

## 행렬의 연산을 통해 본 일대일 대응의 의미에 관한 고찰

정 영 우\* · 김 부 윤\*\* · 황 중 철\*\*\* · 김 소 영\*\*\*\*

본 연구는 행렬 연산지도의 실태를 분석하여 행렬 연산에 관한 이해의 필요성을 제시한 후, 행렬의 연산이 정의되는 이론적 배경의 탐구를 통하여 일대일 대응의 의미에 대해 고찰한다. 대수적 관점에서의 일대일 대응의 의미는 '이미 구조를 알고 있는 집합에서 일대일 대응을 통하여 새로운 집합에 대수적 체계를 도입할 수 있게 하는 수단'이라는 것이다. 즉, 동형구조를 만드는데 있어 핵심 아이디어라는 것이다. 행렬의 연산을 예로 한 일대일 대응에 관한 이러한 고찰과정은 수학적 사실의 필연성 및 개연성을 경험하게 하여, 그러한 수학적 아이디어들이 단순히 주어지는 것이 아니라, 특정의 목적성 있는 활동의 결과물임을 인식하게 한다. 또한 일대일 대응의 본질적 이해는 행렬에 대한 논의에 그치지 않고 지수법칙, 대칭차집합, 순열 등 다양한 수학적 지식을 전개하기 위한 기저가 된다. 이러한 연구의 목적은 교사와 학생들에게 수학적 개념의 의미 충실한 이해를 돕는데 있으며, 나아가 교사의 가르칠 지식에의 전문성을 높이는데 있다.

### 1. 서론

학교수학에서 유리수나 행렬의 연산은 직관적 방법에 의해 도입되거나 형식화·알고리즘화 되어 제시되고 있다. 더구나 유리수의 덧셈 규칙이나 행렬의 곱셈 규칙은 유리수의 곱셈 규칙이나 행렬의 덧셈 규칙에 비해 부자연스러워 교사나 학생들이 보다 수용적 태도를 견지하게 된다.

특히 신보미·박종률·임재훈(2000)은 행렬에 있어 이러한 지도의 문제점을 지적하면서, 행렬을 함수와 관련시켜 도입하면 그 곱셈의 정의 방식에 대한 적절한 이유를 충분히 제시할 수 있음을 보이고 있다. 또한 행렬을 단순

히 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것으로만 소개하고 행렬의 곱셈을 부자연스런 예를 들어 정의한 후, 서둘러 그것을 알고리즘에 따라 정확히 계산하는 단계로 옮겨가는 현행 행렬 지도 방식은 바른 지도방법이라고 보기 어려우며, 함수적 사고를 중시하는 측면에서 볼 때도 바람직하지 않다고 지적하고 있다.

행렬의 연산(덧셈과 곱셈)은 일대일 대응에 의한 '구조의 보존'이란 목적성을 가지고 엄밀히 구성된 것이다. 집합에 연산을 부여할 때 가장 중요한 것은 '정의되는 연산의 결합법칙이 성립해야 한다'는 것인데, 일대일 대응에 의한 구조의 보존을 이용하지 않고 결합법칙을 만족하도록 연산을 정의하는 것은 불가능에 가깝다.

\* 부산대학교 (nahime1130@hanmail.net)

\*\* 부산대학교 (kimby@pusan.ac.kr), 교신저자

\*\*\* 부흥고등학교 (oecuoe@empal.com)

\*\*\*\* 부산과학고등학교 (ksy813@hanmail.net)

한편 개정 고등학교 수학과 교육과정 해설서(2009)에는 ‘기하와 벡터’ 과목의 행렬 단원에 다음과 같은 내용이 제시되어 있다.

좌표평면에서 정의된 함수(변환) 중에서 특별한 성질을 가지는 함수는 행렬을 이용하여 쉽게 다룰 수 있는데, 이는 기하학적 내용을 대수적으로 접근하는 방법에 대한 기본적인 이해를 증진시킬 수 있는 내용이다. 일차변환은 기하학에서 중요한 역할을 하는 것은 물론 물리학, 경제학, 사회, 과학 등의 여러 분야에서 널리 활용되고 있다. 일차변환과 행렬 사이의 관계를 이용하면 대칭변환, 닮음변환, 회전변환뿐 아니라, 일차변환의 합성을 행렬의 곱으로 나타냄으로써 복잡한 일차변환을 간단히 다룰 수 있다.

이처럼 ‘일차변환의 합성을 행렬의 곱으로 나타냄으로써 복잡한 일차변환을 간단히 다룰 수 있다’고 언급하고 있으나, 오히려 행렬의 곱은 일차변환의 합성을 일대일 대응을 통하여 표현한 결과물이다. 따라서 일차변환의 합성은 행렬의 곱셈 규칙이 정의되는 아이디어를 학생들에게 경험하게 할 수 있는 좋은 소재이다. 이를 통해 행렬의 곱셈 규칙이 인위적으로 만들어진 부자연스러운 약속이 아니라, 목적성 있는 활동에 의해 자연스럽게 그리고 필연적으로 나온 산물임을 강조할 수 있다.

그러나 교육과정에서 제시하는 내용만으로는 이것에 대한 본질적·맥락적인 이해를 교사가 가질 수 없으며, 더욱이 학생들에게는 곱셈의 규칙을 받아들여, 그것을 적용하는 알고리즘에 의한 계산이 주 내용이 될 수밖에 없다. 게다가 이러한 계산은 행렬의 곱셈에 대한 규칙이 정해지고 난 후의 활용으로, 왜 행렬의 연산 규칙이 그렇게 정의되어야 했는지는 의미 있게 다루어지고 있지 않다.

일차변환의 합성은 행렬의 곱셈 규칙을 정의하는 개념으로 이해되어야 한다.

따라서 본 연구에서는 행렬의 연산지도에 대한 교사 설문을 통해 관련 지식에의 필요성을 정당화한다. 그리고 행렬의 연산이 어떠한 목적에서 어떠한 과정을 거쳐 정의되는가에 대한 이론적 배경에 대해 고찰한다. 또한 이 과정을 통하여 일대일 대응의 의의에 대하여 생각해 본다.

일대일 대응에 대해 논의하기에 앞서 중등학교에서의 함수에 대한 선행연구를 살펴보면, 대체적으로 함수 개념의 도입에 관한 내용이 대부분을 차지한다. 강현영(2007a, 2007b)은 학생들이 왜 함수 개념을 이해 못 하는지에 대해 설명하고 있으며, 우정호·강현영(2007)은 함수 개념의 도입과 심성함양으로서의 함수적 사고 교육에 대한 발전적 고찰을 시도하고 있다. 또, 김진환(2010)은 함수의 개념 형성을 위하여 다양한 표상과 표상의 번역 과정에서 정의역을 고려한 학습 지도를 할 것을 권고하고 있으며, 강운수·정성현·강덕심(1998)은 함수 개념을 대응 중심으로 다루는 함수 교육의 문제점을 말하고, 그 대안이 될 수 있는 함수 개념의 지도 방법을 제시하고 있다. 또한 함수와 관련된 수학적 개념들의 상호 연계성을 고려한 지도가 바람직함을 강조하고 있다. 김원경·김용대(2002)는 교사가 함수 개념을 도입할 때 대응에 의한 정적인 방법뿐만 아니라, 종속 관계에 의한 동적인 방법도 함께 강조해야 함을 주장하고 있다.

그런데 이러한 연구들은 함수 개념의 도입과 지도의 교수학적 분석에 초점을 두고 논의하고 있을 뿐, 교육과정 구성의 기저를 이루고 있는 지도 관점에 대한 연구나 지도 내용의 목적성 및 의의 그리고 형성 과정에 대한 학문적 고찰을 직접적으로 다룬 연구는 거의 없다.

Selden, A. & Selden, J.(1992)는 함수는 다양한 방식으로 사용되며, 함수는 추상수학 구조보다 더 폭넓게 사용됨을 제시하고 있다. 예를 들어, 두 집합이 같은 농도(Cardinality)를 갖는지, 두 위

상공간(Topological space)이 위상동형(homeomorphic)인지, 어떤 군(Group)이 다른 군의 준동형사상(homomorphic)의 상(image)인지 등을 설명할 때 함수가 사용됨을 설명하고 있다.

