

각기둥의 정의 만들기에 관한 지도 사례 연구 -초등학교 5학년을 대상으로-

조영미¹⁾ · 박하나²⁾

이 연구에서는 각기둥의 정의 만들기 활동을 위한 학생용 활동지를 개발하여 초등학교 5학년 학생들에게 실행하고 그 결과를 분석하였다. 정의 만들기 수업에서 핵심은, 학습지에 차례로 제시되는 비(非) 예들이 포함되지 않도록 기존의 정의를 수정하여 새로운 정의를 만드는 것이었다. 연구 결과로, 학생들이 각기둥의 성질을 어떻게 인식하며, 비(非) 예를 제거하는 과정에서 각기둥의 정의에 사용되는 성질들로 무엇이 부각되는지를 알 수 있었다. 더불어 정의 만들기 활동을 통한 학생들의 수학적 정의에 대한 인식의 변화를 확인할 수 있었다.

[주제어] 정의 만들기, 각기둥, 정례, 비(非) 예

I. 서론

초등학교 수학교과서에서는 많은 용어들이 등장한다. 학생들은 주어진 용어의 뜻을 고쳐진 것으로 받아들이며, 대부분의 교사 역시 그런 입장에서 정의를 지도한다. 학생과 교사 모두 용어의 뜻은 주어진 그대로 이해하고 외워야 할 대상으로 여기는 경향이 있다.

그런데 수학에서 용어의 뜻은 상황과 맥락에 따라 변화할 수 있다. 대표적인 예로 Lakatos의 괴물 배제법을 통한 정의의 수정 과정을 들 수 있다. Lakatos에 따르면, 초기에 수학자는 다면체를 '표면이 다각형인 면으로 둘러싸인 입체도형'으로 정의하고, 이 정의에 해당하는 다면체를 대상으로 하여 다면체 정리를 유도해 낸다. 이때의 정의는 상당히 소박하며 직관적인 것이다. 그런데, 이 정의에 합당하면서도 '다면체의 정리'를 만족시키지 않는 '괴물' 다면체가 등장한다. 수학자는 이러한 상황에서 다양한 반응을 보이는데, 그 중 하나인 반응이 다면체의 정의를 수정하는 것이다. '괴물' 다면체를 포함하지 않도록 다면체의 정의를 수정하여 첫 번째 개량된 정의는 '다면체란 다각형 체계로 이루어진 곡면'이다. 하지만, 계속적으로 새로운 정의에 대해 '괴물' 다면체가 등장하고, 수학자들은 정의를 그것을 배제하도록 수정해 간다. 이러한 과정은 다면체의 정의를 수정해 감으로써 다면체의 예인 것과 예가 아닌 것의 구분을 명확히 하려는 수학자들의 노력을 보여준다(조영미, 2001

1) [제1저자] 공주교육대학교 수학교육과

2) [교신저자] 대전 가오초등학교

재인용).

그동안 국내에서 정의에 관련된 연구가 종종 수행되었는데, 대부분이 학교수학에 제시된 정의들을 일정한 기준에 따라 분석하고 분류하거나, 학교 수학 정의의 주된 특징을 고찰한 내용들이었다(조영미, 2000, 2002; 조영미, 강홍규, 2002; 신해현, 2002; 권유미, 안병곤 2005; 고진아 2009). 한편 고은성 외는 '수학영재들의 정다면체 정의 구성 활동 분석'(2008)을 수행하였는데, 이는 이 논문의 핵심 주제인 '정의 만들기 활동'을 소재로 삼은 것으로 영재 학생들을 대상으로 수행되었다.

'수학적 맥락이나 상황, 또는 의도에 따라 정의는 바뀔 수 있다.'는 점을 일반 초등학생의는 가르칠 수 있을까? 가르칠 수 있다면 어떻게 지도할 수 있을까? 그러한 질문들이 이 논문의 근본 문제의식이었다.

연구자는 정의를 만드는 수업을 구현하기 위한 소재로 각기둥을 택하였다. 이 도형은 정례에 해당하는 예와 비(非) 예에 해당하는 예가 비교적 명확하여, 초등학생들도 비(非) 예를 제거하기 위해 정의를 만들어 가는 경험을 하기에 적당할 것으로 보았다.

