한국초등수학교육학회지 *15*(2) 437-461.
2011. 08. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea *15*(2) 437-461.
August 31. 2011.

초등 수학영재들이 수학문제 해결과정에서 보이는 메타인지 사례 연구

한상욱[1)] · 송상헌[2)]

본 연구는 초등 수학영재들이 'n×n 격자점에서 정사각형 개수 구하기' 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 메타인지 요소를 분석하여 이것이 문제해결과정에 어떻게 서로 상호작용을 하며, 또 메타인지 요소가 문제해결의 성패에 어떤 영향을 미치는지를 살펴보고자 하였다. 이를 위하여 현재 우리나라의 대표적인 3가지 영재교육기관(지역공동영재학급, 교육지원청부설 영재교육원, 대학부설 과학영재교육원)별로 각 1명씩 총 3명(기관의 순서대로 각각 학생 C, 학생 B, 학생 A라 함)을 대상으로 3시간 정도가 걸리는 수업을 연구자가 직접 참여한 관찰과 수업 녹화용 비디오 및 활동지 분석, 그리고 수업 후 면담 등을 통해 질적 사례 연구를 실시하였다.

주제어: 수학 영재, 문제해결, 메타인지, 격자점

Ⅰ. 서 론

학생 개개인이 문제해결에 실패하는 원인에는 비인지적이거나 메타인지적인 요인에서 비롯되는 경우가 많다. Schoenfeld(1985)는 많은 학생들이 주어진 수학 문제를 해결하는데 필요한 충분한 지식을 가지고 있으면서도 실제로 문제를 해결하지 못하는 점을 지적하면서, 그 원인을 자신이 가진 자원을 적절히 활용하지 못하는 학생들의 관리적 능력의 결여로 파악하였다. Lester(1985)도 학생의 문제 해결력을 개선하려는 많은 연구가 실패한 것은 발견술적 기능의 개발을 지나치게 강조한 반면, 이로 인해 학생 자신이 자신의 활동을 조정하는 관리적 기능을 무시하는 경향에서 그 원인이 있다고 주장하고 있다. 또한 Silver(198)는 기존의 문제해결 연구가 주로 인지적 측면에 치우쳐 있었기 때문에 이제는 문제해결 전략의 선택이나, 인지적 감시, 그리고 인지적 과정의 평가 활동 등과 관련된 메타인지적 활동을 고찰할 필요가 있다고 주장한다.

문제해결과 메타인지에 관한 기존 연구들이 문제해결에 메타인지가 중요한 요소임을 확인하고, 학습자의 문제해결력 향상을 궁극적 목표로 하여 의도적인 개입을 하고 있지만 이들 대부분은 문제해결력 신장에 메타인지의 효과성을 밝히는 양적 접근을 사용하여 사전 사후의 변화는 보여주지만 학생의 문제해결 과정 중에 메타인지의 영향을 충분히 설명하기에는 한계가 있다. 또한 일반 심리학 분야에서 메타인지의 개념을 지식 측면에 초점을 두는 것과는 달리 수학교육분야에서는 메타인지 개념의 기능 측면에 초점을 두어 과정적이고, 역동적인 측면이 강조되고 있는 만큼 문제해결 과정에서 메타인지가 나타나는 형태

1) [제1저자] 용인 포곡초등학교
2) [교신저자] 경인교육대학교/아주대학교

를 분석하는 연구가 뒷받침되어야 할 필요가 있다. 즉, 문제해결 과정에서 메타인지의 구성 요소가 어떤 영향을 미치는지에 대한 보다 세밀한 질적 관찰이 필요하다. 수학 영재교육분야에서도 수학적 문제해결력 신장에 있어 다양한 접근 방식 중 하나로 메타인지를 중심 주제로 한 연구가 필요하다고 본다. 이에 본 연구에서는 초등 수학 영재아를 대상으로 그들의 주어진 과제의 해결 과정에 대한 분석과 더불어 그 과정에서 나타나는 메타인지 요소를 구체적으로 분석하기 위해 다음 3가지의 연구 내용을 설정하였다.

첫째, 영재교육기관 유형별 초등 수학 영재들의 문제해결 과정을 분석한다.

둘째, 초등 수학 영재들이 문제해결 과정에서 보이는 메타인지 형태를 요소별로 분석하고 메타인지 요소간의 상호작용을 분석한다.

셋째, 연구 대상자별로 메타인지 요소가 문제해결의 성패에 미친 영향을 사례별로 분석한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 메타인지의 개념

메타인지에 대해 여러 학자들이 말한 내용을 간략히 나타내면 <표 1>과 같으며, 이 중 본 연구의 이론적 바탕이 되는 Schoenfeld의 메타인지 개념을 자세히 살펴보고자 한다.

<표 1> 학자별 메타인지에 대한 개념

학 자	메타인지 개념
Flavell(1979)	• 메타인지적 지식, 메타인지적 경험
Schoenfeld(1987)	• 자신의 사고과정에 대한 지식, 조절 또는 자기통제, 신념과 직관
Brown(1987)	• 인지에 대한 지식(정적지식), 인지에 대한 조절(계획, 예측, 추측, 감시)
Chi(1987)	• 메타인지를 일종의 지식으로 간주하고 '메타지식'이라는 용어로 대체
Weinert(1987)	• 사고에 대한 사고, 지식에 대한 지식, 행동에 대한 반성 같은 이차적인 지식으로 정의
Kroll(1998)	• 메타인지적 감각, 메타인지적 자기 통제
Garofalo & Lester(1985) Schoenfeld(1985,1987,1992)	• 신념과 태도뿐만 아니라 불안, 동기, 인내심과 같은 개인의 정서까지도 관련

Schoenfeld(1985)는 메타인지의 개념에 대해 ①자신의 사고 과정에 대한 지식, ②조절 또는 자기 통제, ③신념과 직관의 3가지 요소로 말하고 있다.

첫째, 자신의 사고 과정에 대한 지식이란, 자신의 사고 과정을 얼마나 정확하게 기술할 수 있는가(메타기억)와 관련되며, 자신의 사고 과정에 대한 평가 행위 그 자체에 초점이 주어진 과정으로서의 지식일 수도 있고, 평가되어진 결과에 초점이 주어진 산물로서의 지식일 수도 있다.

둘째, 조절 또는 자기 통제란, 과제의 수행 과정에서 관리에 관한 능력이다. 문제를 해결하는데 있어 성공한 자와 실패한 자, 이 둘 사이의 차이는 그들이 알고 있는 수학적 내용

이라기보다는 알고 있는 지식을 어떻게 이용했는가 하는 점이다. 관리의 측면은 4가지, 즉 ①해답에 대해 성급히 시도하기 전에 문제가 무엇에 관한 것인지 확인하는 것, ②계획하는 것, ③감독(monitoring)하기, 혹은 해결과정이 잘 진행되었는지 기억하는 것, ④문제를 풀 때 자료를 할당하고, 무엇을 할지를 결정하고 그에 따른 시간을 결정하는 것을 포함한다.

셋째, 신념과 직관이란 개인이 소유하고 있는 수학적 세계관인데, 수학에 대해 가지고 있는 신념은 문제를 접근하는 방법을 선택하게 하며, 어떤 기술을 사용할지 그만둘지, 어느 정도의 시간을 책정할지, 얼마의 노력을 쏟을지를 결정하게 한다. 따라서 신념은 자원, 발견술, 제어 기능이 작용하는데 있어 상당한 영향력을 발휘할 것으로 생각된다.

이상의 여러 학자들의 설명을 바탕으로, 본 연구에서는 메타인지의 개념을 다음과 같이 3가지의 영역 요소로 정의하고자 한다. 즉, 메타인지는 인지 과정에 영향을 미치는 요인들(개인, 과제, 전략 등)에 대해 자신이 무엇을, 어떻게, 얼마나 알고 있는가에 관한 지식적 영역과 그 인식을 바탕으로 과제를 해결하는 동안 자기 자신의 인지 과정을 유도, 감시, 조사, 평가하는 수행적 영역, 그리고 자신의 이 수행에 영향을 주는 정서, 신념, 태도 등의 정의적 영역을 포괄한다. 즉, 본 연구에서는 메타인지를 순수한 인지적 개념이 아닌 인지와 정의의 복합적 개념으로 간주한다.

2. 메타인지의 3가지 영역

가. 메타인지의 지식적 영역

인지과제를 수행하는 과정 혹은 결과에 영향을 미칠 수 있는 변인에 대한 개인적 지식을 말한다. 즉, 학습자가 학습과 관련된 요인들에 대해 무엇을, 어떻게, 얼마나 알고 있는지 명확하게 인식하는 것이라 할 수 있다. 본 연구에서는 Flavell의 분류를 근간으로 하여 메타인지적 지식의 개념인 '개인 변인', '과제 변인', '전략 변인'을 지식의 종류로 보고, '개인적 메타지식', '과제적 메타지식', '전략적 메타지식'을 메타인지의 지식적 영역 요소로 선정하였다. 이것은 Flavell이 메타인지적 지식에 자신의 능력에 대한 인지뿐 아니라 동기, 불안까지 포함시킨 포괄적인 의미보다는 협소한 개념으로 정의적 측면을 제외시킨 것이다.

나. 메타인지의 수행적 영역

지식으로서의 메타인지 개념에 대해 한계를 느끼면서 결국, 전략적 지식 혹은 절차적 지식이라는 '지식의 관점'이 인지 과정에 대한 조절 행위라는 '행동의 관점'으로 확대되어 메타인지의 개념을 새롭게 해석하게 만들었다. 본 연구에서는 메타인지의 기능 영역을 행동의 관점에서 '수행(performance)'으로 규정하고 메타인지의 수행적 영역 요소를 유도 활동, 감시 활동, 조사 활동, 평가 활동으로 선정하였다. 이 활동들은 Schoenfeld(1985)가 문제해결과정에서 나타날 수 있는 메타인지 활동으로 구분한 것들이다.

다. 메타인지의 정의적 영역

Garofalo와 Lester 그리고 그리고 Schoenfeld는 신념과 태도 뿐 아니라 수학불안과 동기, 인내 등과 개인의 정서 혹은 느낌까지도 메타인지와 관련짓고 있다. 따라서 메타인지의 개념은 지식과 수행 영역뿐 아니라 정의적 영역에 의해 설명될 수 있으므로 본 연구에서도 메타인지의 영역 중 하나로 정의적 영역을 포함시켰고, 그 요소로 정서(affects), 신념

(beliefs), 태도(attitude)[3]를 선정하였다.

<표 2> 본 연구의 메타인지 영역과 구성요소

지식적 영역	수행적 영역	정의적 영역
과제를 수행하는 과정 혹은 결과에 영향을 미칠 수 있는 변인에 대한 개인적 지식	문제해결 과정을 조절하고 감독하는데 사용되는 활동	메타인지의 지식적, 수행적 영역이 나타날 때 함께 발생되는 정서적 반응
• 개인적 메타지식 • 과제적 메타지식 • 전략적 메타지식	• 유도 활동 • 감시 활동 • 조사 활동 • 평가 활동	• 정서 • 신념 • 태도

3. 메타인지에 관한 선행 연구 분석

그간 우리나라에서 수행한 문제해결과정에 나타난 메타인지에 관한 질적 연구들은 <표 3>과 같다.

