

우리나라 수학교육에서 공학 활용의 역사와 현황¹⁾

손 흥 찬*

이 논문에서는 우리나라 학교수학의 교수·학습에서 가장 많이 사용되고 있는 공학적 도구들로 스프레드시트인 엑셀, 역동적 기하 소프트웨어인 GSP, Cabri, 그리고 CAS를 중심으로 이것들이 수학교육에서 활용되어온 역사와 특징 그리고 그것이 미친 영향을 살펴본다. 그리고 우리나라 수학교육에서 공학적 도구의 활용을 교육과정상의 변화, 교과서에서의 변화, 현직교사의 연수와 예비교사의 교육과정, 그리고 교실 등의 물리적 환경 등을 통하여 그 현황을 파악하고 미래의 수학교육에서 공학 활용에 대한 방향을 제시한다.

1. 들어가며

우리나라에서는 제6차 교육과정에서부터 교수·학습에서 계산력 향상을 요하지 않는 복잡한 계산이나 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극 활용할 수 있도록 하였다(교육부, 1992). 미국의 NCTM(2000)은 학교 수학을 위한 6가지 원리 중 하나로 공학의 원리를 들고 공학적 도구가 수학을 가르치고 배우는데 필수적이며 수학 지도 내용에 영향을 미치고 학생들의 학습을 촉진한다고 명시하고 있다. 즉, 공학이 기하, 통계, 대수, 측정, 산술 등 수학의 모든 분야에서 학생의 탐구과정을 지원하고, 공학적 도구를 이용할 수 있을 때 학생들은 의사 결정, 반성, 추론, 문제 해결에 초점을 둘 수 있다고 보고 있다. 여기에서 공학적 도구란 계산기를 비롯한 휴대용 장치, 통신 장치 그리고 컴퓨터 등을 포함하는 모든 종류의 전자 장치와 이것들을 사용할 수 있게 하는 응용 프

로그램 등을 의미한다(NCTM, 2005). 우리나라 7차 수학과 교육과정과 2007 개정 수학과 교육과정에서도 마찬가지로 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 것을 권장하고 있다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007).

그러나 우리나라의 경우 교육과정에서의 권고와는 달리 실제 학교 현장에서 공학의 사용은 활발하지 못하다. 교사가 수학 교수·학습 활동에서 공학적 도구의 활용에 관한 지식을 가지고 있다면 공학적 도구의 활용은 좀 더 활발하게 될 것이다. 학교 수학에서 공학을 사용하기 위해서는 교사는 기본적으로 어떤 공학을 어떻게 사용해야 할지에 대해 결정할 수 있어야 한다. 학교 수학의 교수·학습 활동에서 사용되는 여러 가지 공학의 활용 역사와 그 특징을 분석하고 그것의 영향을 알아보는 것은 공학을 효과적으로 활용하는데 도움을 줄 것이다. 김영진과 이재학(2010)에 의하면 현직 수학교사가 연수를 통해 학습했던 공학적 도구는 GSP, Cabri, Excel,

* 전북대학교 (hcsn@jbnu.ac.kr)

1) 이 논문은 2011년도 전북대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음.

CAS, Winplot 등이었지만 이 중에서 가장 많이 선택했던 세 가지는 GSP, Cabri, 엑셀이었다.

이 논문에서는 여러 가지 공학적 도구 중에서 스프레드시트인 엑셀, 동적 기하 소프트웨어인 GSP, Cabri 그리고 CAS를 중심으로 이것이 수학교육에서 활용되어온 역사와 특징 그리고 그것이 미친 영향을 분석해보고자 한다. 또한 우리나라 수학교육에서 공학적 도구의 활용을 교육과정 상의 변화, 교과서에서의 변화, 교실 등의 물리적 환경 등을 통하여 그 현황을 파악하고자 한다.

II. 스프레드시트, DGS²⁾ 그리고 CAS의 개발의 역사와 수학교육에의 활용

이 장에서는 스프레드시트, DGS, 그리고 CAS의 개발의 역사와 수학교육에 이들이 어떻게 활용되는지에 대해 간단히 알아보기로 한다.

1. 스프레드시트, DGS 그리고 CAS의 개발의 역사

본래 회계 정리를 위한 종이 스프레드시트는 수 백 년 동안 사용되어왔지만 개인용 PC에 탑재할 수 있는 소프트웨어 스프레드시트는 Daniel Bricklin이 1979년에 만든 VisiCalc가 최초의 것으로 볼 수 있다. 1978년 하버드대 학생이었던 Daniel Bricklin이 대화형인 가시적 계산기(interactive visible calculator)의 아이디어를 내고 이듬해인 1979년에 Bob Frankston과 함께 VisiCalc를 개발하였다. 1982년에는 IBM PC에 의해 Lotus 1-2-3이 개발되었다. 이것은 차트, 플로팅 그리고 데이터베이스의

통합 환경이 추가된 것으로 1980년대에 많이 사용되어 왔다(<http://dssresources.com/history/sshistory.html>, version 3.0. DSSResources.COM, A Brief History of Spreadsheets by Power, D. J., 2002.). 그 뒤를 이은 것이 마이크로소프트사가 개발한 Excel로 최초로 풀다운메뉴(pull down menu) 방식과 마우스 포인터를 사용할 수 있는 스프레드시트였다. Excel은 1990년대 중반부터 전 세계 스프레드시트의 대부분을 차지하게 되었다.

기하 교육에서 사용할 수 있는 동적 기하프로그램의 하나로 오늘날 우리 학교현장에서 어렵지 않게 찾아볼 수 있는 GSP는 미국 국립과학재단의 지원으로, Swarthmore 대학의 Eugene Klotz 박사와 펜실바니아의 Moravian 대학의 Doris Schattschneider 박사가 주도한 VGP(Visual Geometry Project)의 한 부분으로 개발되었다(Bennett, 1997). 개발자는 Nicholas Jackiw로 1987년 VGP에 참여한지 1년 뒤에 처음으로 매킨토시용 GSP를 만들었다. GSP는 많은 교사와 다른 사용자들이 시험하는 개방적인 형태로 개발되었다. Nicholas가 Key Curriculum Press에서 1990년에 베타 버전을 발표했을 때는 50여학교 이상이 이 소프트웨어를 시험하였다. 1991년에는 정식 소프트웨어가 출시되었고, 1992년 4월에 변환기능과 프리젠테이션 기능이 향상된 2.0버전이 발표되었다. 1995년 4월에 그래프의 기능을 향상시킨 3.0버전이, 2001년 가을에 4.0 버전이 발표되었고, 2010년 7월에는 버전 5.0이 발표되어 곡면을 더욱 상세하게 그릴 수 있는 등 점차 기능을 향상시켜가고 있다.

Cabri는 GSP와 함께 우리나라에서도 많이 사용되는 동적 기하프로그램의 하나로, 1985년 프랑스의 Jean-Marie Laborde의 박사학위 프로젝트로부터 시작되었다. 1988년 Cabri geometry가 애플 사로부터 좋은 소프트웨어 상을 받으며 주목받기 시작하였으며 1989년 프랑스 교육소프트웨어

2) DGS는 Dynamic Geometry Software를 줄인 말로 흔히 동적기하소프트웨어로 번역된다.

시장에 첫선을 보였고 1994년부터는 전 세계에 서 살 수 있게 되었다. 1996년에는 Cabri 소프트웨어가 Texas Instruments사의 TI-92에 탑재되었고, 2000년에 CabriLog라는 회사가 차려지면서 더욱 발전하게 되는데, 2004년에는 CabriJr가 TI-84에 탑재되었다. 2004년 가을에 Cabri3D가 출시되었는데 이 프로그램에서는 3차원에서의 도형의 작 도, 조작, 측정이 가능하게 되었으며, 지금은 좀 더 향상된 기능을 가진 Cabri3D v2가 출시되었 다(<http://www.cabri.com/cabri-3d.html>, Cabri3D v2, <http://www.cabri.net/cabri2/historique-e.php>, Cabri history).