함수라고 하면 다항함수, 유리함수, 무리함수, 삼각함수처럼 식이나 그래프의 조작과 같은 의미로만 생각하는 경우가 많으나, 대응의 함수 개념 역시 구조와 관련한 내용을 다룸에 있어 중요하다. 특히 일대일 대응에 의한 구조의 보존이나 새로운 구조를 만든다는 의미는 중등교육과정 전반에 함의되어 있으며, 함수의 중요한 역할이기도 하다. 이러한 일대일 대응의 의의를 잘 지도할 수 있는 예로 행렬의 연산 규칙의 구성과 정의를 생각할 수 있다.

행렬에 대한 선행연구로서, 남문희(2009)는 일차변환의 정의부터 행렬식까지 일차변환을 중심으로 한 행렬 수업의 구성에 관하여 설명하고 있다. 신보미·박종률·임재훈(2000)은 행렬 도입 및 연산지도의 대안적 방법으로서 연립일차방정식으로 행렬을 도입하는 방법과 일차변환으로서 행렬을 도입하는 방법으로 대안적 교재 구성을 제시하고 있다. 그런데 이들은 행렬이 일차변환의 표현 수단으로 발명되었음을 이야기하고 있으나 일차변환에서 행렬로 표현하는 중간과정에서 연립일차방정식의 행렬 표현을 가정하고 있어 내용적 모순을 내포하고 있다. 일차변환을 행렬로 표현하기 위해서는 반드시 일대일 대응에 의한 구조보존의 개념이 필요한데, 그 부분에 대한 논의가 결여되어 있음으로 야기된 문제라 할 수 있다.

그리고 박한식(1994, 2001)은 수학 교사의 수학적 지식의 중요성과 관련하여 수학 교사는 무엇보다도 먼저 학생들에게 가르치는 수학의 내용을 완전히 이해하고 있어야 함을 강조하고 있다. 또한, 수학 교사의 수학적 지식은 대체로

수학 내용적 지식, 수학 교육과정 지식, 수학 교육적 지식, 수학 교수·학습 상황에 대한 지식으로 나눌 수 있는데, 이 중에서 수학 교사에게 가장 중요한 것은 수학 내용적 지식임을 강조하고, 수학과 교육과정의 개발에서도 수학 교사의 수학에 대한 지식을 감안하여야 한다고 논하였다(김원경·김용대, 2002 재인용).

이와 같은 맥락에서 본 연구는 행렬의 연산지도의 실태 분석을 통해 관련 지식의 필요성을 정당화하며, 행렬 연산의 이론적 배경을 제공하고자 한다. 나아가 행렬의 연산이 정의되는데 있어 중요한 개념인 일대일 대응의 의의에 대한 본질적 이해를 제공하여, 수학 교사의 수학 내용적 지식에의 전문성을 높이고, 이를 바탕으로 중등학교에서의 일대일 대응의 교수학적 의의를 밝힌다.

## II. 본론

### 1. 행렬 연산지도의 실태

F. Klein은 “함수 개념은 단순히 하나의 수학적 방법이 아니라 수학적 사고요, 심장이요, 혼이다”라고 하면서 함수 개념이 학교수학의 중심 토끼가 되어야 한다고 주장하였다(Cooney & Wilson, 1992; 김원경·김용대, 2002 재인용). 함수가 모든 수학의 힘이 되어야 한다는 것은 함수가 미적분을 포함한 해석학 분야뿐만 아니라 대수학 그리고 수학 전 분야에서 함수적 사고 혹은 함수가 수학의 중심이 되어야 한다는 것이다. 또한 F. Klein이 변환군에서 변하지 않는 특성을 연구하는 학문분야로서 기하학을 분류)한 이래로 함수적 사고는 수학교육에서 매우 중요하게 취급되기 시작했다. 그런데 현행 수

1) 예를 들어, 합동변환군에서 변하지 않는 특성을 연구한 분야가 유클리드 기하이다.

학과 교육과정에서는 F. Klein의 정신을 잘 반영하지 못한 채, 일대일 대응의 정의와 예를 간단히 소개하는 정도로 다루고 있다. 그 후 일대일 대응 관련 내용은 역함수를 도입할 때만 언급하고 있다.

일대일 대응은 함수 단원에서 뿐만 아니라 행렬의 도입과 연산의 지도에서 훌륭한 응용 모델이 될 수 있음에도 불구하고, 개정 교육과정(2009)에서 행렬 부분은 ‘수량을 직사각형 모양으로 나타낸 행렬을 이해하게 하고, 행렬과 관련하여 제시된 용어를 알게 한다. 특히 여러 가지 현상에서 수량을 직사각형 모양으로 나타낼 수 있는 경우를 찾아보는 활동을 통해 행렬의 필요성을 느끼게 한다.’고 제시되어 있다. 물론 ‘수학 1’에서 행렬과 그래프의 도입 취지가 수학의 여러 분야에서 경험하는 여러 가지 문제 상황을 행렬과 그래프로 나타내고 이들의 성질을 이용하여 문제를 해결하는 것이므로 행렬의 도입이 다소 가볍게 소개되는 것은 이해되지만, ‘기하와 벡터’의 행렬 영역의 일차변환에서는 일차변환이 일대일 대응에 의해 행렬로 재표현된 것임을 좀 더 세밀하게 전달할 필요가 있다.

그리고 ‘수학 1’에서 역행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해를 구하는 것과 같은 맥락으로, ‘기하와 벡터’에서는 일차변환의 도입을 연립일차방정식으로 하여 일차변환을 행렬로 표현하는 것의 당위성을 부여하고 있다. 변윤휘(2011)는 일차변환을 연립일차방정식의 형태로 도입하기 때문에, 대수적 의미에서의 일차변환의 정의가 성질로 소개되고 있음을 지적하고 있다. 이 때문에 일차변환을 일대일 대응에 의해 재표현한 것이 행렬이며, 구조보존이란 목적성을 만족하게끔 행렬의 연산 규칙이 정의되었다는 의미가 지도되지 않고 있다. 또한 ‘수학 1’에서 행렬 곱셈의 도입은 실생활의 문제 상황을 통하여 표를 이용하여 규칙을 정의하는 정도에 그치고 있다.

일대일 대응은 일차변환으로부터 행렬의 곱셈 규칙이 왜 그렇게 되어야 하는지에 대한 정당성을 부여한다. 즉, 일차변환의 합성변환을 일대일 대응을 통하여 행렬로 표현하면 그것이 행렬의 곱으로 나타난다는 것을 강조해야 하며, 이때 일대일 대응이 가지는 역할의 중요성도 강조해야 한다. 그러나 현행 교육과정에서는 행렬의 곱셈을 표를 예로 들어 도입할 뿐이다. 기하와 벡터의 일차변환에서 합성변환을 행렬의 곱으로 나타낼 수 있음을 간단하게 소개하고 있지만, 행렬의 곱이 그런 형태로 정의되어야 할 정당성은 부여하고 있지 않다. 단지 일부 교과서 익힘책의 말미에 행렬의 곱의 정의의 정당성을 일차변환으로 간단히 소개하고 있는 실정이다.

행렬의 연산에 대한 교육과정과 교과서의 내용을 바탕으로 교사들이 행렬의 연산을 어떻게 지도하고 있는지 알아보기 위하여 4개의 문항으로 설문지를 작성한 뒤 두 차례의 검토 후 다음과 같은 설문지를 수정하여 제작하였다.

1. 선생님은 행렬의 연산을 어떻게 지도하고 계십니까?
2. 학생이 만약 다음과 같은 질문을 한다면 선생님은 어떤 답을 주시겠습니까?

질문: 선생님, 왜 행렬의 덧셈과 곱셈은 그렇게 계산해야 하나요? 덧셈은 같은 성분끼리 더하는데 곱셈은 그렇지 않네요. 그리고 덧셈은 같은 행과 열을 가진 행렬들 사이에서 정의되는데 곱셈은 그렇지 않아요. 이 계산의 규칙은 어떻게 정해진 것인가요?

3. 학생의 질문에 대한 선생님의 답은 수학적으로 정확한 답이라고 생각하십니까? 만일 아니라면 선생님은 보다 엄밀한 연산에 관한 지식을 알아야 한다고 생각하십니까?
4. 학생들에게 행렬의 연산이 왜 그렇게 정의되었는지 지도할 필요가 있다고 생각하십니까?