<표 3> 수학문제해결 과정에 나타난 메타인지에 대한 질적 연구 요약

연구자 (연도)	대상자 수(명)	대상자 수준	연구 과제	연구 결과
정문숙 (1994)	중학교 2학년 (10명)	수학 우수아	경시대회와 책에서 발췌한 5문항	- 우수아들은 자신의 인지 과정을 모니터하고 조정하며, 과제에 대한 인지를 갖고 이해를 확인하고, 문제해결 전략을 조절함. 하지만 개인변인은 잘 나타나지 않았음. - 보다 문제해결력이 높은 우수아들의 경우 실행적 조절에 해당하는 점검하기, 정리하기 등의 인지 활동이 활발함.
노소영 (2004)	초등학교 6학년 (8명)	일반학급 상위집단 중·하위 집단	문제해결형 4문항	- 학생마다 메타인지의 유형과 사용 빈도수에는 차이가 있음. - 고정된(공통된) 문제 풀이의 전략들이 유도 활동에서 보임. - 중·하위권 아동 중에는 문제해결에 방해가 되는 유형의 신념체계를 많이 가지고 있음
신선화 (2007)	초등학교 5, 6학년 (7명)	교육청 및 대학부설 영재학급	바둑돌 옮기기 축구공의 비밀	- 학생들이 메타인지적 사고 과정에 나타난 메타인지 경로는 ARE, RE, AERE 세 가지 경로이며, 이 중 ARE경로가 문제해결에 성공한 학생들이 대체적으로 나타내는 경로임. - 같은 경로로 문제를 해결한 학생들이 동일한 메타인지적 사고를 하여도 메타인지적 사고의 능력에 따라 문제해결의 성패가 달라짐.
김민정 (2008)	초등학교 5학년 (4명)	대학부설 영재학급	바둑돌 옮기기 Big Loser	- 메타인지의 기능 영역의 사고를 통해 적절하고 유용한 지식만 작용하며, '과제'에 관한 메타인지적 지식의 발현이 두드러짐. - 메타인지적 기능 영역은 해결 과정에 수시로 발현되며 점검을 통해 전략을 수정·변형하면서 해결 과정을 지속적으로 이끌어 감.

3) '정서'는 과제 수행과 관련하여 발생하는 모든 종류의 개인적 감정(불안, 확신, 포기감, 의문, 회의 등)을, '신념'은 변인에 대한 주관적 지식을, '태도'는 문제 해결 수행에 영향을 준다고 믿어지는 것으로 정서는 태도보다 감정적인 반응을 더 많이 포함한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

1. 연구 대상자

본 연구는 초등 수학 영재아들이 문제해결과정에서 보이는 메타인지를 분석하기 위하여 경기도 지역의 A대학 부설 과학영재교육원(집단 A)과 Y교육지원청 부설 영재교육원(집단 B), 그리고 S초교 지역공동영재학급(집단 C)에서 수업을 받고 있는 학생 3명들(기관별로 각각 A, B, C라 함)을 연구 대상으로 선정하였다. 관찰 시점에 약간의 차이가 있기는 하지만 이 세 학생은 모두 현재 동일 학년으로서 그들의 수학 문제해결능력의 수준 차이는 그들이 속한 집단을 대표한다고 볼 수 있다. 따라서 사례별 특성만 강조할 뿐 연구의 결과를 일반화하는데 한계가 있다.

<표 4> 연구 대상자

학생 ID	영재교육 경력	관찰 시점	소 속	학년	집단 수준 (동일연령대)
C	1년	2011. 4. 2	지역공동영재학급	6학년	C(상위 5%)
B	2년	2010.12.17	교육지원청 부설 영재교육원	5학년	B(상위 1%)
A	2년	2011. 1. 6	대학 부설 과학영재교육원	5학년	A(상위 0.05%)

2. 연구의 절차

연구 과제를 연구 대상에게 적용하기 전에 Y시 소재 지역공동영재학급 6학년과 5학년 학생 각각 20명을 대상으로 3차에 걸쳐 예비 실험을 실시하였다. 이 과정을 통하여 과제의 내용과 수준의 타당성 검증하고 필요한 소요시간을 판단했으며, 본 실험에서 나타날 수 있는 문제점을 수정 및 보완하였다.

본 연구에 사용되는 과제는 기하학적 형태를 취하지만 본질은 수식의 일반화를 포함하는 대수적 과제로 문제 상황 속에서 일반식을 요구하는 내용으로 이루어지며, 그 과정에서 학생마다 각자의 문제해결을 위한 일반화 전략을 사용하게 된다. 초등수학교육과정의 수준으로는 연구 과제의 일반식을 명료하게 나타내기 힘들 수 있어 활동 1과 활동 2를 선행 과제로 제시하여 일반식을 구할 때 자연스럽게 배경지식으로 이용될 수 있도록 하였다. 단일 과제를 적용하였기 때문에 채택한 과제의 성격이나 난이도에 따라 본 연구의 결과가 달라질 수 있다.

<표 5> 연구의 과제

활 동	과 제[4]	출 처
활동 1	n×n 격자판에서 정사각형 개수 구하기	연구자
활동 1-1	제곱의 합 구하는 일반식 탐구	아래 사이트 참고
활동 2	n×n×n cube에서 정육면체 개수 구하기	연구자
활동 2-1	세제곱의 합 구하는 일반식 탐구	아래 사이트 참고
활동 3	n×n 격자점에서 정사각형 개수 구하기	KEDI 중등 프로그램(2004)

http://www.mathink.org/Uploads/10lecture/lecontent.htm

예비 실험을 통해 수정 · 보완된 최종 연구 과제를 2010년 12월부터 2011년 4월까지 연구 대상자가 속한 집단에 실시하였다. 그러나 교육지원청 부설 영재교육원은 전체 학생을 대상으로 실시하지 못하고 영재교육원 소속 학생 한 명만 실시하였다. 따라서 학생 A와 학생 C는 각 영재교육기관의 담임 추천을 받은 학생이나, 학생 B는 그렇지 않다. 실험 종료 후 담임교사에 문의하여 세 학생의 수학적 특성을 비교하였다. 본 연구는 연구 대상자로 선정된 학생들의 연구 참여에 대한 동의를 얻어 진행되었다.

3. 자료의 수집

연구 대상자들이 문제해결 과정에서 보이는 메타인지요소를 분석하기 위해 학생 활동지, 비디오 촬영, 심층 면담을 활용하였다. 특히 심층 면담은 연구 대상자가 자신의 문제해결 과정을 설명해 보게 하고, 문제해결 과정 중에 보인 반응 중 연구자가 이해하기 힘든 부분에 대하여 면담을 실시하였다. 학생과 나눈 면담 내용과 질문, 행위, 표정 등을 모두 프로토콜로 작성하여 분석을 위한 자료로 활용하였다. 본 연구에서 연구자는 연구 대상자가 참여한 수업에서 수업 진행자, 참여자, 관찰자로 활동하면서 대상자들을 관찰하였다.

4. 자료 분석의 틀

가. 일반화 전략에 대한 분석

박은정(2006)은 기존의 연구(Lannin, 2005; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000)에서 제시된 다양한 일반화 전략을 참고로 하여 문제해결 과정에서 나타나는 일반화 전략 유형을 <표 6>과 같이 정리하였다. 본 연구는 <표 6>을 이용하여 일반화 전략을 분석하였다.

<표 6> 일반화 전략의 분석틀

일반화 전략		설 명
문제 상황의 구조 인식		문제 상황 속에서 주어진 여러 가지 조건을 조직하여 전체적인 구조를 인식하고, 패턴을 밝히는 것
함수적 관계 인식	복합관계인식	종속변인의 변화량과 독립변인 사이에서 나타나는 여러 가지 관계를 인식하는 것
	단일관계인식	종속변인의 변화량을 중심으로 동일한 패턴이 나타나는 부분수열을 하나의 집합으로 하여 그러한 수열 내부에서 나타나는 독립변인과 종속변인 사이의 관계를 인식하는 것
	추측에 의한 관계 인식	정당화 과정 없이 추측만으로 독립변인과 종속변인 사이의 관계를 인식하는 것
종속변인 사이의 관계 인식(순환적 관계 인식)		종속변인 사이의 관계에서 전항과 후항 사이의 합, 차 등의 관계를 인식하고, 이를 통해 다음 항의 값을 구함

4) 격자판은 바둑판을, 격자점은 지오보드(geoboard)를 생각하면 된다.

나. 메타인지 요소 발현에 대한 분석

연구 대상자가 문제해결 과정에서 보이는 메타인지를 세 영역으로 구분하고, 총 10개의 구성 요소로 범주화하였다. 메타인지에 대한 표준화된 분석틀이 없어 문헌 및 선행 연구 고찰을 통해 연구 목적에 맞게 작성하였다. 따라서 메타인지 요소를 분석하고 해석하는데 있어 객관성을 유지하려고 하였으나 이는 보는 관점에 따라서 달라질 수도 있다. 메타인지의 지식적 영역은 Favell(1979)의 이론에 근거하여, 개인, 과제, 전략의 세 변인으로, 메타인지의 수행적 영역과 정의적 영역은 Schoenfeld(1985)의 이론에 근거하여 수행적 영역은 유도 활동, 감시 활동, 조사 활동, 평가 활동으로, 정의적 영역은 정서, 신념, 태도로 범주화하였다.

<표 7> 메타인지 구성 요소 분석틀

영역	구성 요소	구성 요소의 특성		코드
지식적 영역(K)	개인적 메타지식(P)	인지작업의 처리자로서의 자신의 특성에 대한 지식		
		① 문제와 관련된 자신과 타인의 인지상태 인지		KP1
		② 문제와 관련된 자신과 타인의 수행능력 인지		KP2
	과제적 메타지식(T)	문제의 성질과 요구 조건, 처리 방법에 대한 지식		
		① 문제에 대한 해석		KT1
		② 문제의 목표 인지		KT2
		③ 문제의 난이도 인지		KT3
	전략적 메타지식(S)	해결 방법 및 일반적인 문제해결 전략에 대한 지식		
		① 전략 사용에 대한 인지		KS1
수행적 영역(P)	유도 활동 (G)	문제해결을 위한 견해와 대강의 구조들을 제공하고, 그 과정에서 문제가 발생 했을 때, 현재 사용 중인 전략 또는 인지 과정을 수정하거나 전환하는 활동		
		① 해결 계획 수립(하위 목표나 전략 수립)		PG1
		② 해결 전략 선택을 시행토록 유도		PG2
		③ 자신의 인지 상태 재조직(인지 제어)		PG3
		④ 활동 방법 전환 및 해결전략 수정(실행 제어)		PG4
	감시 활동 (M)	현재 자신이 하고 있는 인지 활동에 대해 검토하는 지속적인 과정의 활동		
		① 배경지식 활용		PM1
		② 인지 활동의 진행 상태 점검		PM2
		③ 인지 전략의 적절성에 대한 점검		PM3
	조사 활동 (C)	감시 활동보다 더 세부적이고, 의식적인 활동		
		① 이전 활동 확인		PC1
		② 계산 과정 점검		PC2
		③ 문제 다시 읽기		PC3
	평가 활동 (E)	문제해결활동에 대한 반성적 판단 활동		
		① 성취 목표 평가		PE1
		② 자신의 과제수행활동 평가		PE2
		③ 새로운 문제에 대한 전이 가능성 모색		PE3
정의적 영역(E)	정서(A)	메타인지의 지식적, 수행적 영역이 나타날 때 함께 발생되는 정서적 반응	① 긍정적 정서	EA1
			② 부정적 정서	EA2
	신념(B)		① 긍정적 신념체계	EB1
			② 부정적 신념체계	EB2
	태도(T)		① 긍정적 태도	ET1
			② 부정적 태도	ET2

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

본 장에서는 면담과 활동지를 바탕으로 문제해결 과정에서 나타난 학생별 인지적, 메타인지적 특성에 대해 분석한 결과를 제시하고자 한다.