컴퓨터대수체계(CAS)는 1960년대부터 개발되기 시작하였고 다양한 종류의 CAS가 나타났다. 최초의 대중적인 CAS는 Reduce, muMATH 그리고 muMATH에 기반한 Derive 등인데, Reduce는 Anthony C. Hearn이 1968년에, muMATH와 Derive 는 1980년도에 Soft Warehouse에 의해 개발되었다. 오늘날 많이 쓰이고 있는 Maple은 Maplesoft에 의 해 1984년도에, Mathematica는 Wolfram Research에 의해 1988년에 개발되었다. 우리나라에서 자주 사 용되는 CAS는 주로 TI(Texas Instruments)와 Casio 사에서 개발된 것들인데, TI에서는 1995년에 Derive 소프트웨어에 기초한 TI-92 계산기를 출시했고, 2007년에 최신의 TI-Nspire를 출시하였다. Casio 회 사는 FX-9750G PLUS 계산기를 시작으로 2001년 에 최신의 ClassPad300 계산기를 출시하였다(한세 호, 2007;<http://www.lkl.ac.uk>. ; <http://www.t3ww.org>).

2. 스프레드시트, DGS 그리고 CAS의 수 학교육에의 활용

스프레드시트를 처음 사용한 것은 1980년대 초반에 Witworth College의 Dean Arganbright가 교 수 세미나에서 ‘전자적 스프레드시트의 수학적 응용’이라는 주제로 강연할 때였다(Smith, 1992). 그리고 1980년대 초반까지는 수학에서 스프레드

시트의 교육적 사용이 가지는 잠재력이 많은 사 람에게 알려지게 되었다(Baker & Sugden, 2003). 1980년대 중반까지 스프레드시트는 몇몇 대학의 수학 수업에서만 다루어져 왔었고 많이 보급되 지는 않았지만, 1989년 이후로 스프레드시트는 대학수학에서 좀 더 많이 사용되었고, 이를 이 용하여 다룰 수 있는 주제도 미적분, 대학의 대 수, 미분방정식, 선형대수 등으로 확장되었다. 특 히 Healey와 Sutherland(Healey & Sutherland, 1990; Sutherland, 1991)가 초등학교 수준에서 어린이들 을 위한 자료를 개발한 이후에는 보다 많은 교 사들이 관심을 가지면서 학교수학에서도 사용되 기 시작했다(Bialas, 2001). 스프레드시트를 이용 한 교수·학습 자료를 개발한 후에는 스프레드 시트를 수학교육의 어떤 측면에서 사용할 때 특 히 효용성을 갖는지에 대한 탐구가 이어졌다.

오늘날의 스프레드시트는 자동계산 기능, 차 트 기능, 데이터 관리 기능, 매크로 기능 등을 제공한다. 특히 스프레드시트는 수많은 셀마다 수식 입력 기능과 함께 다른 셀을 참조하는 기 능이 있고, 참조되는 셀에 입력된 값이 변하게 되면 참조한 셀의 값이 변하게 되고, 참조한 셀 을 자동 복사하여 만든 표나 그래프가 동시 에 변하게 된다. 이를 함수에 적용하면 함수의 관 계식에서의 각종 매개 변수를 변화시켜가며 함 수의 특징이나 함수족을 용이하게 파악할 수 있다. 이 때 참조된 셀의 값을 변화시키는 데 는 스크롤바를 이용하여 쉽게 조작할 수 있도 록 만들 수 있다. 이것은 스프레드시트가 가지 는 중요한 특징이자 이점이다. 이와 같은 기능 들은 수학 교수학습에서 유용하게 사용될 수 있다.

이와 같은 특징을 갖는 스프레드시트를 활용 함으로써 얻을 수 있는 장점은 다음과 같다. 첫 째, 반복적인 많은 계산을 수행하여 쉽게 볼 수 있는 표로 나타내줌으로써 변수들 사이의 관계

와 전체적인 패턴을 파악할 수 있도록 하고, 수식과 표, 그리고 그래프 사이의 관계를 화면상에서 역동적으로 고찰할 수 있게 한다. 둘째, 복잡한 수식을 자동으로 계산해줌으로써 학생들이 수를 다루는 번거로움에서 벗어나, 보다 개념적이고 본질적인 수학적 내용을 탐구할 수 있도록 하고, 보다 실제적인 문제들을 탐구할 수 있도록 한다(Friedlander, 1998). 셋째, 문제 해결과정에서 “What if” 유형의 질문을 탐구할 수 있도록 한다(Masalski, 1999). 넷째, 스프레드시트는 여러 가지 아이콘과 함수식을 지원하기 때문에 프로그래밍 언어보다 더 시각적이고 더 쉽게 사용할 수 있다. 다섯째, 스프레드시트를 사용하는 동안 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용을 활발히 만들어준다. 또한 문제해결 도구로서 학생에게 산술이나 초기 대수의 영역에서 강력한 사고와 전략을 제시한다.

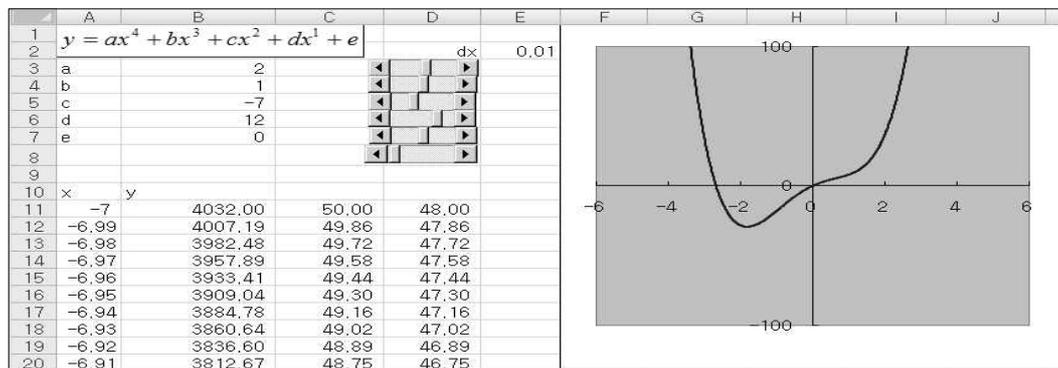
이와 같은 특징과 장점으로 인해 스프레드시트는 문자와 식의 지도, 대수와 함수의 지도, 수학적 모델링의 지도, 확률과 통계의 지도 등 수학교육의 다양한 분야에서 활용되었고 그 교수학적 논의가 있어왔다.

스프레드시트의 사용이 문자와 식을 지도하는데 도움이 된다는 것을 주장하는 결과들이 있는데, 주로 학생으로 하여금 수의 사용에서 문자의 사용으로 자연스럽게 전환하는데 도움을 줌으로

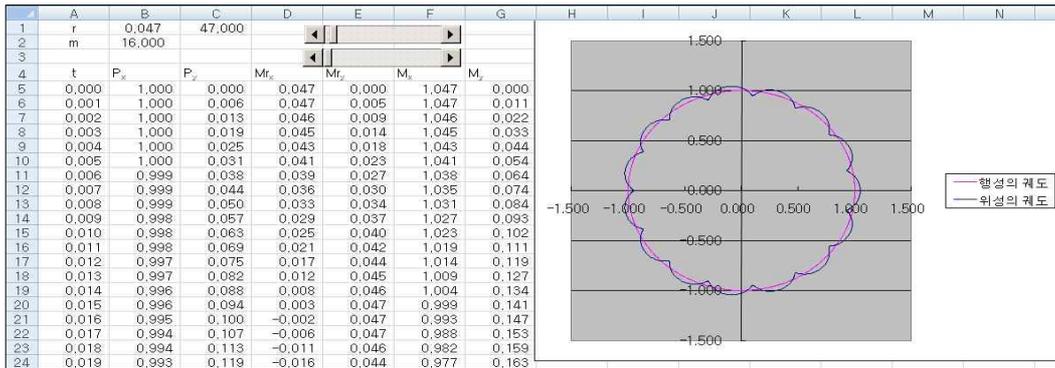
써 산술에서 대수로의 이행에 다리를 놓을 수 있거나 비형식적 개념을 형식화하는데 도움을 준다는 것이다(Friedlander, 1998, 1999; Sutherland & Rojano, 1993; Wilson, Ainley & Bills, 2004).