본 설문지는 교사들이 행렬의 연산지도와 관련하여 각 문항을 자유롭게 기술하도록 개발하였다. 1번 문항은 교사가 행렬의 연산을 수업에서 어떻게 지도하고 있는지에 관하여 알아보기 위함이고, 2번 문항은 학생들에게 어떻게 행렬 연산의 당위성을 설명할 것인가에 관한 질문이다. 3번 문항은 행렬의 연산에 대한 엄밀한 지식을 교사가 알아야 하는가에 대한 인식을 조사하기 위함이고, 4번 문항은 행렬의 연산이 왜 그렇게 정의되는지에 대한 내용이 학생들에게 지도될 필요가 있는가에 대한 인식을 알아보기 위함이다.

본 설문은 부산광역시에 재직 중인 교사로서, 고등학교에서 행렬을 가르쳐 본 경험이 있는 교사 21명을 대상으로 하였다. 이 중 11명은 인문계 고등학교(B고등학교, N고등학교) 교사이고, 10명은 특목고(B과학교 및 I외국어고등학교) 교사이다. 자료의 수집 및 분석에 있어 인문계와 특목고로 분류한 이유는 인문계와 특목고의 학생들의 학업성취 수준에서 차이가 나며, 또한 인문계에 비하여 특목고는 교육과정 운영과 교과서 사용에 있어 단위학교에 자율성이 부여되고 있기 때문에 그 특수성을 인정하여 인문계와 특목고로 나누어 설문하였다. 설문 방법은 설문지를 통한 방식과 컴퓨터 문서를 통한 두 가지 방법으로 하였고, 설문에 답하는 시간에 제한을 두지는 않았다.

자료의 분석에 있어서, 문항 1과 문항 2는 두 단계에 걸쳐 이루어졌다. 첫 번째 단계에서는 교사들이 사용한 용어나 표현을 바탕으로 답안을 정리하여 범주화하였다. 이 범주들은 기존의 틀을 사용한 것이 아니라 교사들의 답안에 따라 귀납적인 과정으로 얻어진 결과이다. 두 번째 단계에서는 얻어진 범주들 사이에서 유사한 것을 다시 그룹화하여 새로운 범주화를 시도하였다. 교사들의 답안은 유형별 빈도와 백분율로

<표 II-1> 행렬의 연산지도 실제

문항 1 (지도 방법)	빈도(%)		
	인문계	특목고	전체
실생활의 예와 표 이용	4(28.6%)	0(0%)	4(16%)
연립일차방정식의 풀이	4(28.6%)	1(9.1%)	5(20%)
정의로 공식화	5(35.7%)	7(63.6%)	12(48%)
일차변환	1(7.1%)	3(27.3%)	4(16%)
합계*	14(100%)	11(100%)	25(100%)

\* 지도 방법으로 여러 가지를 제시한 경우가 있어 각각 11과 10 그리고 21을 초과할 수 있음

행렬 곱셈 방법이 학생들에게 자연스럽게 풀리며 받아들이기 쉬운 방법이 아니므로, 행의 회전공법 방법을 골라야 할 것 같다. 학생들에게 지도할 때

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

1)  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 의 길이가 같고,  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 의 방향 차이가  $\theta$ 이다.  
 2)  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 의 방향 차이가  $\theta$ 이다.  
 3)  $(x, y)$ 와  $(x', y')$ 의 방향 차이가  $\theta$ 이다.

회전공법이란 행렬 곱셈을 이용하여 행렬 곱셈을 행렬 곱셈으로 나타내는 것이다. 행렬 곱셈이 행렬 곱셈으로 나타내지는 않는 것은 행렬 곱셈을 행렬 곱셈으로 나타내지 않는다는 것이다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

이 행렬의 곱셈이 왜 행렬 곱셈이 되는지 알아야 한다. 행렬 곱셈이 행렬 곱셈으로 나타내지는 않는 것은 행렬 곱셈을 행렬 곱셈으로 나타내지 않는다는 것이다.

단순히 주어진 정의와 연산을 암기하고 연산하는 작업만으로는 지적 호기심을 채울 수 없다. 행렬을 생각해 낸 동기와 본질을 알고 싶은 학습자의 욕구를 충족시키지 못하기 때문에, 의문은 해소되지 않고 수학의 정의나 개념은 단순히 암기만 해야 되는 괴로운 일이라고 생각하게 된다.

두 복소수의 곱은 평면 위에서 각각의 복소수만큼 회전된 결과를 의미한다. 해밀턴(Hamilton)은 공간에서 곱이 회전의 합성이 되는 수를 만들어내기 위하여 노력하였다. 그러한 수는 만들지 못했지만 그 노력은 뜻밖의 결과를 가져왔다. 그것이 바로 행렬이다.

예를 들어 벡터  $A$ 를 먼저  $a$ 만큼 회전시킨 후 그것을 다시  $b$ 만큼 회전시키는 변환... ①은 결과적으로 한 번에  $a+b$ 만큼 회전시킨 변환... ②에 해당하므로 두 변환식이 서로 같아야 한다.

$$\vec{A} = (x, y)$$
를 원점을 중심으로  $a$ 만큼 회전시킨 좌표를  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ 를 원점을 중심으로  $b$ 만큼 회전시킨 좌표를  $(x'', y'')$ 이라고 하면,
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \text{회전변환} \dots \text{①}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \text{회전변환} \dots \text{②이다.}$$

변환①과 변환②를 비교해보면

$$\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$
가 되어야 한다. 그런데 좌변의 행렬의 곱과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 전개한 우변이 서로 일치하기 위해서는 행렬의 곱셈을 ... (\*)로 정의해야 잘 정의됨(well-define)을 알 수 있다.

[그림 II-1] 문항 1에 대한 교사 반응의 예.

제시하였다. 문항 3과 문항 4는 문항에 대한 답을 ‘예’와 ‘아니오’로 분류하여 빈도와 백분율로 제시하였다. 교사설문의 어려움과 이론적 배경을 제시한다는 연구 목적에 의해, 각 문항에 대한 자료의 분석은 빈도와 백분율의 차이를 제시하기 보다는 특징 있는 교사 답안을 제시하는 것을 중심으로 실태분석에 중점을 두었다.

행렬의 연산지도 방법으로 가장 많이 사용하는 것은 ‘정의로 공식화’ 하는 것이었다. [그림 II-1]은 교사 반응의 예들이다. 행렬 곱셈의 경우 학생들이 자연스럽게 유추하여 받아들일 수 있는 내용이 아니므로 먼저 공식화하여 지도하고, 연립일차방정식의 풀이나 실생활 문제의 활용으로서 행렬을 지도하거나 혹은 이와 반대 과정으로 지도하는 것으로 나타났다. 그러나 특목고의 경우 실생활의 예보다는 복소수의 곱과 비교하여 일차변환의 회전변환의 합성으로 행렬의 곱을 지도하기도 하였다([그림 II-1]의 첫 번째).

행렬의 연산 규칙이 왜 그렇게 정해지는가라는 물음에 대한 답으로는 <표 II-2>에 나타난 바와 같이 실수, 유리수의 연산과 비교하거나 실생활의 예, 연립일차방정식의 풀이, 필요에 의한 약속, 일차변환에 의한 방법과 같이 다양한

<표 II-2> 행렬 연산의 당위성에 대한 지도 방법

문항 2 (지도 방법)	빈도(%)		
	인문계	특목고	전체
실수, 유리수의 연산과 비교	2(16.7%)	2(16.7%)	4(16.7%)
실생활의 예	3(25%)	2(16.7%)	5(20.8%)
연립일차방정식의 풀이	4(33.3%)	0(0%)	4(16.7%)
필요에 의한 약속	1(8.3%)	3(25%)	4(16.7%)
일차변환	2(16.7%)	5(41.7%)	7(29.2%)
합계*	12(100%)	12(100%)	24(100%)

\* 지도 방법으로 여러 가지를 제시한 경우가 있어 각각 11과 10 그리고 21을 초과할 수 있음

모든 행렬들이 덧셈, 곱셈이 정의되지 않는 것처럼, 덧셈, 곱셈 방법도 필요에 의해서 약속된 것이므로 (그것이 필연적인 문제이든, 학문적인 것이든) 수학사적으로 그렇게 정의하는 것이 가장 유용함을 설명함.

‘연산’이란 정의되어 지는 대로 적용하는 것이므로 기초의 수체계와, 행렬체계가 다음을 강하게 요구함.