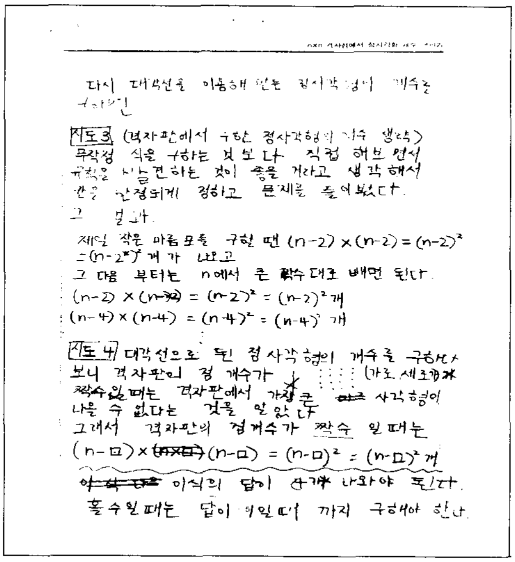
문제해결 과정에서 나타난 인지적 특성은 일반화 전략 분석 틀로, 메타인지적 특성은 본 연구자가 작성한 메타인지 분석틀로 분석하여 polya의 문제해결 과정마다 나타나는 메타인지 요소를 확인하고, 그 상호작용을 밝힌다.

또한 문제해결 결과의 차이를 가져온 주요한 원인을 문제해결 과정에 나타난 메타인지 요소로 보고, 이것이 문제해결의 성패에 미친 영향을 사례별로 살펴보고자 한다.

1. 문제해결 과정 결과 분석 및 논의

가. 지역공동 영재학급 소속 학생 C

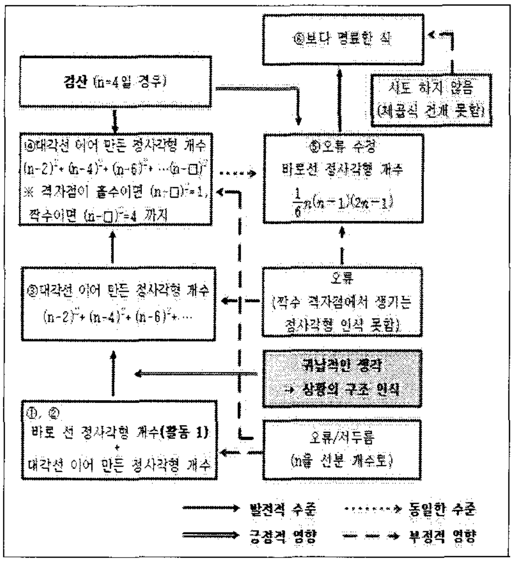
첫째, 문제를 읽은 후, 격자점과 격자판과의 차이점을 인식하고 대각선으로 만든 정사각형이 생기는 것을 파악하였다. 하지만 격자점에서도 바로 선 정사각형 개수는 격자판의 정사각형 개수와 같다는 오류를 범하였다. 이는 격자판과 격자점의 차이를 인식하였음에도 활동 1의 결과를 점검 없이 문제를 성급히 해결하려는 태도에서 비롯되었다.


다시 대각선을 이용해 만든 정사각형의 개수를 구하면

$\boxed{\text{시도 3}}$ (격자판에서 구한 정사각형의 개수 생략)
무작정 식을 구하는 것 보다 직접 해보면서 규칙을 발견하는 것이 좋을 거라고 생각해서 간을 간결하게 정하고 문제를 풀어보았다.
그 결과.
제일 작은 마름모를 구할 땐 $(n-2)\times(n-2)=(n-2)^2$ $=(n-2)^2$ 개가 나오고
그 다음 부터는 n에서 큰 짝수대로 빼면 된다.
$(n-2)\times(n-2)=(n-2)^2=(n-2)^2$ 개
$(n-4)\times(n-4)=(n-4)^2=(n-4)^2$ 개

$\boxed{\text{시도 4}}$ 대각선으로 된 정사각형의 개수를 구해서 보니 격자판의 점 개수가 (가로 세로 개) 짝수일 때는 격자판에서 가장 큰 사각형이 나올 수 없다는 것을 알았다.
그래서 격자판의 점 개수가 짝수 일 때는
$(n-\square)\times(n-\square)=(n-\square)^2=(n-\square)^2$ 개
이식의 답이 4개 나와야 된다.
홀수일 때는 답이 1일 때 까지 구해야 한다.

[그림 1] 학생 C의 상황의 구조 인식



[그림 2] 학생 C의 문제해결 과정

둘째, 귀납적인 생각으로 문제해결에 접근하였으며, '상황의 구조 인식' 전략을 사용하여 기울어진 정사각형 개수 구하는 일반식을 유도하였다. 학생 C는 몇 개의 사례를 살펴보고, 기울어진 정사각형은 홀수 격자점의 바로 선 정사각형에 내접한다는 관계를 파악하여 그 개수는 'n×n 격자점에서 홀수 격자점의 바로 선 정사각형 개수의 합과 같다.'라는 해결 아이디어를 얻었다.

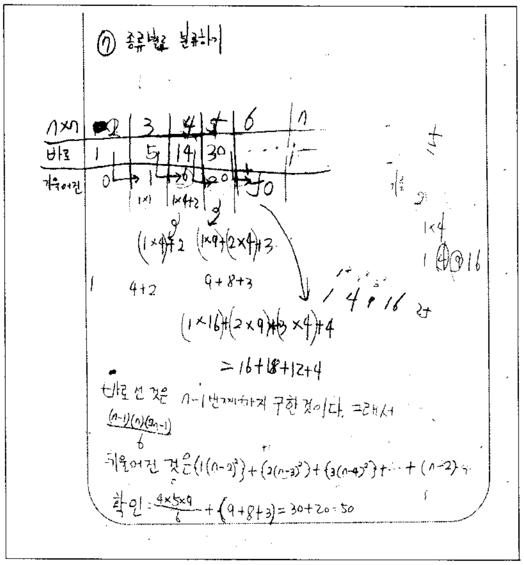
셋째, 검산을 통한 반성 활동으로 오류 수정이 이루어졌다. 검산으로 구한 일반식이 잘못되었음을 알았고, 계산 과정과 이전 활동 점검을 통해 오류를 수정할 수 있었다. 하지만 문제해결 종료 시까지 파악하지 못하였다. 자신이 구한 일반식이 논리적으로 오류가 없다고 여기고 참이라고 확신한 것으로 짝수 격자점의 기울어진 정사각형은 생각해 보지 않았다.

넷째, 일반식을 구하는데 집중하여 보다 명료한 식으로 나타내고자 하는 시도는 없었으며, 제곱식 전개에 대한 배경지식은 가지고 있지 않았다.

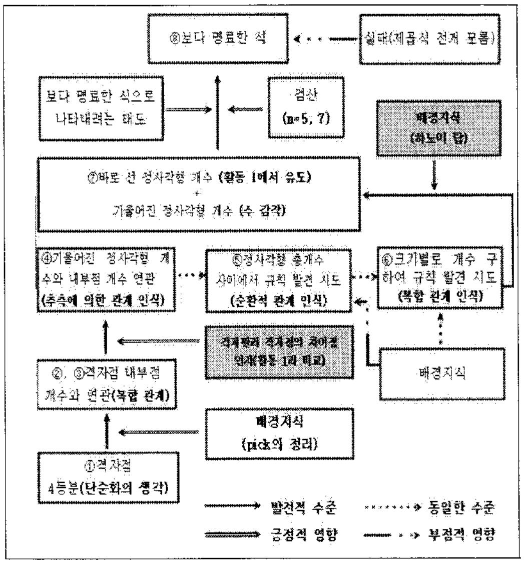
나. 교육지원청 부설 영재교육원 소속 학생 B

학생 B의 문제해결 과정을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 학생 B는 문제해결의 난관에 부딪힐 때마다 배경지식을 토대로 일반화 전략을 선택, 수정하며 문제해결을 이끌어 나갔다. 여러 가지 일반화 전략을 사용하여 시행착오를 거치다 결국, '하노이 탑'을 떠올려 각 단계의 내부점 개수(독립변인)와 기울어진 정사각형의 개수(종속변인)라는 두 양 사이의 관계에 초점을 두어 일반식을 구하는데 성공하였다. 이때 학생 B의 수 감각은 복합 관계를 인식하고 이것을 일반화하도록 하는데 중요한 역할을 하였다. 하지만 배경지식이 전부 올바른 방향으로만 문제해결을 유도한 것은 아니다. 학생 B의 일반화 전략 생각은 배경지식에만 한정되어 있었고 계획적으로 그리고 목적을 가지고 접근하지 못하는 경향을 보이기도 하였다.



[그림 3] 복합 관계 인식 전략으로 관계 파악 후 수 감각으로 일반식 유도



[그림 4] 학생 B의 문제해결 과정

둘째, 오류에 대한 반성 없이는 성공적인 문제해결을 가져 올 수 없었으며, 추후에도 계속된 오류를 가져왔다. 다섯 번째 시도에서 6×6 격자점 정사각형 개수의 오류에 대한 반성이 없어 여섯 번째 시도에서도 6×6 격자점 정사각형 개수를 205개로 파악하였다. 규칙을 발견하였더라도 정확한 일반식으로 나타낼 수 없어서 확인과 수정을 반복하며 해결 과정은 길어졌을 것이다.

셋째, 검산을 통한 반성 활동으로 구한 일반식이 맞음을 확인하였다. 구한 일반식에 n=5를 대입하여 표에서 그 개수(50개)를 확인하였고, n=7을 대입한 결과가 표에서 귀납적으로 구한 정사각형 개수(196개)와 달라 계산 과정을 검토하고 바로 오류를 수정하여 구한 일반식이 맞음을 확인하였다.