대수와 함수의 지도에서는 학생들에게 변화가 일어나는 다양한 문제 상황을 제공하고 함수적 상황에서 표, 그래프, 대수적 표현 사이의 상호작용을 충분히 이해하게 하는 것을 중요한 목표로 보고 학생들이 이를 위해 공학을 효과적이고 널리 사용하는 방법을 배우는 것이 필요하다고 보고 있다(NCTM, 2000). 지필 환경에서 교사는 표, 그래프, 대수적인 식을 역동적으로 상호 연결하기 어렵고 학생들은 이들의 관계를 의미 있게 파악하기 어렵지만 여러 가지 수학적 표현 사이의 번역 과정에서 학생들이 겪는 어려움은 공학을 이용한 수학적 표현들의 구체적인 연결을 통해 극복될 수가 있다. 예를 들어, [그림 II-1]에서는 다항함수에서 여러 계수를 바꾸어가면서 표가 바뀌고, 동시에 그 표에 의해서 생성된 그래프가 동시적으로 변하는 것을 관찰할 수 있다.

수학적 모델링을 지도하는데도 스프레드시트는 강점을 지니고 있다. 스프레드시트를 사용할 때는 컴퓨터로 어떤 작업을 수행하기 위해 필요한 프로그래밍을 하지 않아도 된다는 점들을 들 수 있다. 컴퓨터 언어를 배우는 데는 시간이 많이 소요되므로 제한된 시간 안에 적절한 결



[그림 II- 1] 다항함수의 그래프.



[그림 II- 2] 행성과 위성의 궤도.

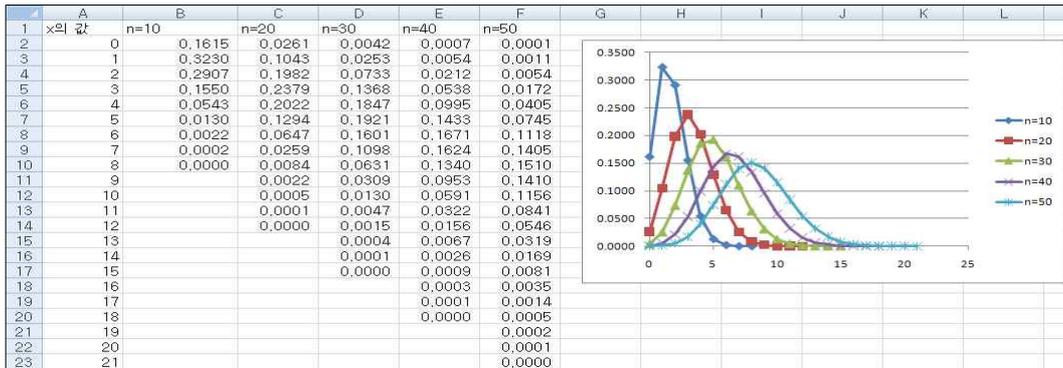
과를 얻는 것은 어렵지만 스프레드시트는 사용하는 식이 시각적이며 사용하기가 비교적 쉽고 즉시적으로 수치해석적 시뮬레이션이 가능하다. 또한 스프레드시트는 수학적 모델에서의 매개 변수의 변화가 야기하는 효과를 쉽게 관찰할 수 있으므로 탐구적 활동에 적합하다. 이러한 점이 장점이 되어 스프레드시트를 활용하면 모델의 해석 및 결과의 분석 그리고 예측의 단계에서 중요한 역할을 하며, 새로운 수학적 사실의 발견과 이의 정당화할 수 있는 기회를 제공할 수 있다(손홍찬, 2005). [그림 II-2]에서는 행성과 위성의 궤도를 계산하는 스프레드시트 수식을 표에 입력하고 표를 생성하여 위성의 공전 반경과 공전 주기를 바꾸어가면서 행성을 도는 위성의 궤도를 관찰할 수 있다. 실제로 지구를 도는 달의 공전 주기와 반경을 넣어 계산하면 두 개의 원은 거의 구분할 수 없을 정도의 겹치는 원이 됨을 볼 수 있어서, 실제 세계를 이해하기 위한 모델링에서 중요한 도구로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

스프레드시트는 다양한 통계를 내는 함수들을 갖추고 있어서 통계 교육에 유용하게 사용할 수 있다. 또한 히스토그램, 도수분포 다각형, 이항분포의 그래프, 정규분포곡선 등을 쉽게 그릴 수 있어서 표를 만들거나 수치적 계산을 하는 시간을 줄이고 개념적 학습에 보다 초

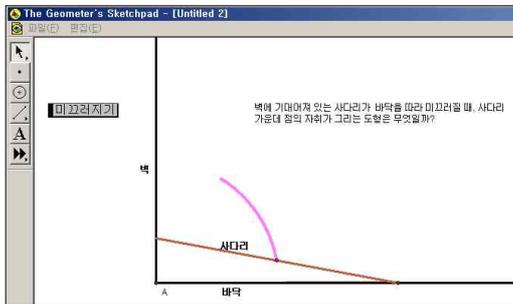
점을 맞출 수 있다. 예를 들어 이항분포가 정규분포에 근사하는 과정을 이항분포 값과 정규분포 값을 비교해가며 탐구할 수 있다(안대영, 1999). 또한 스프레드시트의 역셀은 통계학 공식에 의한 계산과정을 각 단계마다 즉시로 검증해볼 수 있으므로 입력된 자료와 원하는 통계의 명령만 주면 최종결과가 쏟아져 나오는 다른 패키지용 소프트웨어보다 교육적이라 할 수 있다(이정용, 2008). [그림 II-3]은 한 개의 주사위를 n 회 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수 X 가 따르는 이항분포 $B(n, 1/6)$ 의 그래프는 n 이 커짐에 따라 점차 좌우 대칭에 가까워지는 정규분포 곡선에 가까워진다는 것을 보여준다.

지금부터는 동적기하소프트웨어의 경우에 대해 알아보도록 한다. GSP의 경우 1991년 소프트웨어가 출시되었을 당시에 이미 수 백 명의 교사, 학생, 기하 애호가들에 의해 사용되고 있었고, 차츰 기능을 향상시켜 오늘날 수학교육용 소프트웨어로 자리 잡게 되었다(Bennett, 1997). 그리고 2001년 가을에 4.0 버전이 발표된 이후로는 대수학, 미적분학 수업에서 프로그램이 더욱 유용하게 사용될 수 있었다.

GSP는 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 정확히 작도할 수 있도록 하고, 상위 개체가 움직이면 하위 개체가 따라서 움직이므로 도형들의 관련성을 명백히 드



[그림 II- 3] 이항분포의 정규분포로의 근사.

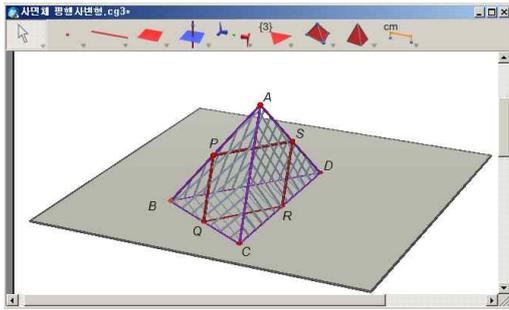


[그림 II- 4] 흔적남기기를 이용한 문제해결.

리내준다. 또한 도형의 변환, 측정, 계산 등의 기능이 있고 도형의 방정식을 그래프로 그릴 수 있는 기능도 가지고 있다. 스크립트를 이용하여 작도를 하는 과정을 기록할 수 있고, 그 기록으로 다시 작도를 따라할 수 있다. 또한 애니메이션 기능이 있어 움직이는 도형으로 흔적이거나 자취를 구하거나 도형의 성질을 설명할 때 사용할 수 있다. 예를 들어, <그림 II-4>는 벽면을 미끄러지는 사다리의 중점의 자취를 구하는 문제에서 GSP의 흔적남기기를 이용하여 힌트를 얻을 수 있음을 보여준다.