우리나라 도형 교육에서는 지금까지 각기둥을 지도할 때, 그 정의를 미리 알려주고 정의에 비추어 정례와 비(非) 예를 판별하고 도형의 구성요소를 알아보는 것을 중심으로 하였다. 그런데, 이 논문에서는 정의를 제시해 주기 보다는, 도형의 성질 탐색을 통하여 미숙한대로 학생들이 스스로 정의를 만들고, 교사가 제시한 비(非) 예들을 제거하는 과정에서 그 정의를 수정해 보는 과정을 수업으로 구현하였다. 각기둥의 정의를 만들고 다듬어가는 수업에서 학생들이 어떻게 반응하는지를 상세히 분석하여, 그러한 수업이 가능한지 여부와, 어떤 식으로 진행할 수 있는지를 알아보았다.

II. 이론적 배경

1. 정의 만들기 활동의 의미

Borasi는 『탐구를 통한 수학 학습』에서 전통적 수학교육관을 기성의 결과를 곧장 전달하는 것으로 간주하고 그 대안으로 인간적 탐구로서의 수학교육을 주장하면서, 그 주장에 해당하는 수업으로 수학의 정의 만들기를 제시하였다(조영미, 2001 재인용). 그가 제안한 정의 만들기 지도 내용을 요약하면, 첫째, 수학적 정의의 고유한 특징을 인식하는 것, 둘째, 수학에서 정의가 지닌 다양한 역할과 용도를 인식하는 것이다. 이를 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫 번째 수업에서는 흔히 수학적 정의가 갖추어야 할 조건으로 간주되는 항목을 학생들이 알아가는 것을 주된 내용으로 하였다. 교사는 원을 수학적으로 부적절하게 정의한 사례를 제공하고, 학생들은 그 정의가 지닌 부적절한 점을 지적하고 수정하였다. 예를 들면, 학생들은 '원은 오렌지나 동전, 지구의처럼 둥근 것'과 같은 정의가 수학적으로 어떤 점에서 부족하며, 어떤 식으로 수정할 수 있는지를 생각하였다. 이 수업을 통하여 학생들은 수학적 정의가 갖추어야 할 조건을 인식하게 된다.

두 번째 수업에서는 수학적 정의 역시 맥락, 가치 등에 따라 변화하는, 역동성을 지니고 있음을 인식시키고자 하였다. 그러한 의도 아래 다음과 같이 진행하였다. 다각형은 '여러 개의 직선으로 둘러싸인 도형'으로 정의할 수 있다. 이는 다각형에 대한 직관적인 정의이다. 한편, 다각형은 '내각의 합은 $180^\circ \times (n-2)$ (P)라는 성질을 만족한다. 이 때, 이 다각형의

정의를 만족하면서 성질(P)를 만족하지 않는 반례를 등장시킨다. 학생들은 정의를 수정하게 된다. 이를테면, '가로지르지 않는 선분들로 둘러싸인 도형을 다각형이라고 한다.'와 같은 식이다. 만약 다른 반례를 제시하였다면 정의는 다른 식으로 바뀌게 될 것이다. 이는 Lakatos가 '증명과 반박'에서 보여준, 괴물 배제법에서 힌트를 얻어 구성한 수업이다.

이러한 수업을 통하여 Borasi는 수학적 정의는 처음부터 완벽하게 주어진 것이 아니라, 수학자들의 요구에 따라 재구성된 것임을 알려주고, 또한 수학자들은 수학적 정의를 임의대로 만드는 것이 아니라, 수학적 상황이 지닌 특성을 연구하는 데 유용한 도구가 될 수 있도록 정의를 조정해 가는 것임을 알려주고자 한 것이다.

2. 각기둥의 정의

국립국어원(<http://stdweb2.korean.go.kr>)에서 제공하는 국어사전에서는 각기둥을 '옆면은 한 직선에 평행하는 세 개 이상의 평면으로, 밑면은 이 직선과 만나는 두 개의 평행한 평면으로 둘러싸인 다면체'로 정의하고 있다.