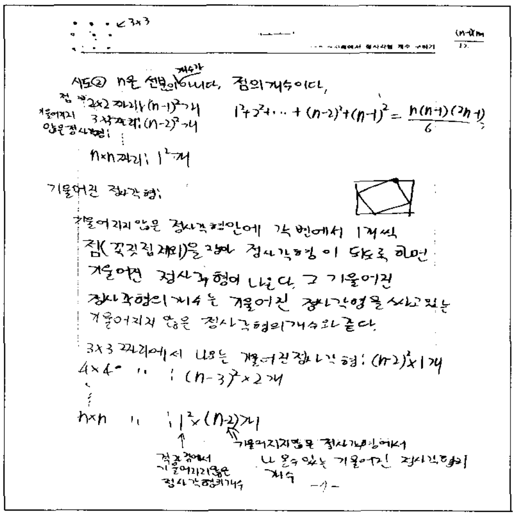
넷째, 명료한 식의 이점을 알고, 구한 일반식을 보다 간단히 나타내려 하였다. 하지만 일곱 번이나 문제해결을 시도할 만큼 과제 집착력을 가지고 있었음에도 불구하고 배경지식의(제곱식 전개) 부족으로 보다 명료한 식으로 나타내는 데는 실패하였다.

다. 대학 부설 과학영재교육원 소속 학생 A

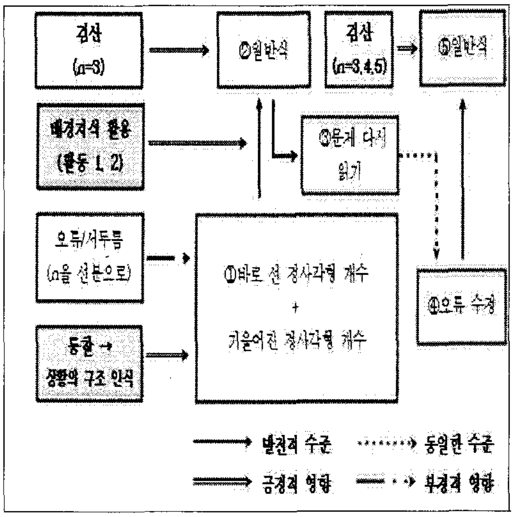
학생 A의 문제해결 과정을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 통찰(insight)을 통한 '상황의 구조 인식' 전략을 사용하여 일반식을 유도하였다. 학생 A는 문제를 읽고, 단순화하거나 몇 가지 사례를 그림으로 그려보는 활동 없이 '상황의 구조 인식' 전략을 사용하여 기울어진 정사각형은 외접하는 바로 선 정사각형의 양 꼭짓점 사이에 있는 점을 이어 만들기 때문에 그 개수는 양 꼭짓점 사이에 있는 점의 수와 같다는 것을 알아냈으며, 그 덕분에 다른 두 학생보다 문제해결에 이르는 과정이 짧았다. 즉, 상황의 구조 인식은 과제의 본질을 명확히 이해하는 것으로 과제 해결에 있어 가장 핵심이 되는 전략이라 할 수 있다.

둘째, 보다 간단한 일반식을 만들기 위해 배경지식을 활용하였다. 활동 1과 활동 2의 일반식을 활용하기 위해 식을 가공하여 제곱의 합과 세제곱의 합으로 만들었다. 이 의도된 행동은 학생 B, 학생 C와는 달리 제곱식 전개에 대한 배경지식을 가지고 있어 가능하였다.



[그림 5] 학생 A의 상황의 구조 인식



[그림 6] 학생 A의 문제해결 과정

셋째, 검산을 통한 반성 활동으로 성공적인 문제해결을 가져 올 수 있었다. 검산으로 구한 일반식이 잘못되었음을 알았고, 다시 문제 읽기로 n이 선분의 개수가 아니라 격자점 개수임을 인식하여 빠른 오류 수정이 가능하였다. 수정 후 3번의 검산 과정을 거쳐 구한 일반식에 대해 확신을 얻었다.

앞에서 살펴본 3명의 학생들이 주어진 과제를 해결할 때 나타난 특징을 정리하면 <표 8>과 같다.

<표 8> 학생별 문제해결 과정에서 나타난 특징 비교

학생 특징	학생 C	학생 B	학생 A
일반화 전략	• 귀납적인 생각 → 상황의 구조 인식	• 단순화의 생각 → 복합 관계 인식 → 추측에 의한 관계 인식 → 순환 관계 인식→ 복합 관계 인식	• 통찰 → 상황의 구조 인식
문제해결 아이디어	• 기울어진 정사각형 개수는 홀수 격자점의 바로 선 정사각형 개수의 합과 같음	• '복합 관계 인식'전략으로 일반식 유도시 수 감각이 큰 역할을 함	• 기울어진 정사각형 개수는 2부터 n까지 (바로 선 정사각형 개수)×(내접하는 기울어진 정사각형 개수)의 합과 같음
문제해결 장애요인	• n을 선분의 개수로 착각 • 홀수 격자점의 기울어진 정사각형만 파악 • 제곱식 전개 배경지식 없음	• n을 선분의 개수로 착각 • 일반화 전략의 자원이 배경지식에 한정됨 • 제곱식 전개 배경지식 없음	• n을 선분의 개수로 착각
일반식 오류 확인 및 수정	• 검산 •계산 과정 및 이전활동 점검	• 검산 • 계산 과정 점검	• 검산 • 문제 다시 읽기
일반식	$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ +{(n-2)2+(n-4)2+(n-6)2+⋯ +(n-□)2} ※홀수 격자점(n-□)2=1 짝수 격자점(n-□)2=4	$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$ +{1×(n-2)2}+{2×(n-3)2}+⋯ +{(n-2)×12}	• 배경지식 활용하여 명료한 일반식을 만들어 냄 $\frac{1}{12}n^2(n+1)(n-1)$

2. 문제해결 과정에 나타난 메타인지 결과 분석 및 논의

가. 문제 이해 단계

1) 개인적 메타지식

학생들은 문제를 읽고, 문제와 관련하여 자신이 '알고 있는 것'이 무엇인지에 대해 자문하게 된다. 문제 해결에 있어 자신이 무엇을 알고, 무엇을 모르고 있는지에 대한 인지상태의 파악은 아주 중요하다. 자신의 인지상태에 대한 정확한 진단은 정의적 영역에 긍정적으로 작용하며, 자신의 현 위치를 확인하여 문제해결의 출발점으로 삼을 수 있다. 자신의 인지상태 파악을 바탕으로 문제해결자로서 자신의 문제해결력을 종합적으로 예측, 평가하여 자신의 수행능력 범위에서 해결 가능한지를 판단한다.

C005 : 이런 식으로 제가 특별히 문제를 <u>풀어 봤던 적은 없는 것 같아서</u>(KP1)

C006 : 일단 문제를 보면, <u>제가 아까도 격자판도 풀고 했으니까'풀 수 있겠다.'</u>는 생각은 했어요.(KP2/EB1)

특히 학생 C는 앞선 활동의 성공적 수행을 바탕으로 자신의 수행능력을 긍정적으로 인지하였다. 자신의 수행능력에 대한 긍정적 인지는 해결 의지를 강하게 만들고, 생소한 문제에 대한 불안감을 떨쳐버려 적극적인 태도와 자신감으로 발전하였다. 이를 바탕으로 한 성공 경험은 자신의 수행능력을 긍정적으로 인지하게 하므로 '개인적 메타지식'과 '정의적 영역'이 서로 영향을 주고받으며 상호작용한다고 분석할 수 있다.

2) 과제적 메타지식

학생들은 문제를 해석하여 문제의 의미를 구체적으로 구조화하고 문제의 내용을 이해한다. 이 과정에서 '과제적 메타지식'이 발현된다. 예비 실험에서 나왔던 'n에는 어떤 숫자도 들어갈 수 있으니까 정사각형 개수는 무한대 아닌가요?', '격자점이 뭐죠?', '일반식이 뭐에요?' 같은 질문이 없었고, 문제에 진술된 언어적 의미를 이해하지 못해 문제해결 과정에서 오류를 범하거나 난관에 부딪히는 모습은 보이지 않아 문제의 의미를 인지하는 과정이 있었다고 볼 수 있다. 또한 '격자점에서는 기울어진 정사각형이 생긴다.'는 격자판과의 차이점을 인지하여 문제의 내용을 명확히 하였다.

C002 : 일단 격자판에서 구한 정사각형 개수 더하기 <u>격자점에서 만들 수 있는 정사각형</u> 개수를 더해야 하는데(KT1)
B015 : <u>바로 선 정사각형만 있는 게 아니라, 기울어진 정사각형</u>하고 그게 또 커진 정사각형이 있기 때문에...
A004 : 왠지요, <u>기울어진 정사각형이 바로 선 정사각형 안에 포함</u>되어져 있다고 생각하면

문제의 해석 정도는 해결 전략 선택에 영향을 주었고, 해결 전략에 따라 수행 수준이 다르게 나타났다. 이는 같은 영역 내에서도 서로 영향을 주고받으며 지식적 영역과 수행적 영역 사이에서도 상호작용이 있음으로 분석된다.

나. 계획 수립 단계

1) 과제적 메타지식

아래의 예화를 보면 학생들은 문제가 요구하고 있는 것이 무엇인지 인지하고 있다고 볼 수 있으며 이는 '과제적 메타지식'으로 설명된다. 또한, 문제의 난이도 파악에 '과제적 메타지식'이 나타나는데 예비 실험에서 문제의 난이도는 문제해결에 '불안'같은 부정적 요소로 작용하였지만, 본 실험에서는 난이도 파악이 나타나지 않았다. 연구 대상자들에게 본 과제의 난이도는 문제해결에서 중요한 요인으로 작용하지 않는 것으로 판단된다.

C003 : <u>제가 구하려고 했던 것은 그럼 이제 격자점에서 구할 수 있는 정사각형 개수를 구할 때 찾으려고 했던 건데</u>... 규칙을 찾아서 쭉 풀었어요.(PG1)
A002 : <u>격자점에서 정사각형 개수 구해야 하니까</u>(PG1)

2) 전략적 메타지식

문제가 요구하는 목표를 파악하면 목표에 도달하기 위한 방법을 알아본다. '전략적 메타지식'은 본격적인 문제해결 계획 수립에 앞서 인지 행위에 관한 정보를 제공하거나 그 행위의 진전에 관한 정보를 제공하는 것으로 본 연구에서는 귀납적인 생각이나 단순화의 생각, 그리고 그림을 그리거나 표를 만드는 행위를 유발하였다. 이를 통해 문제의 특성을 이해하고 계획을 수립하는데 도움을 주었다.

C011 : (격자점을 한정하여 대각선을 이은 정사각형을 그림)(KS1)
B004 : 첫 번째 시도는 격자점을 $\frac{1}{4}$로 나눠서(4등분해서) 구하는 것을 생각했는데 (KS1)
B007 : (정사각형을 크기별로 몇 개 그려봄)(KS1)
B008 : (표 만듦)(KS1)

3) 유도 활동

학생들은 '전략적 메타지식'을 바탕으로 적절한 활동 방법이나 해결 전략으로 성공적인 문제해결을 위한 해결 활동 순서나 계획을 수립한다. 이는 수행적 영역의 '유도 활동'으로 분석할 수 있다.