이러한 의미에서 GSP와 같은 소프트웨어가 주어지는 환경을 동적 기하 환경이라고 하는데, ‘동적 기하(dynamic geometry)’란 용어는 Nick Jackiw와 Steve Rasmussen에 의해 만들어진 뒤 많은 문헌에서 쓰이게 되었다(Goldenberg & Cuoco, 1998). 이와 같은 역동 기하 소프트웨어의 특징은 수

학교육의 개혁을 꿈꾼 사람들에게 변화를 앞당기는 역할을 하였다. 실제로 NCTM은 1989년 “수학교육과정과 평가의 새로운 방향”을 펴내기 전에, 이미 1985년에 Schwartz와 Yerushalmy 등에 의해 만들어진 Geometry Supposer와 같은 소프트웨어들의 영향력을 인지하고 있었으며, 공학을 이용함으로써 시간이 많이 걸리거나 지루한 일을 단축할 수 있고, 도형의 성질과 그들 사이의 관계에 대해 보다 많은 시간을 들여 탐구할 수 있다고 보았다(Bennett, 1997). Cabri 3D는 점, 각도, 선분, 평면, 입체 도형 등을 이용하여 간단한 도형으로부터 복잡한 도형까지 작도할 수 있는 소프트웨어로, 이것의 특징은 3차원에서 작도를 가능하게 한다는 점이다. 각도, 넓이, 부피 등에 대한 측정이 가능하고, 각이나 면, 입체에 이들을 측정할 수를 대응시킴으로써 기하와 대수를 연결한다. 또한 도형을 역동적으로 축소하거나 확대할 수 있으며, 변수를 조작함으로써 이들이 야기하는 변화를 살피고 도형의 대수적 성질과 기하학적 성질을 추측해볼 수 있다. 이와 같이 동적기하소프트웨어를 이용하면 대칭 변환, 회전변환, 평행이동뿐만 아니라 이들의 합성도 쉽게 할 수 있고 시각적으로 보여줄 수 있으며, 도형을 연속적이며 역동적으로 관찰할 수 있어서 도형의 개념을 정확히 이해시키는데 도움을 줄 수 있고, 수학의 여러 성질을 추론하게



[그림 II-5] 입체도형의 성질 추론.

할 수 있다. 예를 들어, <그림 II-5>는 사면체에서 그림과 같이 적당한 중점을 연결하면 사면체가 어떤 모양으로 바뀌어도 중점을 연결하여 얻은 도형은 평행사변형이 됨을 관찰할 수 있어 공간 도형의 성질을 추론하는데 도움을 얻을 수 있음을 보여준다.

Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strasser(2006)에 의하면 GSP 환경이 여러 가지 기하학적 주제, 예를 들면 삼각형, 사다리꼴, 다면체, 각, 넓이의 측정, 비와 비율과 같은 전통적인 기하학적 개념에 대한 학생들의 수학적 사고를 엿볼 수 있게 하고, 이러한 개념들에 대해 다른 측면을 일깨워줄 수 있음이 밝혀졌고, 작도 활동이나 증명 활동과 같은 기하적 활동을 통해 학생의 개념화에 진보와 변화가 있음을 알게 되었다. 국내에서 GSP가 처음 도입되면서는 교사들을 대상으로 GSP 활용 방법에 관한 연수가 지속적으로 실시되고 왔고 많은 교수·학습 자료들이 개발되어 왔다. 그리고 현직 교사 또는 수학교육 연구자들에 의해 역동적 기하환경에서의 중·고등학교 수학의 특정 단원을 지도하기 위한 교수·학습 자료들이 많이 개발되었다.

이와 함께 GSP나 Cabri와 같은 동적기하소프트웨어가 교수·학습에서 활용될 때 어떤 영향을 미치는지에 대한 연구들로부터는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. GSP와 Cabri는 문제 해결 과정의 이해, 해결 계획의 수립, 반성 단계에서

유용한 역할을 한다(김남희, 2002, 2007; 신양재, 심광보, 이재훈, 1999). 또한 동적 기하 소프트웨어의 적절한 활용이 학생이 수학적 사실을 발견하는데 도움을 주며, 발견한 사실을 설명하거나 증명에 필요한 통찰력을 제공할 수 있다(Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004; Hollebrands, 2002). 또한 van Hiele 수준이론과 관련하여, GSP의 활용은 학생들의 기하학적 수준을 상위 단계로 이행하도록 도와준다(이창연, 황우형, 2010).

CAS는 초기에 이론물리학자의 과학적 목적에서 컴퓨터 소프트웨어로 개발된 것으로 수량 계산 뿐만 아니라 대수적 기호를 처리할 수 있는 특징이 있다. 이러한 식을 처리할 수 있는 기능을 이용하면 식을 간단히 하기, 식의 전개와 인수분해, 벡터나 행렬의 계산, 방정식 풀이, 미분과 적분 등을 할 수 있다. 또한 다양한 표상을 제공하는데 특히 여러 가지 함수의 그래프를 그릴 수 있고, 함수의 최댓값과 최솟값 구하기, 정확한 값과 근사치를 표현할 수 있는 기능이 있고, 함수값을 표로 나타낼 수 있어 스프레드시트의 기능을 일부 가지고 있다. TI-89, TI-92, Casio FX2.0, Casio ClassPad300 등 CAS를 내장한 휴대용 기기가 출시되어 저렴한 가격에 CAS 휴대가 용이하게 되면서부터 국외 문헌에서 CAS의 활용이 좀 더 구체적이고 진지하게 논의되었다(장경윤, 2008). CAS가 학교수학에서 주목을 받기 시작한 것은 1992년 영국수학회 교육위원회가 소위원회를 구성하고 1996년 CAS 활용 지침서를 출간하였고, NCTM(2002)에서 Mathematics Teacher 11호를 CAS 특집으로 발간하면서부터이다. CAS 활용에 관심을 가진 학자들이 1996년 ICME-8에서 수학교육에서의 컴퓨터대수 국제심포지움을 갖기로 결의한 이후 CAS 활용에 집중한 수학교육 연구와 개발 정보 교환이 활발히 이루어지고 있다(<http://www.lkl.ac.uk>).

CAS는 대수적 기호를 처리할 수 있기 때문에 학교수학에서 대수 영역이 CAS의 영향을 가장 크게 받는다. Goldenberg(2003)은 대수 교육에서 형식(form)과 그 형식의 변환은 중요하고 대수에서는 의미를 유지한 채 형식을 변화시키는 것에 초점을 맞춰야 한다고 보았다. Heid(2003)는 학교 대수의 중요 사항들로 패턴 그리고 수치적 관계를 지배하는 규칙 일반화하기, 특정한 문제나 특정 유형의 문제를 해결하기, 물리적 현상을 모델링하기, 변수와 함수의 개념에 초점을 맞추기, 정해진 일련의 성질들이 지배하는 추상적 실체인 대수적 구조에 초점 맞추기의 다섯 가지를 현재의 중등 대수의 연구와 교육과정의 중심 사항으로 보았다. CAS는 이와 같은 학교수학 대수의 중심 사항에서 그 역할을 훌륭히 수행한다. 예를 들어 홀수들의 합에 대한 CAS의 계산 결과는 단순히 수치로 주어지기 때문에 다음과 같이 나타난다:

| Input | Output |
|-----------|--------|
| 1+3 | 4 |
| 1+3+5 | 9 |
| 1+3+5+7 | 16 |
| 1+3+5+7+9 | 25 |

[그림 II- 6] CAS의 계산 결과.

이 결과는 연이은 홀수들의 합이 항상 제곱수가 됨을 보여주는 것으로, 이것을 관찰하면 $1^2 + 3 = 2^2$, $2^2 + 5 = 3^2$, $3^2 + 7 = 4^2$ 임을 알 수 있고 이것을 일반화하면 $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ 를 얻을 수 있다. 이 마지막 식은 홀수들의 합이 제곱수가 됨을 명확히 설명해준다. 여기에서 개개의 홀수들의 덧셈을 CAS를 이용하여 구하는 것은 큰 의미가 없으나 보다 많은 자료를

생성하면 그 패턴을 유추하기에 보다 쉽다는 것을 알 수 있다.