박교식(2004)에 따르면, '각기둥'은 한자 角柱(각주)에서 角을 음역하고, 柱를 '기둥'으로 번역한 것이다. 각기둥에는 '각진 기둥'의 뜻이 있다. 위와 아래 면의 모양이 서로 평행하고 합동인 다각형으로 되어 있는 입체도형이 각기둥이다. 각기둥은 밑면의 모양에 따라 '삼각기둥, 사각기둥, 오각기둥' 등으로 구분된다. 각기둥을 영어로는 prism이라고 한다. prism은 '툽질되어진 어떤 것'을 의미하는 그리스어 prisma에서 온 것이다. 고대에 그러한 것을 나무를 잘라 만들었기 때문에 그런 이름이 붙은 것이다.

강지형 외(1999)는 각기둥을 '평면 위의 다각형을, 그 평면을 지나는 한 선분에 따라 평행 이동하였을 때 만들어지는 입체도형'으로 정의한다. 이 때 원래의 평면도형을 각기둥의 밑면이라 하고, 선분을 그 기둥의 모선, 모선에 따라 이동하면서 생긴 면을 그 기둥의 옆면이라고 한다. 특히, 각기둥의 모선이 밑면과 수직일 때, 이 기둥을 각각 직각기둥이라 하고, 수직이 아니면 빗각기둥이라고 한다. 초등수학에서는 주로 직각기둥을 취급하고 이를 간단히 각기둥이라고 한다.

지금까지 살펴본 것과 같이, 각기둥의 언어적 정의는 다양하다. 이는 각기둥을 바라보는 관점이나 부각시키려는 성질에서 차이가 나기 때문이라고 볼 수 있다. 이 논문에서는 학생들이 각기둥의 정의를 만드는 과정에서 어떤 성질에 주목하는지를 알아보게 될 것이다.

3. 교과서에 제시된 각기둥 지도 내용 분석³⁾

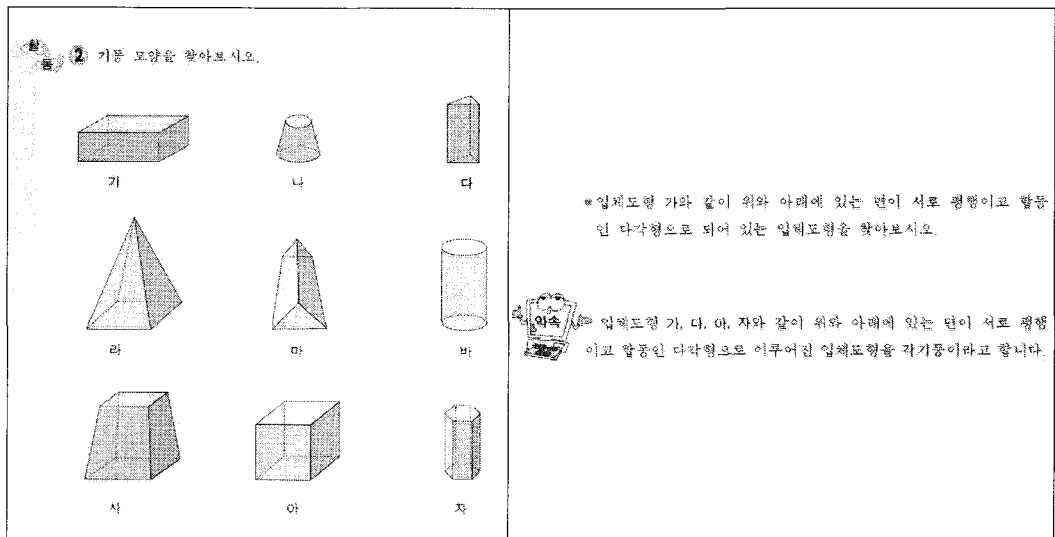
[그림 1]의 <활동 2>에서 '기둥 모양'을 찾도록 하면서 제시한 예들을 보면, 각기둥의 정례는 4개, 비(非) 예는 5개이다. 정례로 제시된 각기둥을 보면, 직육면체, 삼각기둥, 정육면체, 육각기둥으로, 반듯하게 서 있는 형태이다. 던즈의 수학적 다양성의 원리를 고려하면, 각기둥이면서 엷어져 있는 경우나 비스듬히 기울어져 있는 경우들도 더 다룰 수 있을 것이다. 비(非) 예로 제시된 입체도형을 보면, 위의 면과 아래의 면이 합동이 아닌 예(나, 마, 사), 면이 다각형이 아닌 예(나, 바), 윗면이 없는 예(라) 등이 제시되어 있다. 윗면과 아랫면이 평행이 아닌 예, 윗면과 옆면이 수직이 아닌 예, 입체도형이 아닌 예 등의 비(非) 예를 추가로 더 제시할 수 있을 것이다.