행렬의 곱셈은 선형하게 진행되는 일차변환으로 이해하고, 곱셈으로 인해서 다른 개인권은 사라짐으로 설명한다. 유한차 변환의 합성변환 (행렬의 곱셈은 합성변환이어서이다)

[그림 II-2] 문항 2에 대한 교사 반응의 예

<표 II-3> 교사는 행렬 연산의 이론적 배경을 알아야 하는가?

문항 3	빈도(%)		
	인문계	특목고	전체
예	6(54.5%)	9(90%)	15(71.4%)
아니오	5(45.5%)	1(10%)	6(28.6%)
합계	11(100%)	10(100%)	21(100%)

방법이 제시되었다. 특히 인문계는 연립일차방정식의 풀이로 당위성을 가장 많이 설명하는 반면, 특목고는 행렬 연산의 당위성을 일차변환으로 설명하겠다는 답이 가장 많았다. [그림 II-2]는 행렬 연산의 당위성에 대한 교사 반응의 예들이다. 첫 번째와 두 번째는 인문계 교사의 답안이고, 세 번째는 특목고 교사의 답안이다.

엄밀한 연산에 관한 지식을 교사가 알아야 한다고 생각하는가? 라는 질문에는 전체 21명의 교사 중 15명(71.4%)의 교사가 엄밀한 연산에 관한 지식을 알아야 한다고 답했다. 특히 인문계 교사는 11명중 6명(54.5%)만이 엄밀한 지식을 교사가 알아야 한다고 대답한 반면, 특목고 교사는 10명중 9명(90%)명이 알아야 한다고 답해 엄밀한 연산에 관한 지식의 필요성이 더 강하게 나타났다. [그림 II-3]의 첫 번째와 두 번째는

필요하지 않다. 큰 과학수업상 행렬의 연산은 개념적인 계산문제만 다루어도 충분

엄밀한 지식보다는 다양한 지식이 필요함을 느낌.  
이차피 수학 분야마다 활용도나 접근 방법이 틀릴 수 있으니...  
하지만 학생들이 여러 각도에서 의문을 가지고 질문할 수 있으므로 다양한 현상에서의 행렬 연산에 대한 지식과 활용 분야를 소개해 줄 수 있도록 준비해야 함을 느끼고 있음

교사가 엄밀한 행렬 연산에 관한 지식이 필요하다고 생각한다.  
교사가 엄밀한 지식을 알고 그것을 학생들에게 쉽게 전달할 수 있다면 그것이 가장 좋은 수업일거라 생각한다.

수학자인 이유를 알고 싶고 꼭 알아야 하다고 생각합니다. 수업시간에 행렬이 나오면 떠나 수학수업은 물론 다리의 수학적 지식 배경은 수학교사의 꼭 필요합니다.

[그림 II-3] 문항 3에 대한 교사 반응의 예

<표 II-4> 학생들에게 행렬의 연산이 왜 그렇게 정의되었는지를 지도할 필요가 있다고 생각하십니까?

문항 4	빈도(%)		
	인문계	특목고	전체
예	8(72.7%)	9(90%)	17(81%)
아니오	3(27.3%)	1(10%)	4(19%)
합계	11(100%)	10(100%)	21(100%)

인문계 교사의 답안으로, 교육과정 상 엄밀한 연산에 대한 정의가 필요하지 않다고 답하였고, 엄밀한 지식보다 다양한 지식에의 접근 필요성을 언급하였다. 세 번째와 네 번째는 특목고 교사의 답안으로, 세 번째는 교사가 엄밀한 지식을 알고 그것을 학생들에게 쉽게 전달하는 것이다. 네 번째는 수업시간의 활용을 떠나 보다 깊은 수학적 배경 지식이 필요하다고 답하였다. 학교 특성에 따라 필요성에 대한 인식 수준이

행렬의 역사적 발달과정을 통한 행렬의 다양한 실생활 측면을 강조하여 그 유용성을 강조하는 것이 행렬의 연산에 대한 당위성을 지도하는 것보다 수학적의미가 있다고 봄.

수학교육은 수학자를 키우는 것이 아니므로 행렬의 연산의 엄밀함 보다는 행렬의 탄생에 대한 자연스러운 상황과 무엇 때문에 생길 수밖에 없었는지 정도를 수학사적 접근이 옳지 않을까 생각한다.

수학의 다른 영역에서 새로운 연산이나 정리가 나오면 왜 그렇게 되었는지 설명해주는데 행렬의 연산 부분만 왜 그런가에 대한 교과서나 지도서의 설명이 부족하다.

단순히 곱셈과 덧셈의 계산적 기술을 가르치는 것은 행렬을 가르치는 의미가 없다고 생각함. 특히 행렬의 곱셈을 가르치는 것은 새로운 연산 구조를 가르치는 것이기 때문에 수학자들의 사고의 흐름을 따라 구조의 의미를 되새겨보며 가르치는 것이 필요하다고 생각함. 그로 인해 단순히 행렬을 배우는 것이 아니라 지금까지 보지 못했던 새로운 형태의 연산 구조를 행렬을 통해서 엄밀하게 익힘으로 수학이 한 영역에서 다른 영역으로 어떻게 확장되어지는지를 보여주는 것이 수학의 참 힘을 길러주는 역할을 할 수 있다고 생각함.

수학의 현명한 장은 학생들에게 수학의 필요성을 이해시키고, 응용적 사고는 지양하는 수학 본래의 교육적 방향을 잘 반영한 지도 방법이 되길 바란다.

[그림 II-4] 문항 4에 대한 교사 반응의 예

다음을 알 수 있다.

학생들에게 행렬의 연산이 왜 그렇게 정의되었는지를 지도하는 것이 필요한가? 하는 질문에 전체 21명의 교사 중 17명(81%)의 교사가 필요하다고 답했다. [그림 II-4]는 학생들에게 행렬 연산이 왜 그렇게 정의되었는지를 지도할 필요성에 대한 교사의 반응이다. 첫 번째는 행렬의 유용성을 강조하는 것이 연산의 당위성보다 중요하다고 답하고 있으며, 두 번째는 수학교육이 수학자만을 키우는 것은 아니므로 연산의 당위성보다 수학사적 상황을 소개하는 정도로 다를 것을 제안하고 있다. 그러나 수학사적 상황에 대한 설명을 하고 있지는 않았다. 한편 필요하다는 입장에서는 정수나 유리수의 연산에 비하여 행렬의 연산이 왜 그렇게 정의되어야 하는지에 대한 설명이 부족함을 지적하고 있다. 또한 단순히 연산을 계산의 기술로서가 아니라 구조를 가르쳐서 수학자들의 사고를 간접적으로 체험할 수 있는 경험을 마련해야 함을 말하고 있다.

설문 결과 대부분의 현직 교사들의 행렬 연산에 대한 학문적 지식은 미흡했지만, 보다 엄밀한 연산에 대한 지식이 필요하다고 인식하였고, 또한 학생들에게 행렬 연산의 당위성을 지도해야 한다고 생각하고 있었다. 이는 교사의 입장에서도 개연성이나 필연성 없이 행렬 연산을 학생들에게 지도하는데 있어 어려움을 느끼고 있음을 보여준다고 하겠다.

교사는 지도하는 내용 이상을 알아야하며, 적어도 가르치고 있는 지식이 왜, 어떻게 해서 만들어지고 발전해왔는지를 알아야 하는데 이는 현대수학사에 대한 이해까지를 요구한다. 엄밀한 수학과 수학의 역사 속에서 형성된 것으로 수학적 상황에 포함되며 이는 수학적 활용에 대한 교사의 인식 전환과 교재론 관점의 제고를 필요로 한다. 또한 교직과 관련한 교직수학은 이와 같은 맥락을 줄 수 있는 내용이어야 함을 교사 설문을 통하여 알 수 있었다.

## 2. 행렬의 연산에 대한 이론적 고찰<sup>2)</sup>

i)  $A$ 를 임의의 집합이라 하자. 그리고

$$G_A = \{f \mid f: A \rightarrow A; \text{일대일 대응}\}$$

이라 하자.  $G_A$ 를 대수적으로 고찰하기 위하여  $G_A$ 에 대수적 구조 즉, 연산을 주기로 하자. 이때 주어지는 연산을 함수의 합성( $\circ$ )이라 하면 그 연산은 다음을 만족한다 ;

- ①  $f, g \in G_A$ 에 대하여  $f \circ g \in G_A$ 이다.
- ②  $G_A$ 에서 합성연산  $\circ$ 은 결합법칙을 만족한다.