이번에는 대수적 관점을 일반화의 측면에서 보았을 때, 기호적 결과를 일반화하는 CAS의 기능을 활용하는 방법을 예를 들어보자. 각각의 k 에 대해, $(a + 1)(a + 2)(a + 3) \cdots (a + k)$ 의 전개식을 CAS를 이용하여 구하여 보면 다음과 같다:

| Input | Output |
|--|--|
| expand((a+1)(a+2)) | $a^2 + 3 \cdot a + 2$ |
| expand((a+1)(a+2)(a+3)) | $a^3 + 6 \cdot a^2 + 11 \cdot a + 6$ |
| expand((a+1)(a+2)(a+3)(a+4)) | $a^4 + 10 \cdot a^3 + 35 \cdot a^2 + 50 \cdot a + 24$ |
| expand((a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)) | $a^5 + 15 \cdot a^4 + 85 \cdot a^3 + 225 \cdot a^2 + 270 \cdot a + 120$ |
| expand((a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)(a+6)) | $a^6 + 21 \cdot a^5 + 175 \cdot a^4 + 735 \cdot a^3 + 1755 \cdot a^2 + 1980 \cdot a + 720$ |

[그림 II- 7] CAS를 이용한 전개.

학생들은 위와 같이 다양한 예를 만들고 그것으로부터 상수항이 $k!$ 이 되고 a^{k-1} 의 계수가 삼각수 $\sum_{i=1}^k i$ 가 됨을 발견하고 정당화할 수 있는 기회를 얻을 수 있다. 이와 같이 CAS는 복잡한 계산 과정에서 생길 수 있는 실수나 혼란을 줄여 주고 다양한 자료를 쉽게 생성하여 나열함으로써 학생이 규칙을 추측하고 규칙이 왜 성립하게 되는지를 탐구할 수 있도록 해줌을 알 수 있다.

수학교육에서 공학적 도구의 활용이 위에서 열거한 바와 같이 여러 가지 장점을 지니고 있지만 또한 유의해야 할 점들이 있다. 스프레드시트는 강력한 문제해결 도구이기는 하지만 처리하는 문제의 추상성과 정보처리의 양에 따라 그

어려움 역시 같이 증가하고 스프레드시트 모델을 만드는 과정에서 학습자의 추상적 추론이 필요하다. 또 스프레드시트에서 변수의 부정확한 참조 등으로부터 학생들은 어려움을 겪을 수 있으며 화면에 출력되는 결과를 과신함으로써 주어진 문제 상황에 대한 깊은 이해가 경감될 수 있음에 유의할 필요가 있다(Friedlander, 1999). 또한 Teasley & Roschelle(1993)는 상호 협력적 학습이 항상 일어나는 것도, 예측 가능한 것도 아니어서 상호작용을 위한 노력을 하여야 한다고 지적한 바 있다. De Villiers(2007)는 학생들이 스스로 추측한 성질을 GSP 환경에서 드래그를 통해 사실임을 확인한 후에는 증명할 필요성을 느끼지 못함을 지적한 바 있다. 따라서 교사는 이 경우에 반드시 증명이 필요함을 주지시킬 필요가 있다. 한편 동적 기하환경에서 문제의 제작이 매우 중요하고, 유형이 서로 다른 문제가 학생에게 달리 영향을 끼치므로, 추측을 촉진하기에 적절한 문제는 어떤 유형이어야 하는가에 관심을 기울일 필요가 있다.

III. 스프레드시트, DGS 그리고 CAS가 학교수학에 미친 영향

스프레드시트와 동적기하소프트웨어와 같은 공학적 도구가 학교수학에 들어오면서 미친 영향은 여러 가지가 있지만, 수학교실에서의 실험 도입, 시각화의 효율적 활용과 수업지도계획의 변화, 그리고 상호작용의 측면에서 살펴보도록 한다.

먼저 수학 교실이 교사 중심의 지식 위주의 강의 전달식 수업에서 학생 중심의 실험적 수업으로 변모할 수 있다는 점을 들 수 있다. 수학은 원래 실험과 응용의 측면으로 구성된 실험적 학문이었지만 그리스인들이 연역적 방법을 수학에 적용하여 엄밀화한 이후로 수학은 오늘날 우리가

알고 있는 연역적 학문이 되었으며, 현대 수학의 특징처럼 되어 버렸다. 그러나 수학 지식을 연역적으로 제시하고 학생에게 이를 배우고 적용하도록 요구하는 것은 심히 부자연스런 것이며 많은 학생들이 수학에 당황하게 되는 이유가 된다. Freudenthal은 과학자에게나 학생에게 있어서 지식 습득의 상당한 부분은 실험의 측면에서 발생하므로 학생이 스스로 발견할 수 있는 것을 가르쳐서는 안 된다고 주장한 바 있다. 수학교육에서 실험을 적당한 몫을 찾고자 할 때 공학적 도구들은 큰 도움이 된다. NCTM(1989)은 수학교수의 중대한 변화를 요구하면서 기하교육에서는 기하를 완전한 연역적 체계로 제시하는 것을 강조하는 대신 보다 많이 학생에게 탐구하고 추측하게 만들 것을 요구하였다. 스프레드시트나 동적기하소프트웨어들은 학생이 직접 조작할 수 있어서 수동적이기보다는 능동적이고 적극적으로 학습에 임할 수 있게 하고, 복잡한 계산을 대신할 수 있고, 정확한 도형을 작도할 수 있으며 짧은 시간 안에 많은 자료를 생성함으로써 수학적 성질을 추론하는 데 매우 유리하다. 이러한 영향 때문에 수학 교실은 실험 중심으로 바뀔 수 있는 가능성이 열리게 된 것이다.

또 공학적 도구가 학교수학에 미친 다른 측면으로는 공학적 도구를 활용한 시각화의 효율적 활용과 수업 지도계획의 개선이다. 스프레드시트나 동적기하소프트웨어에서 나타나는 시각화는 대상, 사실 또는 과정을 그래프, 수치, 대수적인 결과, 또는 도형으로 보여주는 것으로 볼 수 있는데, 학생들은 주로 수학적 표현을 변환하거나 대수적 표현과 그래프 표현 사이의 대응관계를 이해하는 데 시각화를 사용하게 된다. 공학적 도구를 이용하여 그래프를 그릴 때는 즉각적인 피드백을 얻을 수 있어서 중요한 도움을 받을 수 있고, 신속하게 대수와 그래픽 표현 사이의 대응을 이해시킬 수 있거나 정확한 작

도를 할 수 있다는 점은 공학적 도구를 활용한 시각화가 가지는 장점이다. 또한 시각화 가능성은 수업 지도 계열의 개선으로 이어질 수 있다. Kilpatrick & Davis(1993) 또한 공학이 수학교육 과정을 개선할 때 수학이 무엇이고 미래사회에 수학의 어떤 지식이 필요한지를 결정하는데 영향을 끼친다고 하였다. Miyazaki, Kimih, Arai, Ogihara, Morozumi & Katoh(2008) 또한 2004년에 Cabri 3D가 도입됨으로써 중학교에 3차원 공간 기하 교육과정을 좀 더 개발할 필요가 있다고 주장하였다. Heid(1988)은 CAS를 사용하면 개념을 먼저 다루고 응용을 나중에 다루는 순서를 바꾸어 개념이나 기술 습득을 문제해결보다 앞에 두어야 할 필요가 없다고 하였다. 예를 들어 CAS를 도입하면 도함수 개념 없이 최댓값을 구할 수 있기 때문에 최적화 문제를 미적분 배운 뒤에 다룰 필요가 없다는 것이다.