일반적으로 개념은 대상 자체가 갖는 내포 개념과 다른 대상과의 관련성을 의미하는 외

3) 이 논문을 위한 실험이 2009년에 이루어졌기 때문에 교과서 참조는 7차를 기준으로 하였다.

연개념으로 분류할 수 있다. 따라서 하나의 개념이 제대로 정착되기 위해서는 그 개념의 속성이 내포된 정례와 더불어 속성이 내포되어 있지 않은 비(非) 예도 충분히 경험할 필요가 있다. 특히 도형 개념 형성의 초보 단계라 할 수 있는 초등학생들에게는 예와 비(非) 예의 다양한 경험이 요구된다. 개념을 전달하는 방법에는 범례 제시 방법과 설명 정의 방법이 있다. Skemp에 의하면 이 두 가지 방법 중에 어느 것이 더 효과적인가의 문제는 이해해야 할 새로운 개념이 학습자의 기존 도식과 어떤 관계에 있는가에 달려있다(김수미, 정은숙, 2005).

교과서에서는 각기둥의 정례와 비(非) 예를 보여준 후에, 각기둥의 성질들을 여러 가지로 알아보는 단계가 설정되어 있지 않다. 대신 정의 문장에 쓰일 성질에만 주목하도록 하였다. 그 성질은 세 가지로, '위와 아래에 있는 면이 평행', '위와 아래에 있는 면이 합동', '위와 아래에 있는 면이 다각형'이다. 각기둥이 지닌 또 다른 성질, 예컨대, '옆면이 직사각형' 또는 '밑면과 옆면이 수직' 등은 명시적으로 다루고 있지 않다. 이 논문에서는 교과서에서 명시적으로 다루고 있는 성질들은 물론 다루지 않는 성질도 포함하여 학생들의 반응을 살펴볼 것이다.4)



[그림 1] 각기둥의 정의

III. 각기둥의 정의 만들기 지도의 실례

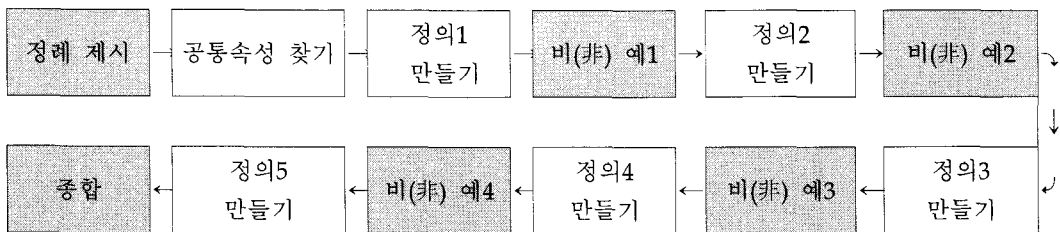
1. 학생용 활동지 구성의 주요 특징

이 논문에서는 각기둥의 예와 반례를 보면서 학생이 직접 각기둥의 정의를 수정하는 것을 목표로 하였다. 이를 위한 학생용 활동지에서는, 먼저 학생들은 제시된 각기둥의 정례들을 보고 각기둥의 성질들을 찾아보았다. 다음으로, 학생들은 각자 각기둥의 <정의 1>을

4) 각기둥을 직각기둥과 비직각기둥으로 나눌 때 우리나라 교과서에서는 각기둥의 예로 직각기둥만을 다루고 있다. 이 논문에서 말하는 각기둥은 엄밀히 말해 직각기둥임을 밝혀둔다.

만들어보았다. 이 <정의 1>은 수학적으로 느슨하고 엄밀하지 않을 것으로 예상하였다. 그 다음으로, 각기둥의 '비(非) 예 1'을 보고 각기둥 여부를 판단하며 자신이 처음에 만든 <정의 1>이 '비(非) 예 1'을 포함하지 않도록 수정하여 <정의 2>를 만들도록 하였다. 같은 방식으로 '비(非) 예 4'까지 진행하고 최종적으로 <정의 5>를 얻었다. 이 과정에서 학생들이 각기둥의 어떤 성질에 주목하는지 살펴보았다. 더불어, 학생들이 정의에 관해 갖고 있던 기존 인식과 이 수업을 받은 후 갖게 된 인식의 변화를 살펴보았다.

