.
나철영 (2001). 수학 문제만들기 활동이 문제해결력 및 학습 태도에 미치는 효과. 서울교육대학교 석사 학위 논문.
Bush, W.S., & Fiala, A. (1986). Problem stories : A new twist on Problem Posing. The Arithmetic Teacher.
Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). The art of problem posing : Lawrence Erlbaum Associates.
Frey, G. (1986). Links between stable elliptic curves and certain Diophantine equations, Ann. Univ. Sarav. Math. Ser1.
Guy, R. K. (1985). John Horton Conway in Mathematical People.
(ed. by J. Albers and G. Alexanderson). Contemporary Books, Inc.
Hales, T. (2000). Cannonballs and Honeycombs. Notices of AMS. Vol 47, No 4, 440-449.
Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating : Mathematical problem solving.
Serre, J. P. (1985). In interview with Jean-Pieree Serre (by C. Chong and K. Leong). Mathematical Intelligencer, Vol 13 No1, Springer-Verlag.
Singh, S. (1998). 페르마의 마지막 정리(박병철 옮김). 영림카디널.
Silver (1994). On Mathematical problem posing. For the learning of Mathematics.
Wiles A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. Math (2) 141 vol 3 443-551

Problem Fabrication in Algebra of Grade 7 under the Curriculum Revised in 2007

Choi, Sangki[4] · Mok, Yunha[5]

Abstract

The mathematics curriculum revised in 2007 includes 'problem fabrication'. So it is necessary to analyse the texts how much they include problem fabrication. In mathematics, problem fabrication and problem solving interact and stimulate each other. Also the main purpose of problem fabrication is to improve the students' problem solving.

There are 16 different texts of grade 7 algebra which contain problems concerning 'problem fabrication'. We count the number of such problems in each sections. Also we divide problem fabrication into five types . Then we count the number of problems in each type and its frequencies in a section.

Key words : Poblem fabrication, Problem solving, Variation of a theme, Varing the conditions, Changing numbers, Devising a set, Establishing an equation

4) Mathematics Education Department, Konkuk University (schoi@konkuk.ac.kr)
5) Graduate School, Konkuk University (mokhaha@naver.com)