그런데 어떤 함수들의 집합에서도 합성 연산은 결합법칙을 항상 만족하므로, 이러한 내용들을 다룰 때 함수의 합성을 중요한 수단으로 이용할 수 있다.

ii) 만약 집합  $A$ 에 연산  $\cdot$ 이 결합법칙을 만족한다고 하자. 이 경우  $\theta: (A, \cdot) \rightarrow B$ 를 일대일 대응이라 하면,  $A$ 의 연산  $\cdot$ 을  $\theta$ 에 의하여 복사(copy)하여 집합  $B$ 에 연산  $\odot$ 을 정의할 수 있고, 이 경우  $\theta(a \cdot b) = \theta(a) \odot \theta(b)$ 이다. 그러면

$$\begin{aligned} \{\theta(a) \odot \theta(b)\} \odot \theta(c) &= \theta(a \cdot b) \odot \theta(c) \\ &= \theta\{(a \cdot b) \cdot c\} = \theta\{a \cdot (b \cdot c)\} \\ &= \theta(a) \odot \{\theta(b \cdot c)\} = \theta(a) \odot \{\theta(b) \odot \theta(c)\} \end{aligned}$$

이다. 따라서 집합  $B$ 에서 정의된 연산  $\odot$ 은 결합법칙이 성립한다는 사실을 얻을 수 있다. 여기서 중요한 개념은 ‘집합  $A$ 에 주어진 연산이 결합법칙을 만족하면, 일대일 대응에 의해 집합  $B$ 로 옮겨진 연산도 결합법칙을 만족한다.’는 것이다.

i)과 ii)를 바탕으로 이제 행렬의 연산을 정의해 보자.

**정리 1**  $V = \mathbb{R}^2$ 라 할 때,

$$Hom(V, V) = \{f \mid f: V \rightarrow V \text{ 일차변환}\}$$

이라 하자. 여기서  $f, g \in Hom(V, V)$ 에 대하여,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

2) Fraleigh. J. B. (2000), Jonson. T. W. (1994), Nicholson W. L. (1999), 김종태(2010)를 바탕으로 재해석하여 구성한 것임.

으로 정의하면,  $(Hom(V, V), +, \circ)$ 는 환(ring)이다.

이제 이러한 환을 구조적으로 어떻게  $Hom(V, V)$ 보다 더 간결한 집합으로 재표현(representation)할 수 있는가 하는 것이 관심사가 된다. 그 방법은

- ①  $Hom(V, V)$ 보다 시각적으로 혹은 조작적으로 더 간결한 새로운 집합  $A$ 를 구하고,
- ② 환의 구조를 옮기기 위하여  $\theta: Hom(V, V) \rightarrow A$ 인 일대일 대응을 구해야 한다. 그러면
- ③  $(Hom(V, V), +, \circ)$ 가  $\theta$ 에 의해  $A$ 로 구조가 옮겨 가게 된다. 이  $Hom(V, V)$ 의 재표현의 결과물이 바로 행렬이다.

이제  $Hom(V, V) = \{f \mid f: V \rightarrow V \text{ 일차변환}\}$ 의 재표현을 구체적으로 구성해보자. 본 논문에서는 교육과정에서 연산을 도입할 때 가장 대표적으로 다루고 있는 이차행렬의 경우만 다루기로 한다.

$\dim V = 2$ 일 때, 우선 평면  $V = \mathbb{R}^2$ 를 생각하자. 그러면  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ 에 대하여

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다.  $f: V \rightarrow V$ 인 일차변환 (즉,  $f \in Hom(V, V)$ )이라 하자. 그러면

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = af \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bf \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이 된다. 또한

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

라 하자. 그러면

$$\theta: Hom(V, V) \rightarrow A = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f \mapsto \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right)$$

이다. 이제  $\theta$ 가 일대일 대응임을 증명하자.  $\theta$ 가 일대일 대응이면  $Hom(V, V)$ 의 덧셈과 곱셈을  $\theta$ 를 통해  $A$ 에 옮길 수 있다.

i)  $\theta$ 는 잘 정의되었다(well-defined).

$f = g$ 라 하자.  $f, g \in Hom(V, V)$ 이므로  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이고,  $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다. 그리고  $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ,  $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ 이므로,  $g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ ,  $g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix}$ 라 하면,  $\theta(f) = \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} \right) = \theta(g)$ 이다. 따라서  $\theta(f) = \theta(g)$ 이다.

ii)  $\theta$ 는 일대일함수이다.

$\theta(f) = \theta(g)$ 이라 하자. 그러면

$$\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} \right)$$

이다. 그리고  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix}$ 이다. 즉,

$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이고  $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다. 따라서

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = af \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bf \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ag \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

이다. 그러므로  $f = g$ 이다.

iii)  $\theta$ 는 위로의 함수이다.

$\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right) \in A$ 라 하자. 이 경우

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma \\ a\beta + b\delta \end{pmatrix}$$

이라 하자. 우선  $f$ 가 일차변환임을 보이면

$$\begin{aligned} f\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right\} &= f\left(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\right) \\ &= (a+c)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (b+d)\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)\alpha \\ (a+c)\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b+d)\gamma \\ (b+d)\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)\alpha + (b+d)\gamma \\ (a+c)\beta + (b+d)\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma \\ a\beta + b\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\alpha + d\gamma \\ c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(k\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka\alpha + kb\gamma \\ ka\beta + kb\delta \end{pmatrix} \\ &= k\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma \\ a\beta + b\delta \end{pmatrix} = kf\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

이다 따라서  $\theta(f) = \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right)$  이고  $f \in \text{Hom}(V, V)$

이다.

i), ii), iii)에 의하여

$$\theta: \text{Hom}(V, V) \rightarrow A$$

$$f \mapsto \theta(f) = \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\right)$$

는 일대일 대응이다.

이제  $\text{Hom}(V, V)$ 의 연산을 복사(copy)하여 집합  $A$ 에 연산을 정의하기로 한다.  $A$ 에서의 덧셈을  $\oplus$ , 곱셈을  $\odot$ 라 나타내기로 하자.

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\right) \in A \text{에 대하여 } \theta \text{는}$$

일대일 대응이므로  $f, g \in \text{Hom}(V, V)$ 가 존재하여

$$\theta(f) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}\right), \theta(g) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\right)$$

이다. 그러면  $f, g \in \text{Hom}(V, V)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (f+g)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} (f+g)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 그러면

$$\theta(f+g) = (f+g)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}\right)$$

이고

$$\theta(f) \oplus \theta(g) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\right)$$

이다. 구조를 보존하기 위해서는

$$\theta(f+g) = \theta(f) \oplus \theta(g)$$

을 만족해야 하므로,  $\oplus$ 는

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix}\right)$$

로 정의하게 된다. 한편  $f, g \in \text{Hom}(V, V)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (f \circ g)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= f\left(g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \beta_2 \\ \delta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= f\left(g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \gamma_2 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_2 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_2 \\ \beta_1 \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \delta_2 \\ \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2 \\ \beta_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} \theta(f \circ g) &= (f \circ g)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2 \\ \beta_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 역시 구조를 보존하기 위해서는

$$\theta(f) \odot \theta(g) = \theta(f \circ g)$$

이어야 하므로, 따라서  $\odot$ 는

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right) \odot \left( \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right) \\ = \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2 \\ \beta_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

로 정의하게 된다. 따라서  $\theta$ 를 통하여  $\text{Hom}(V, V)$ 의 연산  $+$ ,  $\circ$ 는 집합  $A$ 에  $\oplus$ 와  $\odot$ 로 옮겨오게 된다. 즉,

$$\left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right) \oplus \left( \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 \\ \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \right) \odot \left( \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right) \\ = \left( \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2 \\ \beta_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

이 된다.

이렇게 해서  $(\text{Hom}(V, V), +, \circ)$ 를  $(A, \oplus, \odot)$ 로 대수적 복사(Copy)를 하였다.

이제 기호를 간략화 할 필요가 있다.  $A$ 의 원소  $\left( \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ 라 나타내기 위하여 한다. 이것이 오늘날의 행렬(matrix)의 형태이다. 그러면  $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ,  $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ 일 때,  $A$ 의 원소는  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ 로 표시될 수 있다. 또한

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= xf\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\alpha \\ x\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y\gamma \\ y\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha + y\gamma \\ x\beta + y\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 그러므로  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\alpha + y\gamma \\ x\beta + y\delta \end{pmatrix}$ 로 표시할 수 있다. 이렇게 해서  $f \in \text{Hom}(V, V)$ 를 현시적으로  $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ 로 나타내게 된다.