한편 이 활동지를 구성하면서 연구자가 추가적으로 생각한 의도는 다음과 같았다. 첫째, 학생들이 스스로 정의를 만들고 수정해 갈 수 있는지를 알아보기 위해 교사의 개입은 최소로 하였다. 둘째, 비(非) 예를 학생들이 스스로 생각해내게 하는 방법도 있겠지만, 그렇게 하지 않고 교사가 제시하는 방식으로 구성하였다. 5학년인 학생들이 각기둥의 비(非) 예이든 정례이든지 간에 입체도형을 자유롭게, 제대로, 원활하게 그림으로 그리는 데는 현실적으로 어려움이 있다고 보았기 때문이다. 셋째, 5학년 말에 수업을 진행함으로써, 6학년 학기 초에 이루어지는 '각기둥'의 수업 시기와 아주 동떨어지지 않으려고 하였다.



[그림 2] 수업의 주요 흐름

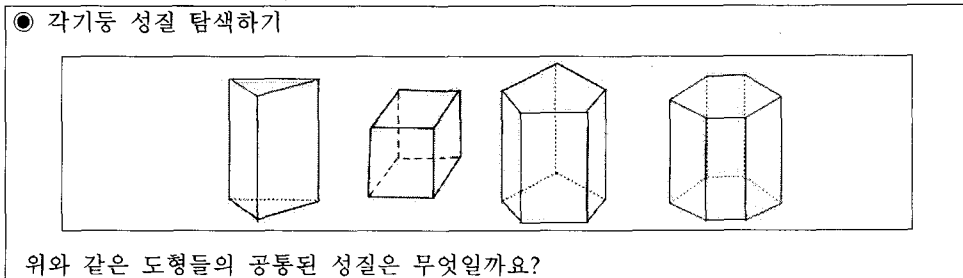
2. 수업의 대상과 연구 방법

사례 연구를 위해 별도의 수업 시간을 확보하고 대전의 모(某)초등학교 5학년 학생 10명을 선정하여 수업을 실시하였다. 정의 만들기 활동이 초등학교에서 이전에 일어난 적이 없고 쉽지 않기 때문에 한 반의 전체 학생들을 대상으로 할 경우 수업을 진행하기가 어려울 것으로 예상되었다. 따라서 학업성취도 상중하 별로 각각 3명, 4명, 3명을 뽑아 한 반을 축소한 형태로 실험을 진행하였다. 이 학교는 대전에서 외곽에 위치한 학교로 학생들의 성취 수준은 평균적으로 보통을 약간 밑도는 수준이었다. 수업은 2009년 11월 28일에 2차시로 80분 동안 실시하였다. 연구의 주된 분석 자료로는 학생들이 작성한 학생용 활동지를 사용하였다.

3. 학생 활동지에 나타난 정의 만들기 수업 결과 분석

가. 각기둥의 성질 찾아보기 활동

수업에서 학생들에게 개별적으로 학생용 활동지를 나누어주고 각자 활동지에 제시된 내용을 풀어보도록 하였다. 첫 번째 활동으로, 각기둥의 여러 사례들을 보여주고 그들의 공통된 성질을 각자 찾아서 적도록 하였다.



[그림 3] 각기둥의 성질 찾아보기

학생들이 찾은 각기둥의 성질은 <표 1>과 같다. 학생들이 적은 성질들을 살펴보면, 첫째, '각기둥의 성질'을 비수학적인 맥락에서 찾는 학생들이 있었다. 예를 들어, '옛날 집의 기둥 모양, 굴뚝 모양이다.', '물체를 위에 올릴 수 있다.', '우리 일상에서 사용하기도 한다.' 등이 이에 해당한다. 둘째, 각기둥을 포함하여 입체도형이라면 모두 당연히 지니고 있는 성질을 제시하는 학생들이 있었다. 예를 들어, '면, 모서리, 꼭짓점이 있다.' '보이는 선은 실선, 보이지 않는 선은 점선으로 되어 있다.' 등을 들 수 있다. 셋째, 평면도형 역시 지니고 있는 성질을 제시한다. 예를 들어, '평행인 변이 있다.', '수직인 변이 있다.' 등을 들 수 있다.