C011 : (격자점을 한정하여 대각선을 이은 정사각형을 그림)(KS1)
C012 : 시도 3에서는 이걸 격자판에서 구할 수 있는 정사각형 개수를 일단 구하는 방법을 이제 적었으니까 그건 생략을 하고, 이제 대각선을 이용해서 만들 수 있는 정사각형 개수를 구하려고 규칙을 찾으려고 하는 거였는데(PG1)
C019 : 시도 4에서 일단 끝에는 어떻게 나오는지 (알아보기 위해)...(PG1) 일단 한정되게 칸을 그려놓고 그 안에서 가장 크게 그릴 수 있는 대각선으로 만든 정사각형을 그려봤더니(KS1)

다. 계획 실행 단계

1) 개인적 메타지식

학생들의 문제해결 과정은 여러 가지 문제해결 전략을 선택하여 사용하다 진전이 없으면 새로운 전략을 선택, 수정하기를 반복하며 진행한다. 이 과정을 거치면서 학생들은 자연스럽게 '현재 내가 알고 있는 것이 무엇인가'에 대한 자문을 하게 된다. 현재 알고 있는 정도를 인지한다는 것은 지금까지의 문제해결 과정을 진행한 후 현재 과제나, 전략, 해결해 놓은 절차에 대하여 현재 알고 있거나 모르는 것에 대하여 인지하는 것을 의미한다. 계획 실행 단계에서 자신의 인지상태에 대한 정확한 진단은 앞으로의 문제해결 방향을 설정하는데 중요한 역할을 한다.

C007 : 아직까지는 그냥 대각선을... 격자점에서 만들 수 있는 정사각형 개수는 아직 안 구했어요. 여기서는...(KP1)
B014 : 풀고 보니 활동 1과 같은 문제였어요. 더하는 범위만 달랐어요.(KP1)
A010 : 아~여기서는요, 3이 점이 아니라 선이였어요. 착각 했었어요.(KP1)

2) 배경지식의 활용

문제해결에 진전이 없으면 배경지식을 떠올려 문제해결을 시도하려 하는데, 배경지식을 동원하는 행위가 바로 '감시 활동'이다. 배경지식을 토대로 더 알아야 할 정보와 해결 방법에 대한 점검을 통해 현재 사용 중인 전략이나 인지 과정을 수정하거나 전환시키는 '유도 활동'이 일어난다. 학생 B의 경우, 배경지식은 다양한 일반화 전략과 수 감각으로 발현되어 성공적인 문제해결에 큰 역할을 하였다.

B010 : 네, 기억은 잘 안 나는데 예전에 내부 점의 개수를 이용해서 푼 문제가 있어 가지고... (확인 결과 Pick의 정리였음)(PM1)

B022 : 아니요. 경험에 의존해서요.(PM1)
B031 : 전에... 이런 문제를 풀어 봐서, 경험에 의존했어요.(PM1)
B040 : 하노이 탑 해결했던 기억이 났어요.(PM1)

3) 유도 활동, 감시 활동의 상호작용(메타인지적 조절)

계획 실행 단계에서는 자신들의 인지 활동을 대상으로 메타인지 수행적 영역의 상호작용이 많다. 모니터링은 메타인지의 핵심 성분으로 메타지식의 획득 및 활성화를 도우며, 인지적 활동에 대한 평가 및 조절 능력의 필수 조건으로 강조되고 있다(김수미, 1996). 학생들은 '감시 활동'으로 현재 자신들이 하고 있는 인지 활동의 과정이 올바른 방향으로 가고 있는지 지속적으로 점검하여 자신들의 활동 결과에 대한 확신을 얻고자 하며, '유도 활동'을 활성화시키기도 한다. 점검 과정에서 부적절한 전략이나 활동 방법이 발견되거나 의심이 들면 '유도 활동'이 유발되어 이전 단계로 되돌아가거나 수행 과정상에서 인지 활동을 수정한다. 이러한 과정을 메타인지적 조절(metacongnitive regulation) 또는 자기 조절 과정이라고 한다. 이 메타인지적 조절을 통해 문제해결을 올바른 방향으로 유도한다.

B033 : (4×4격자점까지 구하다가) 이렇게 하면 넓이가 다른 정사각형 종류를 다 생각해야 되잖아요? 넓이가 분수인 것도 있고... 범위가 작으면 규칙을 찾아보겠는데, 범위가 너무 커서 규칙을 찾을 수가 없었어요.(PM3)
B036 : (곰곰이 생각하며)(ET1/KP1)
B037 : 정사각형 총 개수는 바로 선 정사각형 개수와 기울어진 정사각형 개수의 합이기 때문에 두 종류로 나누어서 구했어요. 바로 선 정사각형 개수는 앞에서 구했기 때문에 기울어진 정사각형 개수만 구하면 돼요.(PG2)
B038 : (표 만듦)(KS1)
B039 : 기울어진 정사각형 개수는 격자점의 수(n)와 관련이 있었어요.(PG4)
T024 : 격자점 수하고? 어째서 그런 생각을 했지?
B040 : 하노이 탑 해결했던 기억이 났어요.(PM1)

위(학생 B의 예화)는 메타인지 조절을 통해 문제해결을 올바른 방향으로 유도하는 모습이다. 학생 B는 현재의 전략으로 문제해결에 진전이 없자 전략의 적절성을 점검하여(감시 활동) 부적절한 전략임을 알게 된다. 이전 단계로 되돌아가 자신의 인지 상태를 파악하고(개인적 메타지식) 하위 목표를 세우고 일반화 전략을 수정하여(유도 활동) 일반식을 구하는데 성공한다.

4) 정의적 영역

계획 실행 단계에서의 정의적 영역은 메타인지 지식적 영역을 촉진시키며 수행적 영역을 유발한다. 해결 과정 중에 드는 의구심은 현재 내가 알고 있는 정도와 자신의 인지 활동 과정을 점검하게 한다.

B015 : 바로 선 정사각형만 있는 게 아니라, 기울어진 정사각형하고 그게 또 커진 정사각형이 있기 때문에...(PG3)
T009 : 기울어진 정사각형이 빠졌다는 것은 어떻게 알았어?
B016 : 이것을 풀다가 격자점 2개일 때는 몰랐는데, 3개일 때부터는 대각으로도 정사각형이 만들어지더라고요. 안에...(PM2)

B017 : 구하긴 했는데, 일반식이 활동 1과 비슷해서 이상했어요.(EA1)

하지만 아래의 예화들처럼 성급한 태도라든가 수학적 오류 등과 같은 부정적 요소는 문제해결의 방향을 잃게 만들어 문제해결을 어렵게 하거나 문제해결을 실패하게 만든다.

C008 : (활동 1에서 구한 식을 그대로 씀)(EB2/ET2)
C015 : 음... 4×4겠죠?, 5×5 격자점인가?(EA2)
B026 : (6×6격자점에서 정사각형을 그리다가 복잡해서 포기하고) 200개와 5개가 더 생기니까 205개가 됐어요.(EB2)
B028 : 아니요. 생각했던 규칙이 나오지 않아 다른 방법으로 해결해야겠다고 생각했어요.(ET2)
B035 : 특별한 이유는 없는데, 격자판하고 헷갈렸나 봐요.(EB2)
A010 : 아~여기서는요, 3이 점이 아니라 선이였어요. 착각 했었어요.(KP1)

라. 반성 단계

1) 평가 활동, 조사 활동, 유도 활동의 상호작용

이 단계에서는 수행적 영역 중 '평가 활동'이 두드러지게 나타난다. 평가 활동은 주로 구한 일반식에 임의의 수를 대입하여 결과를 확인하는 형태로 나타난다. 검산의 결과가 예상과 맞지 않을 경우 '조사 활동'을 통해 오류의 원인을 색출하고 '유도 활동'을 거쳐 오류를 수정하는 과정을 거치게 된다. 과제에 대한 집중력이 이 과정을 반복 가능토록 한다. 이처럼'평가 활동'은 '조사 활동'과 '유도 활동' 행위를 동반한다.

B048 : (식에 7을 대입해 보며) 7×7 격자점에서는 197이 나와요.(PE1)
B049 : (표에서 귀납적으로 기울어진 정사각형의 개수를 파악하여 더해 본 후) 어? 196이 나오네. 뭐가 잘못 됐지?(PC2)
B050 : 아...마지막은 (n-2)니까 6이 아니라 5네요. 그럼 196이예요.(PG3)
T027: 식을 구했을 때 맞을 거라는 확신이 들었나?
B051 : 거의요. 그래서 맞는지 확인하려고 5와 7을 넣어 봤어요.(ET1)

2) 수업 소감문에 나타난 자기 수행 활동 평가

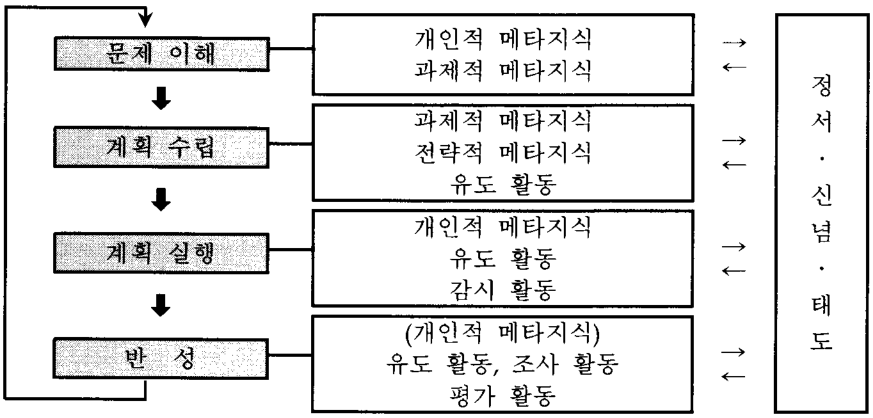
학생들의 수업 소감문에는 문제해결 과정에서의 아쉬웠던 점과 성취감 등의 자기 평가뿐만 아니라 과제에 대한 평가까지 적혀 있었다. 또한 이 과제를 바탕으로 발전적인 방향을 모색하는 평가 활동도 확인할 수 있었다. 학생 C의 경우는 짝수 격자점의 정사각형을 파악하지 못했기 때문에 격자점에서 정사각형 개수를 좀 더 쉽게 셀 수 있는 방법에 대해 알아보고 싶어 했고, 학생 B는 격자점으로 된 cube에서 정육면체 개수 구하기, 그리고 학생 A는 삼각형 격자점에서 정삼각형 개수 구하는 문제를 더 공부하고 싶다고 하였다. 특히 학생 A는 자신의 해결 방법 외에 좀 더 나은 해결 방법을 생각하는 반성 활동을 보였다.

3) 정의적 영역

이 단계에서 나타나는 수학적 오류나 선입견, 성급함 등의 정의적 영역의 부정적인 요소는 성공적인 문제해결의 걸림돌이 되었고(학생 C의 예화), 긍정적 요소, 특히 과제에 대한 집중은 문제해결을 포기하지 않고 계속 이어나갈 수 있는 힘을 제공하였다. 일반식으로 나타내려는 태도는 보다 명료한 일반식을 이끌어 내도록 하는데 큰 영향을 미쳤다(학생 B의 예화).