이처럼 행렬의 연산 규칙은 일대일 대응에 의한 구조의 보존이라는 뚜렷한 목적성 아래 일차변환을 행렬로 표현하고, 일차변환의 덧셈과 합성 연산을 일대일 대응을 통하여 행렬의 덧셈과 곱셈으로 재표현한 것이다.

### 3. 일대일 대응에 의한 구조의 보존

행렬의 연산을 정의하는데 있어 핵심적인 개

념은 ‘구조의 보존’이었다. 구조의 보존이란 복잡한 집합을 보다 간단하고 다루기 용이한 집합으로 재표현하여 효율적으로 정보를 얻은 후, 다시 본래의 집합으로 환원하여 구조를 논하기 위한 것, 또는 임의의 집합에 연산을 주어 대수적 구조를 만들 때, 그 구조가 명확한 집합을 이용하여 그 집합의 연산을 복사하는 것이다. 이때 일대일 대응은 구조 즉, 연산을 복사하는 역할을 하는 중요한 개념이다.

우선 학교 수학에서 다루어지는 일대일 함수, 위로의 함수, 일대일 대응에 대하여 알아보자.<sup>3)</sup>

**정의 1** 함수  $f: X \rightarrow Y$ 에 있어서  $x_1, x_2 \in X$ 에 대하여  $f(x_1) = f(x_2)$ 이면  $x_1 = x_2$ 일 때, 이 함수를 일대일(one-to-one)함수라고 한다.

**정의 2** 함수  $f: X \rightarrow Y$ 에 있어서 임의의  $y \in Y$ 에 대하여 적어도 하나의  $x \in X$ 가 존재함으로써  $y = f(x)$ 일 때, 이 함수를 위로(onto)의 함수라고 한다.

**정의 3** 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일 함수이고 위로의 함수일 때, 이 함수를 일대일 대응(one-to-one correspondence)이라고 한다.

이제 일대일 대응에 의한 구조보존의 일반적인 고찰을 하도록 하자.

$A$ 를 임의의 주어진 집합이라 하자. 그리고  $A$ 에 대수적 구조를 주기 위하여 연산을 주기로 하자.

**경우 1**  $A$ 가 셀 수 있는 유한집합(countable finite set)일 경우를 먼저 생각해보자.  $A$ 에 부과할 수 있는 이항연산의 개수는  $A \times A$ 에서  $A$ 로 대

응하는 함수의 개수와 같다. 즉, 가짓수는  $|A|^{A \times A}$ 이다. 이렇게 부여할 수 있는 연산의 개수 중에서 결합법칙이 만족되는 이항연산을 찾아야 한다. 만약  $A$ 에 연산을 부여하고자 할 때, 일대일 대응을 이용한 재표현을 하지 않고 일반적인 방법으로 연산을 부여하고자 하면 이는 불가능에 가깝다. 따라서 구조를 알고 있는 집합을 통해 새로운 집합에 연산을 부여하고 대수적 체계를 구성하려고 할 때 일대일 대응을 이용한 표현(representation)은 매우 훌륭한 도구가 된다.

유한집합  $A$ 의 원소의 개수를  $n < \infty$ 이라 하자. 이 때 이미 구조를 알고 있는 대수적 시스템인  $(Z_n, +)$  역시 원소의 개수가  $n$ 개이므로, 집합적으로  $Z_n$ 과  $A$ 의 일대일 대응을 생각할 수 있다. 이 일대일 대응을  $f$ 라 하자.

$$f: Z_n \rightarrow A$$

이 경우,  $f$ 를 통하여  $Z_n$ 에 주어진 연산  $+$ 를  $A$ 로 옮겨서 새로운 연산  $\oplus$ 을 정의할 수 있고, 그 결과  $(A, \oplus)$ 는  $(Z_n, +)$ 와 같은 대수적 시스템(Algebraic system)을 갖는다.

**경우 2-1**  $A$ 를 셀 수 있는 무한집합(countable infinite set)이고,  $|A| = \aleph_0$ 이라 하자. 그러면 앞의 경우와 같이 이미 구조를 알고 있는 대수적 시스템인  $(N, +)$  역시 원소의 개수가  $\aleph_0$ 이므로, 이 경우 집합적으로  $N$ 과  $A$ 는 일대일 대응을 생각할 수 있다. 이 일대일 대응을  $g$ 라 하자.

$$g: N \rightarrow A$$

이 경우,  $g$ 를 통하여  $N$ 에 주어진 연산  $+$ 를

3) 이흥천 역(2005).

$A$ 로 옮겨서 새로운 연산을  $\oplus$ 로 정의할 수 있고, 그 결과  $(A, \oplus)$ 는  $(\mathbb{N}, +)$ 와 같은 대수적 시스템을 갖는다. 이 때  $(A, \oplus)$ 는 군(group)이 된다.

**경우 2-2**  $A$ 가 셀 수 있는 무한집합(countable infinite set)인 경우 다른 방법으로도 표현할 수 있다.  $|A| = \aleph_0$ 이라 하면, 이미 구조를 알고 있는 대수적 시스템인  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  역시 원소의 개수가  $\aleph_0$ 이므로, 이 경우 집합적으로  $\mathbb{Z}$ 와  $A$ 는 일대일 대응을 생각할 수 있다. 이 일대일 대응을  $h$ 라 하자.

$$h: \mathbb{Z} \rightarrow A$$

이 경우,  $h$ 를 통하여  $\mathbb{Z}$ 에 주어진 연산  $+$ ,  $\cdot$ 를  $A$ 로 옮겨서 새로운 연산  $\oplus$ ,  $\odot$ 을 정의할 수 있고, 그 결과  $(A, \oplus, \odot)$ 는  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 와 대수적으로 동등한 시스템을 갖는다. 이 때,  $(A, \oplus, \odot)$ 는 환(ring)이 된다.

**경우 2-3**  $A$ 가 셀 수 있는 무한집합(countable infinite set)인 경우,  $|A| = \aleph_0$ 이라 하면, 이미 구조를 알고 있는 대수적 시스템인  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  역시 원소의 개수가  $\aleph_0$ 이므로, 이 경우 집합적으로  $\mathbb{Q}$ 와  $A$ 는 일대일 대응을 생각할 수 있다. 이 일대일 대응을  $i$ 라 하자.

$$i: \mathbb{Q} \rightarrow A$$

이 경우,  $i$ 를 통하여  $\mathbb{Q}$ 에 주어진 연산  $+$ ,  $\cdot$ 를  $A$ 로 옮겨서 새로운 연산  $\oplus$ ,  $\odot$ 을 정의할 수 있고, 그 결과  $(A, \oplus, \odot)$ 는  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 와 대수적으로 동등한 시스템을 갖는다. 이 때,  $(A, \oplus, \odot)$

는 체(field)가 된다.

**경우 3**  $A$ 를 셀 수 없는 무한집합(uncountable infinite set)이고,  $|A| = 2^{\aleph_0}$ 이라 하자. 마찬가지로 이미 구조를 알고 있는 대수적 시스템인  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  역시 원소의 개수가  $2^{\aleph_0}$ 이므로, 이 경우도 집합적으로  $\mathbb{R}$ 과  $A$ 의 일대일 대응을 생각할 수 있다. 이 일대일 대응을  $j$ 라 하자.

$$j: \mathbb{R} \rightarrow A$$

이 경우  $j$ 를 통하여  $\mathbb{R}$ 에 주어진 연산  $+$ ,  $\cdot$ 를  $A$ 로 옮겨서 새로운 연산  $\oplus$ ,  $\odot$ 을 정의할 수 있고, 또한  $(A, \oplus, \odot)$ 는  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 와 대수적으로 동등한 시스템을 갖는다. 이 때  $(A, \oplus, \odot)$ 는 실수 체계와 같은 체(field)가 된다.

이렇게 연산의 구조를 옮기기 위해서 함수는 다가함수(multiple-valued function)가 아니라 일가함수(single-valued function)로 정의할 필요가 있다. 위의 일련의 경우를 구체화 시킨 용어가 ‘동형(isomorphic)’이다. 즉, 동형은 주어지는 것이 아니라 만들어 내는 것이다.