<표 1> 학생들이 찾은 각기둥의 성질

비수학적인 성질 제시	<ul style="list-style-type: none"> - 옛날 집의 기둥 모양, 굴뚝모양이다.(1명) - 물체를 위에 올릴 수 있다.(1명) - 모양이 있다. (1명) - 우리 일상에서 사용하기도 한다. (1명)
모든 입체도형이 지닌 성질 제시	<ul style="list-style-type: none"> - 면, 모서리, 꼭짓점이 있다.(1명) - 보이는 선은 실선, 보이지 않는 선은 점선으로 되어 있다.(1명) - 각이 있다.(1명)
평면도형 역시 지닐 수 있는 성질 제시	<ul style="list-style-type: none"> - 평행인 변이 있다.(1명) - 수직인 변이 있다.(1명)
각기둥의 중요한 성질 제시	<ul style="list-style-type: none"> - 입체도형(2명) - 밑면이 서로 평행(1명) - 밑면이 서로 합동(1명)

이 수업 단계의 실행을 통해 얻은 시사점은 다음과 같았다. 첫째, 학생들이 스스로 각기둥의 성질을 찾는데 있어 적지 않은 어려움이 따랐다. 따라서 학생들에게 각기둥의 성질을 찾아보는 기회를 반드시 제공해야 할 것이다. 또한 그 기회를 제공할 때 자유로운 분위기가 수반되어 학생들이 가급적 다양한 성질들을 찾도록 할 필요가 있다. 더 나아가 성질을 찾는데서 그치는 것이 아니라, 학생들이 찾은 성질들을 일정한 기준에 따라 분류해 보는 활동을 하는 것도 의미 있을 것이다. 학생들이 자신들이 찾은 성질들을 중요도, 비중, 주요 특징에 따라 분류하는 과정을 갖도록 하여, 성질 탐색 과정과 결과를 전체적으로 반성해보

는 기회를 갖는 것은, 각기둥의 성질을 이해하는데 도움을 주며, 궁극적으로 정의 만들기에 도움이 될 것이다.

나. 각기둥의 정의 미리 만들어 보기

다음 단계로, 학생들은 각기둥의 정의를 만들었다. 이 때, '() (을)를 각기둥이라고 합니다.'라는 형식을 일부러 도입하였다. 본 연구에서 실시한 예비실험⁵⁾에서 나타난 학생들의 반응을 보면, '각기둥은 옆면이 직사각형이다.', '각기둥은 밑면이 평행이다.'라는 식으로 진술하여 관계적으로 사용하는 정의 문장을 스스로 사용하지 못하는 경향을 보였기 때문이었다.

● 위와 같은 도형을 각기둥이라고 부릅니다. 각기둥의 정의를 만들어보세요.

정의 1	() (을)를 각기둥이라고 합니다.
------	-------------------------

[그림 4] 정의 문장

학생들이 맨 처음 제시한 각기둥의 정의는 다음과 같았다.

<표 2> 학생들이 만든 각기둥의 정의 1

분류 기호	주요 특징	사례
A	구성요소(꼭짓점, 모서리, 면)를 열거한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 면, 모서리, 꼭짓점이 있는 것 · 면, 꼭짓점, 각 모양이 있는 것 · 평행이며 꼭짓점 5개가 이루어져 있는 것
B	구성요소 간의 관계를 이용한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 육면체이고 평행인 변과 수직인 변의 크기가 같은 도형 · 윗면과 아랫면이 서로 합동인 입체도형 · 평행이며 꼭짓점 5개가 이루어져 있는 것 · 입체 전 면이 똑같이 만나는 도형
C	정례를 이용한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 육면체이면서 보이지 않은 모서리는 점선으로 되어있는 것 · 육면체이고 평행인 변과 수직인 변의 크기가 같은 도형
D	각기둥을 포함한 더 큰 범주를 이용한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 입체도형이 되는 것
E	비수학적인 요소를 사용한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 물체 위에 세울 수 있는 도형 · 육면체이면서 보이지 않은 모서리는 점선으로 되어있는 것

5) 본 수업을 실시하기 전에 10명의 또 다른 학생들을 대상으로 예비실험을 실시하였다.