마지막 측면으로는 스프레드시트나 동적기하 소프트웨어와 같은 공학적 도구를 활용한 교수·학습 활동에서는 상호작용이 활발하게 일어날 가능성을 가지고 있다는 점이다(Hershkowitz, Dreyfus, Ben-Zvi & Friedlander, 2002). 스프레드시트는 상호작용적이며 자료와 수식의 변화에 따른 즉각적인 피드백을 제공하며 학생이 습득한 지식을 공고히 해주고, 많은 멀티미디어 교육매체가 교수중심이어서 학생이 수동적 역할을 하는 것에 반해 스프레드시트는 구성주의적 학습 환경을 제공한다. 또한 스프레드시트는 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용을 활발히 한다.

IV. 우리나라의 수학교육에서 공학적 도구 활용에 대한 현황

여기에서는 우리나라 수학교육에서 공학적 도

구의 활용을 교육과정 상의 변화, 교과서에서의 변화, 현직 교사의 공학에 관한 연수, 교실 등의 물리적 환경 등을 통하여 그 현황을 파악해 본다.

우리나라는 국가 수준의 교육과정을 운영하고 있으므로 교육과정의 내용은 학교 수학에 지대한 영향을 미친다. 공학을 활용하는 것은 교사나 학습자 또는 교실의 물리적 환경에 따라 달라질 수 있으나 교육과정에 명시된 공학 관련 내용을 살피는 것은 학교 수학에서 공학 활용에 대한 대략적 방향성과 강조의 정도를 가늠할 수 있다. 우리나라 수학과 교육과정에서 계산기나 컴퓨터 사용과 관련하여 처음 언급된 것은 6차 교육과정이다. 6차 교육과정에서 교수·학습 방법에서 공학적 도구와 관련된 내용은 다음과 같다(교육부, 1992).

교수·학습과정에서 계산력 향상을 요하지 않는 복잡한 계산이나 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극 활용할 수 있도록 한다.

7차 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에서 공학적 도구와 관련된 내용은 다음과 같다(교육부, 1997).

- 교수·학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 적극 활용하여 학습의 효과를 높이도록 한다.
- 계산능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는 복잡한 계산, 수학적 개념·원리·법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 한다.

2007 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에서뿐만 아니라 평가에서도 공학적 도구와 관련된 내용이 있는데 이는 다음과 같다(교육인적자원부, 2007).

(교수·학습 방법)

- 교수· 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.
- 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.

(평가)

- 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

우리의 6차 교육과정보다 앞선 미국의 NCTM의 ‘학고수학을 위한 원리와 기준’에서는 공학의 활용에 대해 “수학 수업에서 계산기와 컴퓨터의 사용이 대폭 허용되어야 한다”고 강조하였고, NCTM “Standard 2000”에서는 공학의 원리를 6가지 원리 중의 하나로 제시한 바 있다. 위에서 살펴본 바와 같이 1992년에 개정된 6차 교육과정에서는 수학교육에서 공학의 활용에 대한 세계적인 조류를 수용했다고 볼 수 있으며, 비교적 간단하게 공학적 도구의 활용을 강조하였다. 7차 교육과정에서는 보다 자세하게 다양한 영역에서 공학적 도구의 활용을 강조하고 있다. 2007개정 교육과정에서는 한 발 더 나아가 평가에서도 공학적 도구를 활용할 수 있는 길을 터놓았다. 이와 같이 최근의 교육과정으로 진행되면서 수학교육에서 공학 활용을 점차적으로 강조하고 있으며 활용 범위를 더 넓게 확대하고 있음을 볼 수 있다.

수학교육에서 공학의 활용에 대한 연구를 엑셀, GSP, Cabri, CAS를 중심으로 개략적으로 살펴

보면 다음과 같다.³⁾ 엑셀에 대한 연구는 1999년부터 나타나기 시작하여 현재에 이르고 있다. DGS에서 가장 많이 연구되어진 도구는 GSP로 1998년부터 현재에 이르기까지 지속적으로 연구되고 있고, Cabri 또한 1999년부터 연구되어 온 것을 볼 수 있지만 학술대회 논문집 등에 발표된 것을 빼면 많지 않다. CAS에 관한 연구는 조금 늦게 2005년도부터 현재까지 지속적으로 연구되고 있음을 알 수 있다. 엑셀, DGS 그리고 CAS에 관한 연구에서는 이들 도구가 주어진 교수·학습 환경의 특징과 이것이 수학 교수·학습에 미치는 영향, 예를 들면, 수학적 성질의 추측과 발견, 정당화, 문제 해결, 기하학적 수준이론, 지도 계열, 대수와 기하의 연결, 상호작용 등에 관한 다양한 이론적 고찰이 이루어졌다. 아울러 교수·학습 자료 개발 및 그 효과 검증이 꾸준히 함께 이루어져왔음을 알 수 있다. 특히 엑셀에 관한 연구에서는 엑셀의 특징을 반영하여 함수, 대수, 기하, 미적분, 통계의 지도 등 수학의 다양한 여러 주제에 대한 연구가 있음을 알 수 있다. 그러나 특기할만한 것은 공학적 도구를 활용한 수학 수업에서의 평가에 관한 연구는 우리나라에서 거의 찾아볼 수 없다는 점이다.

교과서에서의 공학의 활용은 점차적으로 그 질적 양적인 측면에서 증가되어 왔다. 이정례(2010)는 7차 교육과정의 고등학교 수학 5개 과목에 대해 13개 출판사에서 발행된 교과서 분석에서 공학의 활용 횟수가 적고 소극적 활동 중심임을 밝히고 사용된 공학적 도구가 제한적이어서 직접 실험하는 것이 어렵다고 주장하였다. 김미화(2011)는 6차, 7차, 2007 개정교육과정의 교과서 5종 180여권을 분석하여 교과서에서 공학의 활용 장면이 양적인 면에서 증가해왔음을 보였다. 6차, 7차, 2007개정 교육과정의 교과

3) 대한수학교육학회와 한국수학교육학회에서 발행하는 한국연구재단 등재 학술지 4종을 중심으로 분석하였다.

서에서 공학의 활용과 관계된 장면은 각각 25건, 48건, 355건이고, 시일이 지나면서 더욱 다양한 도구들이 사용되고 있음을 밝혔다. 또한 6차 교육과정에서의 공학적 도구를 활용하는 장면은 매우 적음을 밝히고, 주로 계산기가 60%를 점유하고 프로그래밍 언어가 32%가 차지였고, 스프레드시트, DGS, CAS는 거의 사용되지 않았음을 보였다. 그리고 공학적 도구의 분류로 스프레드시트, 기호 조작 -그래프 작성 소프트웨어(SG) 그리고 DGS에 대한 활용 빈도는 7차 교육과정 때 18%, 19%, 11%이고 2007 개정 교육과정 때에는 39%, 19%, 13%를 차지함을 보였다. 또한 공학을 활용하는 방법도 처음에는 공학적 도구를 소개하거나 단순히 사용하는 방법을 설명하는 것에서 점차적으로 학생 중심의 활용을 유도하는 쪽으로 변해가고 있음을 보여주었다.

교과서에서 공학의 활용은 빈도 면에서 6차 교육과정은 매우 적었고, 7차 교육과정에 와서 폭발적으로 늘었으며 2007개정 교육과정에서도 꾸준히 증가하고 있음을 볼 수 있고, 활용하는 공학적 도구의 종류도 시일이 지나면서 증가됨을 알 수 있다. 비록 SG가 CAS를 일부로 포함하고 있을지라도, 사용되는 여러 가지 공학적 도구들 중에서도 스프레드시트와 DGS, CAS는 다양한 도구들 중 상당한 비중을 항상 유지하고 있음을 볼 수 있다.