위에서의 사고는 일대일 대응을 통한 제2의 부호화<sup>4)</sup> - 재표현(representation) - 을 하는데 있어 아주 중요하다. 이러한 제2의 부호화를 통하여 수학화와 고급화를 하여 더 높은 차원의 수학을 할 수 있다. 따라서 이러한 중요한 아이디어는 중등학교 수학과 교육과정에 반드시 학문적 철학으로 녹아 있어야 하며 교육과정도 이러한 관점에서 체계화되어야 할 것이다.

이와 같은 것을 학습하는 것이 수학교육과정에서 집합과 함수가 가지는 또 하나의 의의이

4) 제1의 부호화는 비에트에 의한 문자의 도입이고, 제2의 부호화는 이미 대수적 구조를 알고 있는 집합 혹은 그 집합의 대수적 구조를 직접 다루는 것이 복잡할 경우 일대일 대응을 통하여 새로운 집합에 기존의 집합과 동일한 대수적 구조를 복사하여 간결하게 표현을 하는 것이다.

기도 하다. 그런데 중등학교수학에서 집합과 함수를 도입하고 있지만 현대화시키는 내용이나 과정이 미흡하다. 또한 집합의 활용이 집합 단원 이외에 수 집합, 해집합, 진리집합 등 다소 제한된 부분에서 다루어질 뿐, 다른 단원에 적용되는 과정이 미흡하고, 그로 인해 집합은 단절된 단원으로 존재하여 다른 단원과의 연계성이 떨어지는 실정이다. 또한 중등학교수학의 많은 부분이 연산과 연산법칙을 다루고 있는데 이는 대수적 구조에 관한 내용이다. 그러나 이러한 대수적 구조에 대한 논의가 왜 필요한지에 대한 내용은 거의 다루어지고 있지 않다. 따라서 교사나 학생들의 이에 대한 인식이 미흡하다.

일대일 대응의 의미는 다음과 같이 요약할 수 있다.

어떠한 수학적 모델이 나타났을 때 이것을 대수적으로 형식화(formulate)할 필요가 있는 경우, 일대일 대응과 이를 통한 재표현 과정 즉, 집합과 구조를 만드는 과정을 통하여 새로운 모델을 만들 수 있다.

#### 4. 일대일 대응에 의한 구조보존의 예

이제 이러한 일대일 대응에 의한 구조보존의 개념이 적용된 예들에 대하여 알아보자.

**예 1**  $A$ 가 유한집합일 때,

$$G_A = \{f \mid f: A \rightarrow A; \text{일대일 대응}\}$$

에 대하여  $G_A$ 의 원소를 집합  $A$ 의 순열(permutation)이라 한다.  $(G_A, \circ)$ 은 수학의 역사상 아주 중요한 위치를 차지하게 된다. 특히  $|A|=n < \infty$ 일 때,  $(G_A, \circ)$ 는 유리수 계수를

갖는  $n$ 차 방정식의 근호를 이용한 풀이에 결정적 역할을 하게 되는데, 이것이 갈루아 이론이다. 특히,  $|A| \geq 5$ 일 때, 군  $(G_A, \circ)$ 는 비가해군(unsolvable group)이다. 이것이 바로 5차 이상의 유리계수 다항방정식은 근호를 이용하여 풀 수 없다는 것이다. 따라서 현행 고등학교에서의 순열과 조합은  $(G_A, \circ)$ 의 공액류방정식(conjugate class equation)을 구하는 내용이므로 이것은 일대일 대응의 장에서 재배열되어야 한다. 그리고 공액류방정식을 구하는 것이 순열과 조합 단원의 목표가 되어야 한다.<sup>5)</sup>

또한,  $f: A \rightarrow A$ 가 일대일 대응인  $f \in G_A$ 에 대하여,  $f^{-1}$ 가 존재하고  $f^{-1}$ 는 일대일 대응이다. 이와 관련된 내용이 현행 고등학교에서 어떤 함수의 역함수를 정의할 때 일대일 대응이 전제되어야 함을 강조하는 근원적인 내용이다. 지금까지 교육과정에서는 이 내용에서만 주로 일대일 대응을 논의하고 있다.

**예 2** 정수의 덧셈 체계  $(\mathbb{Z}, +)$ 로부터 집합  $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 를 생각할 때, 함수

$$\begin{aligned} \lambda: (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow A \\ n &\mapsto 2^n \end{aligned}$$

는 일대일 대응이다. 이제  $\lambda$ 를 통하여 무한 순환군  $(\mathbb{Z}, +)$ 의 구조를  $A$ 로 일대일 대응을 통하여 재표현할 수 있다. 여기서  $2^n \oplus 2^m = \lambda(n+m) = 2^{n+m}$ 이다.  $\oplus$ 를  $\cdot$ 로 나타내면  $(\mathbb{Z}, +)$ 는 일대일 대응  $\lambda$ 를 통하여  $(A, \cdot)$ 로 표현될 수 있다. 이것이 바로 지수법칙이다.

$\lambda$ 를 함수의 연속성을 통해 실수까지 확장하면

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\xrightarrow{\bar{\lambda}} (\mathbb{R}^+, \cdot) \\ x &\mapsto 2^x \end{aligned}$$

5) 이현정(2010) 참고.

이고, 이것이 일대일 대응에 의한 지수법칙이며, 이것의 역함수가 로그함수이다. 이 역함수를  $g$ 라 하자. 그러면

$$g: (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

이다. 이 경우  $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ 이다. 특히 정의역에서의 항등원 1은 공역의 항등원으로 대응된다. 즉,  $g(1) = 0$ 이다. 이 때  $g(x) = \log_2 x$ 라 한다. 그러면 다음이 만족한다.

$$\begin{aligned} \log_2(xy) &= \log_2 x + \log_2 y \\ \log_2 1 &= 0 \\ \log_2 \frac{1}{x} &= -\log_2 x \quad (x > 0) \end{aligned}$$

• 를 +로 나타내면 일대일 대응  $g$ 를 통하여  $(\mathbb{R}, +)$ 로 재표현될 수 있다.

**예 3**  $X$ 를 공집합이 아닌 집합이라 하고,  $A \subseteq X$ 라 하자. 함수  $f_A$ 를

$$\begin{aligned} f_A: X &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ x \in A &\mapsto f_A(x) = 1 \\ x \notin A &\mapsto f_A(x) = 0 \end{aligned}$$

라 정의하자.  $(T = \{f_A \mid f_A: X \rightarrow \mathbb{Z}_2\}, +, \cdot)$

로부터 함수

$$\begin{aligned} \theta: T &\rightarrow \wp(X) \\ f_A &\mapsto A \end{aligned}$$

는 일대일 대응이다. 따라서  $\theta$ 를 통하여  $(T, +, \cdot)$

의 구조를  $\wp(X)$ 로 일대일 대응을 통하여 재표현할 수 있다. 이 때  $f_A + f_B = A \Delta B$ 이고  $f_A \cdot f_B = A \cap B$ 이다.<sup>6)</sup> 즉,  $(\wp(X), \Delta, \cap)$ 로 재표현된다.

위의 일련의 예는 일대일 대응을 통한 재표현과 관련된 중요한 내용들로 다음의 정리로 요약할 수 있다.

**정리 2**  $(B, +, \cdot)$ 가 대수적인 시스템이고,  $C$ 가 어떤 집합이라 하자.  $\sigma: (B, +, \cdot) \rightarrow C$ 가 일대일 대응일 때,  $(B, +, \cdot)$ 를  $\sigma$ 를 통하여  $C$ 로 재표현할 수 있다. 즉,  $c_1, c_2 \in C$ 에 대하여  $\sigma(b_1) = c_1, \sigma(b_2) = c_2$ 인  $b_1, b_2 \in B$ 에 대하여

$$\begin{aligned} c_1 \oplus c_2 &= \sigma(b_1) \oplus \sigma(b_2) = \sigma(b_1 + b_2) \\ c_1 \odot c_2 &= \sigma(b_1) \odot \sigma(b_2) = \sigma(b_1 \cdot b_2) \end{aligned}$$

로 정의하면,  $(B, +, \cdot)$ 와  $(C, \oplus, \odot)$ 는 동일한 대수적 체계를 갖는 것이다. 즉,  $(B, +, \cdot)$ 는  $\sigma$ 를 통하여  $(C, \oplus, \odot)$ 로 재표현이 되는 것이다.

### III. 결론

행렬의 연산 규칙이 왜 그렇게 정의되는가에 대한 교사의 지도 실제와 인식 그리고 이론적 고찰을 통하여 행렬 연산 규칙 지도의 필요성과 그 이론적 배경을 밝혔으며, 이러한 내용의 기초가 되는 구조의 보존이란 개념과 일대일 대응의 의미에 대하여 고찰하였다.