T013 : 다른 수는 대입해 보지 않았니?
C032 : 네.(ET2)
C033 : 그림을 그려보니 맞기에 다른 것도 다 맞을 거라 생각했어요.(EB2)
C034 : 간단하게 나타내 봐야겠다는 생각보단 일단 식을 쓸 때 뭔가 잘못돼서 식을 고치는 데 집중했던 것 같아요.(EB2)
B046 : 네 번째 시도처럼 하면 그렇겠지만, 이건 좀 달라요.(EA1)
T027: 식을 구했을 때 맞을 거라는 확신이 들었나?
B051 : 거의요. 그래서 맞는지 확인하려고 5와 7을 넣어 봤어요.(ET1)
T028 : 여덟 번째 시도는 식을 좀 더 간단히 나타내려 했네?
B052 : 네.(ET1)
B053 : 식을 간단히 나타내면 보기에도 좋고, 풀기에도 편하니까 간단히 나타내려 했어요..(EB1)

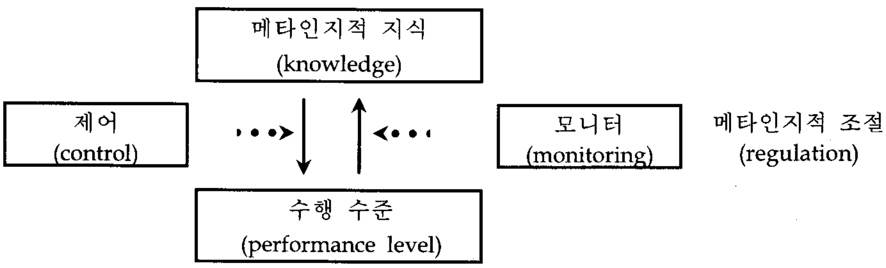
이상을 정리하여 문제해결 과정에서 나타나는 메타인지 요소를 도식화하면 [그림 7]과 같다.



[그림 7] 문제해결 과정에 나타난 메타인지 요소

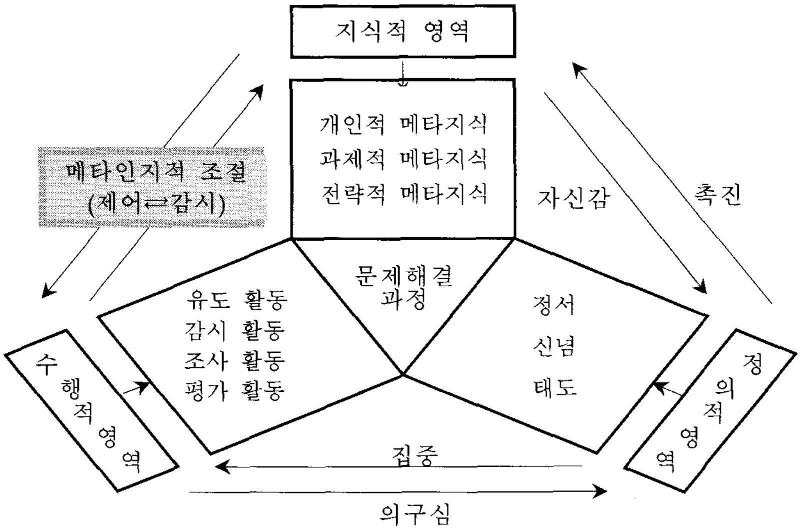
마. 문제해결 과정에 나타난 메타인지 영역 간의 상호작용

신혜은, 최경숙(2002)은 Nelson과 Narens(1994)의 모델을 변형하여 메타인지적 지식과 메타인지적 조절의 관계를 [그림 8]과 같이 나타내고, 메타 수준의 변화는 수행의 변화를 일으키고, 다시 수행의 변화는 메타지식 수준을 변화시키는 양방향적 관계에 있다고 한다(이은주, 2010: 47에서 재인용).



[그림 8] 메타인지적 지식과 메타인지적 조절의 관계

본 연구에서도 문제해결 과정에서 메타인지 영역 간의 상호작용을 발견할 수 있었다. 이를 정리 · 종합하여 메타인지 영역간의 상호작용 모델을 제시하면 [그림 9]와 같다.



[그림 9] 메타인지 영역간의 상호작용 모델

메타인지 지식적 영역은 구체적인 수행이 아니라 인지 전략의 주체인 자신과 대상인 문제, 그리고 전략에 대한 이해를 의미한다. 이러한 메타인지 지식적 영역은 학습자의 인지 활동과 메타인지적 수행에 대한 평가의 준거가 된다.

이에 반해 메타인지적 수행 영역은 인지 수행 과정에 직접적으로 관여하는 것으로, 인지 활동에 대하여 크게 두 가지 활동으로 나타난다. 하나는 '감시(monitoring) 활동'이고 또 다른 하나는 '제어(control) 활동'이다. 여기서 말하는 '감시 활동'은 현재 주체가 수행하는 인지 활동을 인식하고 메타인지적 지식과 연결하여 점검하는 행위를 말한다. 또한 '제어 활동'은 자신의 인지 활동에 대하여 점검한 결과를 메타인지적 지식에 맞추어서 자기의 인지 활동을 지시하고 그 후의 활동을 진행, 수정케 하는 등의 인지작용을 직접적으로 통제하는 기능이다(조재영, 1996). 이와 같은 감시 활동과 제어 활동의 상호작용을 메타인지적 조절(metacongnitive regulation)이라고 한다. 즉 능동적인 모니터링과 그 결과로서의 인지 과정의 제어가 조화로운 수행으로 나타난다.

메타인지적 조절은 메타인지 지식적 영역을 준거로 하여 일어나기 때문에 메타인지적 조절의 결과는 지식으로 축적되어 새로운 메타인지적 지식을 발생하게 되고, 다시 메타인지적 지식 변화는 수행 수준을 변화시키는 상호보완적 관계에 있다고 할 수 있다.

메타인지 정의적 영역은 지식적 영역과 수행적 영역이 나타날 때 함께 발생되는 정서적 반응으로 다른 두 영역 사이에서 교류하며 지식적 영역과 수행적 영역의 활동을 촉진하거나 감소시킨다.

학생 B의 예를 들어보면 자신의 수행능력에 대한 긍정적 평가는 자신감을 유발하였고, 자신감은 수행 활동에 집중하는 적극적인 태도로 나타났다. [그림 9]에서처럼 이것은 메타인지의 지식적 측면이 정의적 측면으로, 그리고 다시 수행적 측면으로 연쇄적으로 문제해결에 긍정적인 영향을 미치는 하나의 예라 할 수 있다. 또 다른 예로 해결 과정 중에 드는 의구심은 인지 전략의 주체인 자신과 대상인 문제, 그리고 전략에 대한 이해를 촉진시켜

메타인지적 지식 기반에 영향을 끼친다. 즉, 메타인지의 수행적 측면이 정의적 측면으로, 그리고 다시 지식적 측면으로 영향을 미치는 하나의 예라 볼 수 있다. 그리고 김수미(1996)는 이러한 관계는 순차적이고 일방향적인 작용만 존재하는 것이 아니라, 각 성분간의 무순차적이고, 양방향적인 작용 역시 생각할 수 있다고 한다.

3. 메타인지 요소가 문제해결의 성패에 미친 영향

1) 목표 도달에 실패한 경우(학생 C)

첫째, 메타인지 영역별로 보면 메타인지 지식적 영역(21.1%)에서 자신에 대한 인식 정도(10.5%)에 비해 비교적 과제(5.3%)와 전략(5.3%)에 대한 인식 정도는 낮지만, 전체적으로 비교해 보면 상대적으로 다른 두 학생(학생 B는 18.2%, 학생 A는 12.5%)보다 높다. 그래서 학생 C는 문제해결 과정 초기에 자신감을 보이며, 귀납적인 생각을 통해 '상황의 구조 인식' 전략을 사용하였다.

둘째, 수행 영역의 유도 활동(21.1%)이 활발하게 나타나고 있으나 감시 활동(13.1%)의 비율이 다른 두 학생(학생 B는 29.5%, 학생 A는 25%)에 비해 월등히 낮다. 자신의 인지 활동을 점검하는 횟수(4회)에 비해 배경지식을 활용한 점검(0회)과 전략의 적절성에 대한 점검(1회)의 횟수가 낮아서 빚어진 결과인데, 이는 자신의 문제해결 전략에 강한 확신을 가지고 있다는 의미와 함께 이로 인해 '홀수 격자점에서만 기울어진 정사각형이 생긴다.'라는 문제해결의 구조적 실수를 적시에 파악하지 못하여 잘못된 문제해결 활동이 지속되었다고 할 수 있다. 반성 단계에서 평가 활동(5.3%)을 보였지만 오류 확인 과정은 계산 결과 점검(1회)과 이전 활동 확인(1회)으로 그치고 문제해결 전과정을 돌아보는 평가 활동은 보이지 않았다. 자신이 구한 일반식에 대한 확신을 얻는데 초점을 두었던 것으로 그 결과, 보다 타당하고 명료한 일반식으로 발전시키지 못했다.

셋째, 정의적 영역은 계획 실행 단계(15.8%)와 반성 단계(10.5%)에 집중적으로 나타났다. 그리고 계획 이해 단계에는 긍정적 요소(5.2%)가 나타났지만, 실행 단계와 반성 단계에서는 부정적 요소가 전체 출현 비율의 21%나 차지할 만큼 많이 나타났다. 성급함, 수학적 오류, 그릇된 신념과 선입견으로 나타났는데, 이 부정적 요소들로 인해 문제해결의 구조적 실수를 끝까지 파악하지 못하여 문제해결 실패의 결과를 가져왔다.

2) 목표 도달에 성공한 경우(학생 B)

첫째, 메타인지 지식적 영역(18.2%)의 출현 비율이 문제해결에 실패한 학생 C(21.1%)보다 낮은 반면 전략적 메타지식(8.9%)은 다른 두 학생(학생 C는 5.3%, 학생 A는 0%)보다 높다. 이는 많은 문제해결 시도를 거치면서 자연스럽게 나타난 결과로 단순화의 생각, 그림 그리기, 표 만들기였다. 그리고 메타인지 지식적 영역의 비활성화는 이해 단계와 계획 단계를 반복하게 만들었다.

둘째, 학생 B는 수행 영역의 '감시 활동(29.5%)'이 학생 C(13.1%)보다 활발히 일어났다. 그 내용도 배경지식 활용(4회), 인지 활동 점검(5회), 전략의 적절성 점거(3회)로 골고루 나타났으며, 메타인지적 조절의 비율이 40.9%로 학생 C(21.1%)보다 월등히 높게 나타났다. 즉 학생 B의 일반화 전략 수준은 학생 C보다 낮았지만 실행 단계에서 지속적인 '감시 활동'과 '유도 활동'을 통해 문제해결 전략을 수정 · 발전시켜 나갔다. 해결 전략이 정교화되어 일반식을 구하였을 때는 자신의 수행 결과에 대해 강한 확신을 보였다.