공학의 활용과 관련한 중요한 요인 중의 하나는 교사연수와 예비교사의 공학적 도구 활용에 대한 훈련이다. 이와 관련하여 이재학(2010)이 중등 수학교사가 임용된 이후 현직 연수에서 학습했던 공학 도구에 관한 조사를 보면 약 77%가 GSP, 40%가 Cabri, 그리고 70%가 엑셀을 학습했으나 기타 도구에 대해서는 제일 많이 학습한 것이 4%에 못 미칠 정도로 나머지 공학적 도구에 대해서는 거의 학습하지 않은 것으로 나타났다. 공학 도구 연수 시간에 대해서는 75%가

매우 부족하거나 부족하다고 응답하였고, 응답자의 반수 정도가 연수에서 기본 기능 익히기와 간단한 실습을 하였다고 응답하였음을 보고하고 있다. 그러나 연수 내용의 현장 활용성에 대해서는 ‘보통’ 이상이 92%에 달해 연수의 필요성을 여실히 보여주고 있다. 예비교사의 수학교육공학 관련 수강에 대한 조사에서 박경미, 정영옥, 김화경, 김동원, 최수일, 최지선(2010)은 전국 사범대학과 교육대학의 약 67%가 수학교육에서 공학 관련 과목을 개설하고 있음을 보여주고 있다. 사범대학의 경우 교육대학보다 비율이 높아 약 88%에 이르는 것을 알 수 있다.

교육과정 상의 변화와 교과서 상에서 공학 활용에 대한 비중이 점차 증가하고, 예비 교사 교육에서의 공학 활용 학습에 대한 여건도 비교적 양호해지고 있다. 그렇다면 학교 현장에서의 공학적 활용은 활발할 것인가? 우리가 주지하다시피 학교 현장에서의 공학의 활용은 그렇게 활발하지 않다. TIMSS 1999가 공학적 도구의 강조에 관한 지표 ECMC(emphasis on calculators in mathematics class)를 만들어 분석한 결과 네덜란드, 싱가포르, 호주는 4/5 이상이 높은 ECMC를 나타냈지만, 우리나라는 중국, 일본, 대만 등과 함께 절반이 넘는 학생이 낮은 ECMC를 나타냈는데(Mullis et al., 2000), 오늘날도 이정례(2010)가 지적한 바와 같이 공학을 활용할 수 있는 교과교실의 부족 때문에, 또는 현직 교사의 연수 부족 그리고 입시에 초점을 맞추는 교육 현실 때문에 공학의 활용은 그렇게 활발하지 않다.

V. 논의 및 제언

Kutzler(2003)는 공학적 도구의 역할을 각각 물리적인 이동 수단과 지적인 수학에 비유하였는데, 걸기와 속셈, 자전거 타기와 지필 계산, 자

동차 운전과 계산기나 컴퓨터의 자동화 기능, 휠체어와 컴퓨터의 보완적 기능이 그것이다. 그는 우리가 만일 150m 떨어진 곳에서 신문을 사려고 한다면, 걷는 것이 이동의 가장 좋은 방법이고, 만약 신문판매점이 1km 떨어져 있다면, 자전거를 타는 것이 좋고 만약 신문판매점이 10km 떨어져 있다면, 아마도 차를 운전해 가는 것이 현명한 방법인 것이라며 공학적 도구의 현명하게 활용할 필요가 있음을 지적한 바 있다.

공학적 도구의 현명한 활용을 위해서는 사범대와 교대에서의 수학교육 공학 강좌가 지속적으로 늘어날 필요가 있고, 교사의 현직 연수 또한 학습 시간을 늘려 다양한 공학적 도구를 학습할 기회를 주어야 한다. 특히 공학 활용에 관한 지식 중 주어진 공학적 도구를 사용하는 방법을 배우는 것과 어떻게 사용하는 것이 좋은지를 배우는 것은 양상을 달리한다. 전자의 경우는 교사들끼리의 학습 공동체를 통해서 어렵지 않게 배울 수 있는 특징이 있고 후자의 경우에는 수학교육 전문가에게 연수를 통하여 배우는 것이 효율적일 수 있다. 따라서 이와 같은 경우에는 자체 학습 공동체나 대학에서의 연수를 활성화하기 위한 지원책을 아울러 고민할 필요가 있다. 또한 연구자들은 수업에서 즉시적으로 활용할 수 있는 자료를 개발할 필요가 있다. 현재 공학 관련 많은 논문이 발표되고 있지만 이러한 결과를 다듬어서 수학 수업 시간에 구체적이고도 즉각적으로 사용할 수 있는 수업 자료들을 조직적이고 체계적으로 개발한다면 현직 교사에게는 큰 도움이 될 것이다.

교육과정의 경우 지금까지 꾸준히 공학 관련 내용이 추가되었고, 현재 개발하고 있는 2012개정 교육과정에서도 보다 공학을 보다 효율적으로 활용할 수 있도록 유도하고 있다. 예를 들어, 중학교 기하 영역에서 “다각형의 성질을 추측하고 정당화할 수 있다”와 같은 기술은 이전의 2007

개정 교육과정의 같은 항목 “다각형의 성질을 이해한다”보다는 공학적 도구의 활용 가능성을 높이는 것으로 볼 수 있고, 이러한 교육과정에 기초한 교과서에서 공학을 활용한 추측과 정당화 과정을 밟을 수 있도록 문제 상황을 구성할 수 있는 가능성을 높였다고 볼 수 있다. 교육과정에 공학적 도구를 활용한 평가가 명시되어 있지만 현재는 거의 이루어지지 않고 있다. 평가에서 공학을 사용하도록 하기 위해서는 공학을 사용하는 것이 유리한 문항과 공학을 사용해야만 해결할 수 있는 문항을 개발할 필요가 있고 이를 학업 성취도 검사와 같은 평가에서 사용할 필요가 있다. 또한 이를 위해 국내 연구자들의 공학을 활용한 평가에 대한 연구는 미미한 편으로 앞으로 이에 대해 좀 더 연구를 할 필요가 있다.

교과서에서 공학을 활용한 문제 상황을 구성할 때에도 학생 중심의 탐구를 할 수 있도록 구성할 필요가 있다. 이와 같은 문제 상황은 2007 개정 교육과정에 들어와서 나타나기 시작하였는데(김미화, 2011), 앞으로 이와 같은 문제 상황의 제시가 더욱 늘어날 필요가 있다. 더 나아가서 특정한 주제의 교수학습에서 공학을 활용하는 것이 그렇지 않은 것보다 바람직하다고 한다면 반드시 공학을 활용할 수밖에 없도록 교과서를 집필하여 공학의 활용을 강제하는 하나의 방법이 될 것이다. 호주의 빅토리아주의 경우 공학을 활용해야만 풀리는 문항을 일정 비율 출제하고 있기도 하다.

다른 한 편으로 공학을 활용하기에 적합한 물리적 환경을 조성하는 일 또한 중요하다. 우리나라의 컴퓨터 1대당 학생 수는 2010년의 경우 중학교는 5명, 고등학교는 4.1명으로 양호한 편이다(교육인적자원부 & 경상남도 교육청, 2010). 우리나라의 학생 1인당 교수학습을 위한 컴퓨터 대수가 세계적으로 상위권이라고 하더라도 적어도 수학 수업을 할 수 있는 컴퓨터실 또는 전용

강의실을 설치할 필요가 있다. 또 이를 뒷받침하기 위해 수학 전용강의실과 수학 수업에 필요한 공학적 도구를 도입하는 데 어느 정도의 예산이 필요한지에 대한 정책 연구도 해볼 필요가 있다. 이와 더불어 최근 초등학교에서 80분 수업을 도입한 것처럼 중고등학교에서도 100분 수업을 도입 확대해 나간다면 수학 수업에서 공학을 학생 중심의 탐구형 도구로 활용하기에 더욱 용이할 것이다.