학교수학에서 함수는 변화를 다루는 중속의 개념과 구조를 다루는 대응의 개념이 지도되고

6) 김부윤 · 황종철 · 김소영 · 정영우(2010) 참고.

있지만, 대응의 본질적 의의를 현대수학의 관점에서 밝히고 지도하는 내용은 찾아보기 힘들다.

행렬은 학교수학에서 일대일 대응을 통하여 구조의 보존을 다룰 수 있는 좋은 예이다. 특히 행렬 표현 방법이나 곱셈 규칙은 이러한 과정으로부터 정해진다. 따라서 이를 설명하려면 구조의 보존에 대한 함수의 내용도 강조되어야 한다.

함수의 내용 지도에 있어 식이나 그래프를 통한 유리함수, 무리함수, 삼각함수, 함수의 합성 또한 중요한 주제이지만, 함수를 대응으로 도입하여 일대일 함수, 일대일 대응, 위로의 함수를 어떻게 가르치고 지도할 것인가도 중요한 문제이다.

일대일 대응은 현대수학의 구조적 관점에서 그 중요성이 더욱 크다. 따라서 학교수학에 이러한 내용을 직접적으로 소개하기는 힘들더라도 이러한 관점에서 내용을 전개할 필요가 있다.

우선 함수에서 대수적으로 구조를 알고 있는 집합을 일대일 대응을 매개로 하여 구조가 없는 혹은 구조를 모르는 집합에 새로운 연산을 부여하는 것으로서 일대일 대응의 중요성을 소개할 필요가 있다. 이러한 것의 예로 행렬의 표현, 행렬의 덧셈과 곱셈을 정의하는 과정을 구성할 수 있다. 그러나 이러한 일대일 대응은 행렬의 연산뿐만 아니라 다양한 내용 - 지수법칙, 대칭차집합, 순열 - 의 지도에 기초를 제공한다.

따라서 이러한 맥락 하에 함수 단원 혹은 학교 수학 전 과정에서 일대일 대응을 통한 재표현을 강조하는 교육과정을 제안하면 아래와 같다.

- ① 함수의 개념은 대응의 관점으로 도입하고, 일대일 함수, 위로의 함수, 일대일 대응의 지도를 강화한다. 특히 일대일 대응은 새로운 집합에 대수적 체계를 도입하려 할

때, 기존에 알고 있는 집합의 대수적 체계를 옮기는 재표현의 도구로서 강조되어야 한다.

- ② 행렬 표현의 도입은 벡터공간에서 벡터공간으로 가는 일차변환을 일대일 대응을 통하여 표현한 것임을 강조하고, 이러한 행렬 표현의 편리성을 강조한다. 또한 행렬의 곱은 일차변환의 합성을 일대일 대응을 통하여 재표현한 결과물임을 보다 상세하게 전달할 필요가 있다. 그리고 행렬의 곱셈에 관한 교환법칙을 일차변환의 합성과 관련하여 인식시켜야 한다.
- ③ 일대일 대응을 통한 구조의 보존으로서 지수함수와 로그함수를 도입할 수 있으며, 지수법칙도 다룰 수 있다. 또한 대칭차집합의 의미 역시 이러한 관점에서 지도하여야 한다.

본 연구에서는 함수 단원에 국한된 내용이 아니라, 수학 전반에 걸쳐 적용되는 개념인 일대일 대응의 의미를 연산의 구조를 보존한다는 관점에서 논의하였다. 이러한 예는 지수법칙, 로그함수, 대칭차집합에서 볼 수 있지만, 본 연구에서는 특히 행렬에 초점을 맞추어 논의하였다. 따라서 일대일 대응에 대한 더 많은 학문적·이론적 배경에 대한 연구가 이루어져야 할 것이다. 또한 교사의 교과전문성 신장과 교수 활동에 있어서의 요구에 답을 줄 수 있는 다른 수학적 지식에 대한 교재론적 연구가 이루어져야 할 것이다.

## 참고문헌

강윤수·정성현·강덕심(1998). 학교수학에서의

- 함수 개념 지도 방법에 관한 고찰. **대한수학 교육학회논문집**, 8(1), 381-403.
- 강현영(2007a). 학생들의 함수개념에 대한 선행 연구 고찰. **대한수학교육학회 수학교육학논총**, 25, 399-412.
- 강현영(2007b). 통합개념으로서 함수 개념에 대한 역사적 고찰. **한국수학사학회지**, 20(4), 153-174.
- 교육과학기술부(2009). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 **고등학교 교육과정 해설5- 수학**.
- 김부윤 · 김소영(2007). 수학적 개념에 대한 조작적 접근과 구조적 접근 -지수함수와 로그함수를 중심으로-. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>**, 21(3), 499-514.
- 김부윤 · 황종철 · 김소영 · 정영우(2010). 대칭차 집합이 가지는 중요성에 관한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 49(4), 489-500.
- 김원경 · 김용대(2002). 교사의 수학적 지식에 대한 연구 -함수 개념과 관련하여-. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 41(1), 101-107.
- 김종태(2010). **등식의 성질과 연산의 정의에 관한 연구**. 부산대학교 대학원 박사학위논문.
- 김진환(2010). 일차함수의 개념형성을 위한 표상 활동에서 정의역의 역할에 대한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>**, 24(1), 49-65.
- 남문희(2009). 일차변환을 중심으로 한 행렬 수업에 관한 연구. **대한수학교육학회 수학교육학논총**, 36, 21-28.
- 박영희(2010). **representation 관점에서 본 함수 개념의 연구**. 부산대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 변윤휘(2011). **중등학교에서 일차변환 도입에 관한 지도**. 부산대학교 대학원 석사학위논문.
- 신보미 · 박종률 · 임재훈(2007). 행렬 도입 및 연산지도의 대안적 방법. **과학교육연구지**, 24, 71-81.
- 우정호 · 강현영(2007). 심성함양으로서의 수학교육 -F. Klein의 함수적 사고 교육을 중심으로-. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 17(4), 333-357.
- 유운재(2007). 수학교육에 유용한 표상. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 46(1), 123-134.
- 이영하 · 신정은(2009). 교수공학 친화적, 실용적, 교수학적 변환의 실제적 연구 (10-나 삼각함수 단원을 중심으로). **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 11(1), 111-129.
- 이정우 역(2000). **알기 쉬운 선형대수**. 범한서적.(Howard Anton(2000), *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons.)
- 이현정(2010). **순열과 조합이론의 대수학적 고찰에 관한 연구**. 부산대학교 대학원 박사학위논문.
- 이홍천 역(2005). **집합론**. 경문사.(Y. F. Lin & S. Y. T. Lin(1974), *Set Theory: An Intuitive Approach*, Houghton Mifflin Harcourt.)
- Fraleigh. J. B. (2000). *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley.
- Jonson. T. W. (1994). *Abstract Algebra Theory and Application*, PWS Publishing Company.
- Nicholson W. L. (1999). *Introduction to Abstract Algebra*. A Wiley-Interscience Publication.
- Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. In Dubinsky, E., & Harel, G.(Eds), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy*(MAA Notes No. 25, pp. 1-24). Washington, DC: Mathematical Association of America.

# A Study on Meaning of One-to-One Correspondence through the Operation of Matrix

Chung, Young Woo (Pusan National University)

Kim, Boo Yoon (Pusan National University)

Hwang, Jong Chul (Buhung High School)

Kim, So Young (Busan Science High School)

In this study, we consider the meaning of one-to-one correspondence through theoretical background under operation of matrix. On algebraic point of view, its significance is 'through one-to-one correspondence from a set with given structure, become a methods in order to induce an algebraic system in to a new set.' That is a key idea making isomorphic structure. Such process experiences necessity of mathematical

fact, as well as the deep understanding of one-to-one correspond -ence. Also that becomes a base for develop a various mathematical concepts, such as matrix, exponential laws, symmetric difference, permutation and so on. This study help teachers and students to understand of mathematical concepts meaningfully and to facilitate teacher's professional development.

\* key words : one-to-one correspondence(일대일 대응), representation(재표현), operation of matrix(행렬의 연산), professional development(전문성 개발)

논문접수 : 2011. 8. 02

논문수정 : 2011. 9. 01

심사완료 : 2011. 9. 09