<표 9> 학생 C, B, A의 문제해결 과정에서 나타나는 메타인지 요소의 출현 빈도

영역	구성 요소	코드	학생 C				출현 빈도(%)	학생 B				출현 빈도(%)	학생 A				출현 빈도(%)
			이해	계획	실행	반성		이해	계획	실행	반성		이해	계획	실행	반성	
지식적 영역(K)	개인적 메타지식(P)	KP1	1		1		4 (10.5)	1		1		3 (6.8)			1		1 (6.3)
		KP2	1			1					1						
	과제적 메타지식(T)	KT1	1				2 (5.3)				1	1 (2.3)					1 (6.3)
		KT2		1										1			
		KT3															
	전략적 메타지식(S)	KS1		2			2 (5.3)		4			4 (9.1)					0 (0)
	소 계		3	3	1	1	8 (21.1)	1	4	1	2	8 (18.2)	0	1	1	0	2 (12.5)
수행적 영역(P)	유도활동 (G)	PG1		3			8 (21.1)		2			9 (20.5)		1	1		3 (18.7)
		PG2			1					1							
		PG3			2					1					1		
		PG4			1	1				5							
	감시활동 (M)	PM1					5 (13.1)			4		13 (29.5)			1		4 (25)
		PM2			4					5					3		
		PM3			1				1	3							
	조사활동 (C)	PC1			1	1	3 (7.9)					2 (4.5)					1 (6.3)
		PC2				1					1						
		PC3						1								1	
	평가활동 (E)	PE1				2	2 (5.3)				2	2 (4.5)				2	2 (12.5)
		PE2															
		PE3															
	소 계		0	3	10	5	18 (47.4)	1	3	19	3	26 (59.1)	0	1	6	3	10 (62.5)
정의적 영역(E)	정서(A)	EA1	1		1		3 (7.9)			1	0	2 (4.5)				2	2 (12.5)
		EA2			*(1)*					*(1)*							
	신념(B)	EB1					5 (13.1)				1	3 (6.8)					1 (6.3)
		EB2			*(2)*	*(3)*				*(2)*					*(1)*		
	태도(T)	ET1	1		1		4 (10.5)	1		1	2	5 (11.5)				1	1 (6.3)
		ET2			*(1)*	*(1)*				*(1)*							
	소 계		2*(0)*	0*(0)*	2*(4)*	0*(4)*	12 (31.5)	1*(0)*	0*(0)*	2*(4)*	3*(0)*	10 (22.7)	0*(0)*	0*(0)*	0*(1)*	3*(0)*	4 (25)
문제해결 과정별 출현 빈도(%)			5 13.2	6 15.8	17 44.7	10 26.3	38 (100)	3 6.8	7 15.9	26 59.1	8 18.2	44 (100)	0 0	2 12.5	8 50	6 37.5	16 (100)

음영 가장 많은 출현 빈도를 보인 메타인지 요소

셋째, 학생 B의 정의적 영역은 실행 단계(13.6%)와 반성 단계(6.8%)에 집중되어 나타났다. 특히 학생 C의 문제해결의 실패 요인의 하나였던 정의적 영역 부정적 요소(9.1%)의 비율은 긍정적 요소(13.6%) 보다 낮게 나타났으며, 무엇보다 반성 단계에 나타난 정의적 영

역의 요소는 집중, 성의, 신념으로 모두 긍정적 요소였다.

3) 대학 부설 과학영재교육원 소속 학생 A

첫째, 학생 A는 통찰[5]을 통해 문제 상황의 구조를 파악하고 곧바로 실행 단계로 접어들려 하였기 때문에 문제 이해 단계에서 메타인지 지식적 영역(12.5%)의 출현 비율이 학생 C(21.1%)와 학생 B(18.2%)보다 낮게 나왔다. 이는 학생 A의 문제해결 과정에서도 가장 낮은 출현 비율로 반성 단계에서 '조사 활동'의 문제 다시 읽기로 이어졌으며 이로 인해 문제해결 과정이 길어졌다.

둘째, 수행적 영역의 '유도 활동'의 출현 비율이 학생 C(21.1%)와 학생 B(20.5%)에 비해 상대적으로 18.7%로 낮은 반면 '감시 활동'의 비율은 25%로 자신의 문제해결 과정에서 가장 높은 출현 비율을 보이고 있다. 즉 메타인지가 문제해결 과정 동안 계속적으로 문제 해결자에게 융화되어 나타났으며, 자신의 인지 과정을 사고하고 점검했음을 의미한다.

셋째, 정의적 영역은 실행 단계(6.3%)와 반성 단계(18.8%)에 나타났으며 반성 단계에 나타난 정의적 영역의 메타인지 요소는 의구심[6] 확신, 집중으로 모두 긍정적 요소(18.8%)로 세 학생(학생 C 10.5%, 학생 A13.6%) 중 출현 비율이 가장 높았고, 실행 단계에 나타난 부정적 요소는 6.2%로 세 학생(학생 C 21%, 학생 A 9.1%) 중 가장 낮은 출현 비율을 보였다.

<표 10> 학생별 문제해결의 성패에 영향을 미친 메타인지 요소

학생 / 요인	학생 C	학생 B	학생 A
문제해결 성공 여부	실패	성공	성공
문제해결 과정 길이(시도 횟수)	5회	8회	2회
문제해결의 장애 요인으로 작용	• 감시 활동의 부실 • 반성 단계에서 정의적 영역의 부정적 요소 (성급함, 수학적 오류, 그릇된 신념과 선입견)	• 문제 이해 단계에서 메타인지 지식적 영역의 비활성화로 비효율적인 문제해결	• 문제 이해 단계에서 메타인지 지식적 영역의 비활성화
문제해결의 핵심 요인으로 작용	• 메타인지 지식 영역의 활성화 • 문제해결 과정 초기의 자신감	• 풍부한 배경 지식을 바탕으로 한 메타인지 조절 수행 • 과제 집착력 • 반성 단계에서 정의적 영역의 긍정적 요소 (집중, 성의, 신념)	• 메타인지 조절 • 반성 단계에서 정의적 영역의 긍정적 요소 (의구심, 확신, 집중)

5) '통찰(insight)'은 공공연한 시행착오의 시험 행동 없이 일어나는 즉각적이고 분명한 지각이나 이해를 말하는 것으로 '직관(intuition)'과는 다르다. Schoenfeld는 직관을 신념과 같은 개인이 소유하고 있는 수학적 세계관으로 보았고, Shaughnessy(1985)는 문제해결에 실패하는 원인 중의 하나로 '직관적 발견술에 의지함으로써 야기되는 개념상의 오류'로 보고 있다. 즉, 직관적 판단은 선행 지식의 유용성과 성공을 경험함으로써 형성되어, 이후에 이와 맞지 않는 새로운 사실이 제시되더라도 수용하기를 거부한다. 이러한 현상은 Brousseau(1997)가 말하는 '인식론적 장애'와 상통한다(이대현, 이봉주, 2002). 통찰과 직관의 혼동은 이들의 모호한 개념으로 이에 대한 분석적 연구가 필요하다고 생각된다.

6) 본 연구에서는 '확신이 상실된 불안함이 아닌 이유를 밝히고자하는 마음'으로 사용하였음.

V. 결 론

1. 영재교육기관 유형별 초등 수학 영재들의 문제해결 과정

첫째, 문제해결 과정에서 학생들은 문제해결을 위한 일반화 전략은 공통적으로 사용할 수 있지만 실제적인 인식 방법은 개인의 사고 양식에 따라 다르게 나타난다. 학생 B는 배경지식을 토대로 '복합 관계 인식' 전략을 사용한 반면 학생 C와 A는 '상황의 구조 인식' 전략을 사용하였다. 하지만 학생 C는 몇 가지 사례를 그림으로 그려보는 귀납적인 생각을 통해, 학생 A는 통찰에 의한 '상황의 구조 인식' 전략을 사용한 차이를 보였다.

둘째, 학생들이 표현한 일반식에는 그들이 핵심적으로 인식한 일반화 전략이 드러난다. 학생 C와 학생 A는 '상황의 구조 인식' 전략을 사용하여 기울어진 정사각형과 바로 선 정사각형의 구조적 관계에 주목했기 때문에 구한 일반식이 왜 이렇게 형성되었는지, 무엇을 의미하는지 설명할 수 있었지만, 학생 B는 각 단계의 내부점 개수(독립변인의 변화량)와 기울어진 정사각형의 개수(종속변인의 변화량)라는 두 양 사이의 수치적 관계에 초점을 두었기 때문에 구한 일반식이 무엇을 의미하는지는 설명할 수 없었다.

셋째, 학생들의 일반식 표현 양식과 수준에는 그들의 배경지식이 반영된다. 학생 C는 보다 명료한 일반식으로 나타낼 것을 요구받고도 제곱식 전개에 대한 배경지식이 없어 시도조차 하지 못했고, 학생 B는 명료한 식이 편리하다는 신념과 여덟 번의 문제해결을 시도할 만큼 과제 집착력을 가지고 있음에도 불구하고 역시 배경지식의 부재로 일반식을 명료하게 나타내지 못하였다. 그 결과 학생 C와 학생 B의 최종 일반식은 '(정사각형의 개수)=(바로 선 정사각형 개수)+(기울어진 정사각형 개수)'라는 최초의 문제해결 계획이 그대로 일반식 표현 양식으로 나타난 반면 학생 A는 배경지식을 이용하여 일반식을 보다 명료하게 나타낼 수 있었다.

2. 문제해결 과정에 나타난 메타인지 요소별 분석과 요소간의 상호작용

첫째, 문제 이해 단계에서는 메타인지의 지식적 영역 중 '개인적 메타지식'과 '과제적 메타지식'이 나타난다. 문제에 대한 자신의 인지 상태와 수행능력을 파악하면서 '개인적 메타지식'이 나타나고, 제시된 문제를 해석하는 과정에서 '과제적 메타지식'이 발현된다. 자신의 수행능력에 대한 긍정적 평가는 해결 의지를 강하게 만들고, 생소한 문제에 대한 불안감을 떨쳐버려 적극적인 태도와 자신감을 갖도록 한다. 이를 바탕으로 한 성공 경험은 자신의 수행능력을 긍정적으로 인지하게 하므로 '개인적 메타지식'과 정의적 영역이 서로 영향을 주고받으며 상호작용한다고 분석할 수 있다. 또한 문제의 정확한 해석은 해결 전략 선택에 영향을 주며, 해결 전략에 따라 수행 수준은 다르게 나타난다. 이는 같은 영역 내에서도 서로 영향을 주고받으며 지식적 영역과 수행적 영역 사이에서도 상호작용이 있음으로 분석된다.

둘째, 계획 수립 단계에서는 지식적 영역의 '과제적 메타지식', '전략적 메타지식'이 나타나며, 수행적 영역의 '유도 활동'이 나타난다. 주어진 문제의 목표와 난이도를 파악하는 과정에서 '과제적 메타지식'이 나타난다. 또한 문제가 요구하는 목표에 도달하기 위해 문제해결 전략 사용에 관한 '전략적 메타지식'이 발현된다. 그리고 수행적 영역의 '유도 활동'으로 적절한 활동 방법과 전략을 선택하여 해결 활동의 순서나 계획을 수립한다. 계획 실

행 단계에서 전략의 적절성에 대한 점검이 지속적으로 이루어지면서 전략 수정이 요구되면 다시 계획 수립 단계로 되돌아와 더 나은 문제해결 전략을 찾으려고 한다. 이 단계의 정의적 영역은 전략의 적절성 점검 과정을 거치면서 전략 사용에 있어 확신과 자신감으로 나타나며 자신의 문제해결에 책임감을 가지게 된다.