참고문헌

- 강순자·고상숙(1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하학습자료 개발: GSP를 이용하여 정다면체 구성. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제38권, 제2호**, 179-187.
- 계영희·김종민(2008). GSP를 활용한 한국 전통문양의 테셀레이션 작도. **한국수학사학회지b 제21권, 제2호**, 71-80
- 교육부(1992). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 1997-14호),
- 교육부(1997). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8]). 서울: 대한교과서주식회사,
- 교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 2007-79호 [별책 8]). 교육인적자원부.
- 김남희(2002). '문제해결' 관점에서의 GSP 활용. **학교수학, 제4권, 제1호**, 111-125.
- 김남희(2006). 문제해결력 신장을 위한 Cabri3D의 교육적 활용, **수학교육학연구, 16, 제4호**, 345-366.
- 김부운·이영숙·김현구(2003). GSP4를 이용한 이차곡선과 Cycloid에 관한 지도 방안. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 제15집**, 261-271.
- 김미화(2011). **중등 수학과 교과서에서 공학적 도구 활용의 변화 분석**. 전북대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 김영진·이재학(2010). 중등 수학 교사의 공학 관련 현직 연수 실태 분석 및 개선 방안 연구. **수학교육논총 제38집, 대한수학교육학회**, 37-48.
- 류희찬(1997). **수학교육에서의 컴퓨터의 활용: 현황과 과제**. 한국교원대 수학교육연구소 제 6회 수학교육세미나.
- 박경미·정영옥·김화경·김동원·최수일·최지선(2010). **우리나라 초·중등학교 수학교육 발전 방안 기획 연구**. 한국과학창의재단.
- 손홍찬(2005). 스프레드시트 환경에서 모델링 활동을 통한 수학적 발견과 정당화, **학교수학, 제7권, 제4호**, 427-444.
- 신양재·심광보·이재훈(1999). GSP를 활용한 열린 기하 수업에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 E, 수학교육논문집. Vol. 8**, 303-315.
- 안대영(1999). 통계에서 엑셀의 교수학적 활용 가능성. **한국수학교육학회 시리즈 E, 수학교육논문집, 제8집**, 317-330.
- 이정용(2008). 엑셀 매크로(MACRO) 기능을 이용한 통계학 참여수업의 예. **응용통계연구 21, No. 2**, 355-359.
- 이정례(2010). 학교수학 교수·학습에서 기술공학의 활용 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E, 24(1)**, 24-48.
- 이창연·황우형(2010). 반힐레 이론과 GSP를 활용한 중학교 기하영역에 관한 연구, -8-나 단계의 사각형의 성질을 중심으로-, **한국수학교육학회 시리즈A <수학교육>, 49, No.1**, 85-109.
- 한세호(2007). **고등학교 수학학습에서 컴퓨터 대수체계(CAS)의 도구발생**. 건국대학교 대

- 학원 박사학위 논문.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, No.3, 66-72.
- Baker J. E. & Sugden S. J. (2003). Spreadsheets in education—the first 25 Years, *eJSiE 1*, No. 1, 18-43.
- Beare, R. (1993). *How spreadsheets can aid a variety of mathematical learning activities from primary to tertiary level. Technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning*. B. Jaworski. Birmingham, U.K.: 117-124.
- Bennett, D. (1997). *Exploring geometry with the geometer's sketchpad*. Key Curriculum Press.
- Bialas, Piotr. (2001). *Spreadsheet use in an elementary statistics course*. Doctoral Dissertation, Columbia University Teachers College.
- Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, *Bergen-Norway*, Vol. 2, 215-222.
- De Villiers, M.D. (2007). *Proof in dynamic geometry*. Proceedings of the Ninth International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project, University of North Carolina at Charlotte, USA.
- Freudenthal, H. (1979). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klertt Stuienbücher.
- Friedlander, A. (1998). An excellent bridge to algebra, *Mathematics Teacher*, 91, No. 50, 382-383.
- Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, 337-344.
- Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. (1998). *What is dynamic geometry?* In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), Designing learning environments for developing understanding of geometry and space, 351-368. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Goldenberg, E. P. (2003). *Algebra and Computer Algebra*. In Fey. J,T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education(pp. 73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Healey, L. & Sutherland, R. (1990). *The role of peer group discussion in mathematical environment(Final Report to the Leverhulme Trust)*. London: London University, Institute of Education.
- Heid, M. K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.
- Heid, M. K. (2003). *Theories for Thinking about the Use of CAS in Teaching and Learning Mathematics*, In Fey. J,T., Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education (pp. 73-88). Reston, VA: National Council

- of Teachers of Mathematics.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A. (2002). Hadas, N., Resnick, T. & Tabach, M., *Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer-researcher-teacher-learner activity*. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 657-694. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hollebrands, K. (2002). *The role of a dynamic software program for geometry in high school students developing understandings of geometric transformations*. In D. Mewborn(Ed.), *Proceedings of the 24th PME-NE Annual meeting*, 695-706.
- Kilpatrick, Jeremy. & Davis, Robert. B. (1993). *Computers and Curriculum Change in Mathematics*. In Keitel, C & Ruthven, K. (Eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, 203-221, Berlin: Springer-Verlag.
- Kutzler, Bernhard. (2003). *CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics*. In Fey, J. T., Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M. (Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*, 73-88. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283-317.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). *Teaching and learning geometry with technology*. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 275-304. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Leung, F. K. S. (2006). *The impact of information and communication technology on our understanding of the nature of mathematics*. *For the learning of Mathematics* 26, 1.
- Masalski, W. J. (1999). *How to use the spreadsheet as a tool in the secondary school mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.
- Miyazaki, M., Kimih, C., Arai, H., Ogihara, F., Morozumi, T., Katoh, R. (2008). *Potentials of spatial geometry curriculum development with three-dimensional dynamic geometry software in lower secondary mathematics*. *Preceeding of the 11th International Congress on Mathematical Education(ICME)*, Monterrey, Mexico.
- Morishita, E., Iwata, Y., Yoshida K. Y, & Yoshida H. (2001). Spreadsheet fluid dynamics for aeronautical course problems. *International Journal of Engineering Education* 17, No. 3, 294-311.
- Mullis, I., Martin, M., Gonzalez, E., Gregory, K., Garden, R., O'Connor, K., Chrostowski, S. and Smith, T. (2000). *TIMSS 1999 International Mathematics Report*, Boston, MA, International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- NCTM (1992). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. 구광조 · 오병승 · 류희찬(역). *수학교육과정과 평가의 새로운 방향*. 서울: 경문사.

- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2005). *Technology-supported mathematics learning environments*, sixty-seventh yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Neuwirth, E., & Arganbright, D. (2004). *The active modeler: Mathematical modeling with Microsoft Excel*. Belmont, California, Brooks Cole Publishing Company.
- Smith, R. S. (1992). *Teaching precalculus with a spreadsheet*. In Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, New York: Addison-Wesley.
- Sutherland, R. (1991). Some unanswered questions on the teaching and learning of algebra. *For the Learning of Mathematics*, 11, No. 3, 40-46.
- Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical behavior*, 12, 353-383.
- Teasley, S. D., & Roschelle, J. (1993). *Constructing a Joint Problem Space: the Computer as a Tool for Sharing Knowledge*. In S. P. Lajoie & S. J. derry(Eds.), *Computers as Cognitive Tools*, 229-258. London: Chapman & Hall.
- Wilson, K. Ainley, J., & Bills L. (2004). *Spreadsheet generalizing and paper and pencil generalizing*, In Høines, M. J. Fuglestad, A. B. (Ed.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, 441-448.
- Websites
<http://www.cabri.com/cabri-3d.html>, Cabri3D v2.
<http://www.cabri.net/cabri2/historique-e.php>, Cabri history.
<http://dssresources.com/history/sshistory.html>, version 3.0. DSSResources.COM, A Brief History of Spreadsheets by Power, D. J., 2002.
<http://www.lkl.ac.uk>.
<http://www.t3ww.org>.

Trend and Prospect on Using Technology in Mathematics Education in Korea

Son, Hong Chan (Chonbuk National University)

As teachers need to understand how to select and use technology in mathematics education, analysis on history, characteristics, and effects of various technology used in school mathematics will facilitate effective use of technology.

This thesis aims to analyze through literary studies the history, characteristics, and effects of using spreadsheets Excel, dynamic geometry softwares GSP,

Cabri and CAS, the most commonly used technology in teaching and learning mathematics in Korea.

And we also study the current trends on using technology in mathematics education in Korea by investigating research trend, secondary mathematics curriculums past and present in Korea, mathematics textbooks, and classroom environments.

* key words : 스프레드시트(spreadsheets), 엑셀(Excel), 역동적기하소프트웨어(dynamic geometry software), GSP, Cabri, CAS, 수학교육(mathematics education).

논문접수 : 2011. 7. 20

논문수정 : 2011. 9. 01

심사완료 : 2011. 9. 09