셋째, 계획 실행 단계에서는 메타인지 모든 영역의 구성 요소가 종합적으로 나타나 활발하게 상호작용한다. '감시 활동'은 계획을 실행하는 동안 지속적으로 현재 인지 활동의 진행 상황을 점검하며 만약 오류가 발견 되거나 의심이 들 경우 '유도 활동'을 통해 전략 수정이나 해결 방향 전환으로 문제해결을 올바른 방향으로 유도한다. 특히 배경지식을 토대로 더 알아야 할 정보와 해결 방법에 대한 점검을 통해 현재 사용 중인 전략이나 인지 과정을 수정하거나 전환시키는 '유도 활동'이 일어난다. 이 단계에 나타난 '개인적 메타지식'은 자신의 인지상태를 진단하여 앞으로의 문제해결 방향 설정에 중요한 역할을 한다.

넷째, 반성 단계에서도 수행적 영역이 집중되어 나타나며 '평가 활동'은 '조사 활동'과 '유도 활동'을 동반한다. 최종 결과에 대한 평가는 주로 구한 일반식에 임의의 수를 대입하여 확인하는 형태로 나타났다. 검산의 결과가 예상과 맞지 않을 경우 '조사 활동'을 통해 오류의 원인을 색출하고 '유도 활동'을 거쳐 오류를 수정하는 과정을 거치게 된다. 문제해결의 모든 과정이 끝나고 쓴 수업 소감문에서는 자신의 수행활동에 대한 평가와 새로운 문제로의 전이 가능성 모색을 확인할 수 있었다. 특히 정의적 영역의 긍정적 요소는 문제해결 종료 시까지 문제에 대한 집중력을 잃지 않게 하여 성공적인 문제해결에 이르도록 한다.

다섯째, 문제해결 과정의 각 단계마다 유발되는 메타인지 요소가 있다. 이것은 문제해결력 신장을 위한 메타인지 전략 훈련이나 메타인지를 촉진시키는 발문기법이나 메타인지 요소간의 상호작용을 고려한 수업 설계에 시사점을 줄 수 있음을 의미한다.

여섯째, 메타인지 지식적 영역이 먼저 나타나고 수행적 영역이 따라온다. 이것은 지식적 영역이 활성화되지 않으면 메타지식들이 서로 연결되지 못하여 수행적 영역의 활동은 단순하고 제한적이어서 비효율적인 문제해결 과정을 반복하게 될 것이다. 또한 정의적 영역은 문제해결의 전과정에서 두 영역과 서로 교류하며 지식적, 정의적 영역의 활동을 촉진하거나 감소시킨다. 이는 세 영역이 서로 영향을 주고받음을 의미한다.

일곱째, 문제 이해 단계에서 '개인적 메타지식'과 '과제적 메타지식'이 나타나는데, 이는 문제해결의 주체인 자신과 문제에 대한 이해가 없으면 효과적인 수행이 일어나지 않게 되어 성공적인 문제 해결을 보장할 수 없음을 의미한다. 따라서 문제해결 전략과 방법에만 초점을 둘 것이 아니라, 자신과 문제에 대한 근본적인 이해도 필요하다.

여덟째, 메타인지 수행적 영역의 '감시 활동'과 '유도(제어) 활동'의 상호작용을 메타인지적 조절(metacognitive regulation)이라고 한다. 이 메타인지적 조절은 지식적 영역을 준거로 하기 때문에 메타인지적 조절의 결과는 지식으로 축적되어 새로운 메타인지적 지식을 발생하게 되고, 다시 메타인지적 지식 변화는 수행 수준을 변화시키는 상호보완적 관계에 있다고 할 수 있다.

3. 메타인지 요소가 문제해결의 성패에 미친 영향

첫째, 메타인지 지식적 영역의 활성화는 성공적인 문제해결에 있어 결정적이다. 학생들은 문제해결 과정에서 자신들이 가지고 있는 다양한 지식들을 총동원한다. 이것들이 복합적으로 연결되어 문제해결에 이용되기 위해서는 문제해결의 주체인 자신과 문제의 의미,

전략에 대한 이해가 선행되어야 한다. 또한 메타인지적 조절은 지식적 영역을 준거로 하기 때문에 지식적 영역이 뒷받침 되지 않은 메타인지적 조절은 상호작용에 결함을 보여 수행 수준의 변화는 미비할 수밖에 없다. 즉, 메타인지적 지식은 과제를 직접 수행하는 것은 아니지만, 문제해결의 수행 수준을 결정하는 중요한 요인이라 할 수 있다.

둘째, 수행적 영역의 메타인지적 조절은 유용한 해결 전략을 생성하고 선별하여 문제해결을 올바른 방향으로 유도한다. 학생 B는 학생 C보다 일반화 전략 수준은 낮았지만 문제해결에 성공할 수 있었던 이유는 메타인지적 조절을 통해 일반화 전략을 점검 · 수정하면서 정교화 시켰기 때문이다. 또한 문제해결에 성공한 경우라 하더라도 메타인지적 조절 수준에 따라 문제해결 과정의 길이에는 차이를 보인다. 메타인지적 조절 수준이 높은 학생 A는 필요한 전략을 산출하는 능력이 뛰어나고 적시적소에 활용하는 능력이 높은 반면, 메타인지적 조절 수준이 상대적으로 낮은 학생 B는 문제해결에 필요한 전략이 나오기까지 여러 가지 불필요한 전략을 사용하여 많은 시행착오를 거쳤다. 따라서 메타인지적 조절은 과제 수행뿐만 아니라, 학습된 전략을 새로운 과제와 상황에 일반화하도록 돕는데 중요한 변인이라 할 수 있다.

셋째, 정의적 영역은 문제해결에 추진력을 불어넣고, 문제해결 수행 활동에도 결정적 영향을 준다. 특히 문제해결에 성공한 학생들은 반성 단계에서의 집중, 성의, 확신, 올바른 신념 등의 긍정적 요소를 바탕으로 자신의 해결 과정과 결과가 옳음을 다시 한 번 확인하였다. 신념은 문제를 접근하는 방법을 선택하게 하며 어떤 기술을 사용할 지 그만 둘지, 어느 정도의 시간을 책정할지, 얼마의 노력을 쏟을지를 결정하게 한다. 수학에 대한 그릇된 신념은 학생의 수학적 행동에 나쁜 영향을 줄 수 있다. 이것은 신념과 직관이 자각, 자기 통제 등과 마찬가지로 학생의 수학적 행동의 중요한 결정자임을 뜻한다.

이상의 결과는 문제해결의 성패에 메타인지가 미치는 영향에 대한 Shaughnessy(1985)와 Lester(1982)의 주장과 일치한다. Shaughnessy(1985)는 학생들이 문제해결에 실패하는 원인을 여덟 가지를 제시하고 있는데 문제해결 활동에서 오류적 결과를 낳는 원인 중 메타인지와 관련된 요인으로 ①실행적 조절 능력 ②확신 체계(문제해결자가 수학의 본질에 대해 갖고 있는 확신이나 신념)를 말하고 있다. 또한 Lester(1982)는 성공적인 수학문제해결 활동을 위하여 다섯 가지의 조건을 제시하고 있다. 그 중 ①문제해결 과정의 Episode 도중에, 그리고 Episode의 전후에 전개되고 있는 자기 자신의 인지에 대하여 알고 있는 정도, ②문제해결 과정에 대한 실행적 조절(즉, 모니터하거나 정리하는 인지 활동)을 지속할 수 있는 능력은 메타인지에 해당하는 것으로 Lester(1982)도 수학문제해결의 성공적인 수행을 위해서는 메타인지적인 능력이 필요함을 지적하고 있다(백석윤, 1992: 39에서 재인용). 본 연구의 결과는 Shaughnessy(1985)와 Lester(1982)의 연구 결과를 뒷받침해 주며, 본 연구는 메타인지에 관한 구체적이고 실증적인 사례의 증거를 확보하였다는 데 큰 의미가 있다.

참 고 문 헌

김민정 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김수미 (1996). 메타인지 개념의 수학적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김양권, 송상헌 (2010). 초등 수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수.학습 자료 개발 절차와 방법에 관한 연구. 한국초등수학교육학회지, 14(3), 745-768.

노수영 (2004). 수학 문제해결 과정에 나타난 메타인지 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박은정 (2006). 능력별 집단에 따른 수학영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

백명숙, 신항균 (2007). 메타문제의 적용이 초등학생의 수학 학습에 미치는 효과. 한국초등수학교육학회지, 11(1), 43-59.

백석윤 (1992). 수학 문제해결 과정의 '순수인지외적 분석'. 대한수학교육학회 논문집, 2(2), 35-52.

양혜주 (2007). 문제중심학습의 수업과정에서 나타나는 메타인지 유형 분석-초등학교 5학년 과학 수업을 중심으로-. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이대현, 이봉주 (2002). 수학 문제해결 과정에서의 직관과 메타인지. 대한수학교육학회 논문집, 12, 265-273.

이은주 (2010). 메타인지를 활용한 직접적 탐구기능 수업전략에 대한 연구. 이화여자대학교 교육대학원 박사학위논문.

조재영 (1996). 수학 교수활동 과정에서 학생의 메타인지 능력 신장 방안 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

한국교육개발원 (2004). 영재 심화 교수-학습교육자료 중등 1학년 수학. 수탁연구 RM 2004-4-14.

Brown, A. N. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp.65-116). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring : A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist, 34*, 906-911.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163-175.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some under represented themes and needed direction. In E. A. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple reach perspectives* (pp.56-58). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

<Abstract>

A Case Study on the Metacognition of Mathematically Gifted Elementary Students in Problem-Solving Process

Han, Sang Wook[7]; & Song, Sang Hun[8]

The purpose of this study was to examine the metacognition of mathematically gifted students in the problem-solving process of the given task in a bid to give some significant suggestions on the improvement of their problem-solving skills. The given task was to count the number of regular squares at the n×n geoboard.

The subjects in this study were three mathematically gifted elementary students who were respectively selected from three leading gifted education institutions in our country: a community gifted class, a gifted education institution attached to the Office of Education and a university-affiliated science gifted education institution. The students who were selected from the first, second and third institutions were hereinafter called student C, student B and student A respectively. While they received three-hour instruction, a participant observation was made by this researcher, and the instruction was videotaped. The participant observation record, videotape and their worksheets were analyzed, and they were interviewed after the instruction to make a qualitative case study. The findings of the study were as follows:

First, the students made use of different generalization strategies when they solved the given problem.

Second, there were specific metacognitive elements in each stage of their problem-solving process.

Third, there was a mutually influential interaction among every area of metacognition in the problem-solving process.

Fourth, which metacognitive components impacted on their success or failure of problem solving was ascertained.

Keywords: mathematically gifted students, problem-solving, metacognition, geoboard

논문접수: 2011. 07. 12
논문심사: 2011. 07. 16
게재확정: 2011. 08. 09

7) dokkeaby@hanmail.net
8) song2343@hanmail.net