수학적으로 볼 때, 학생들이 만든 정의들은 느슨하고 엉성하였다. 학생들이 제시한 정의 중에서 정확한 정의 또는 교과서에 제시된 정의와 가까운 것은 없었다. 학생들이 만든 정의를 다음과 같은 기준으로 분류할 수 있었다. 첫째, 각기둥의 구성 요소인 꼭짓점, 면, 모서리를 열거하여 정의를 만든다. 그 예로, '면, 모서리, 꼭짓점이 있는 것', '면, 꼭짓점, 각 모양이 있는 것', '꼭짓점 5개가 이루어져 있는 것' 등을 들 수 있다. 둘째, 각기둥의 구성 요소 간의 관계를 이용하여 정의를 만든다. 그 예로, '평행인 변과 수직인 변의 크기가 같은 도형', '윗면과 아랫면이 서로 합동인 입체도형', '평행이며...', '입체 전 면이 똑같이 만나는 도형' 등을 들 수 있다. 셋째, 각기둥의 정례를 사용하여 정의를 만든다. 그 예로, '육면체이고...', '육면체이면서...' 등을 들 수 있다. 넷째, 각기둥을 포함하는 더 큰 범주를 이용하여 정의를 만든다. 그 예로, '입체도형이 되는 것'을 들 수 있다. 다섯째, 비수학적인 요소들을 사용하여 정의를 만든다. 그 예로, '물체 위에 세울 수 있는 도형', '보이지 않는 모서리는 점선으로 되어 있는 것' 등을 들 수 있다.

요컨대, 학생들이 정의를 만드는 능력은 상당히 빈약하다는 것을 알 수 있다. 이는 당연한 결과로 여겨진다. 이 수업이 있기 전까지 학생들은 정의를 용어의 뜻풀이 정도로 인식하고 암기하는 것으로 배워왔기 때문이다. 어떤 개념을 정의하기 위해서는 필요충분조건을 사용해야 한다는 점이 기본이라고 할 때, 학생들은 필요충분조건보다는, 필요조건 또는 충분조건을 사용하여 정의를 하였다. 정의가 갖추어야 할 규칙에 대한 인식이나 정의를 만드는 능력을 키우기 위해서는 별도의 지도가 필요함을 알 수 있었다.

다. 제시된 비(非) 예를 포함하지 않도록 정의를 수정하기

한 종류의 비(非) 예를 제시할 때마다 이를 '고개'로 표현하여, 여러 고개를 넘는 방식으로 진행하였다. 각 고개마다 한 종류의 비(非) 예를 여러 개 제시하였다.

1) 비(非) 예 '평면도형'의 배제와 <정의 2>

첫 번째 비(非) 예로 '평면도형'을 제시하였으며, 학생들에게 제시한 학생용 활동지의 내용은 다음과 같았다.

< 첫째 고개 >

▷여러분이 만든 <정의 1>을 보세요.
 <그림 1>의 도형이 들어가지 않도록 정의되어 있습니까? (예 , 아니오)
 ▷<그림 1>과 같은 도형이 들어가지 않도록 <정의 1>을 고치세요.

정의 2	()을 각기둥이라고 합니다.
------	------------------

[그림 5] 비(非) 예 '평면도형'의 제시

학생들이 평면도형을 포함하지 않도록 자신들의 정의를 수정한 결과는 다음과 같았다.

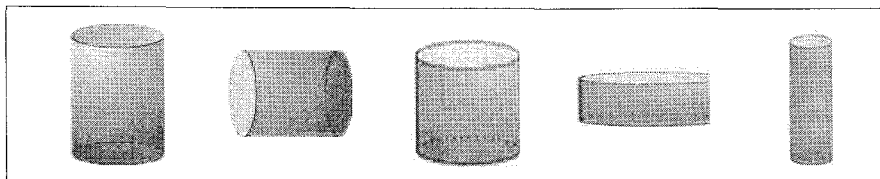
<표 3> '평면도형' 배제를 위해 만든 각기둥의 정의 2

<p>'입체도형'이 있는 정의(7)</p>	<ul style="list-style-type: none"> · <u>입체</u>, 많은 면, 꼭짓점, 모서리가 있고 평행한 면이 있다. · <u>입체</u>이고 육면체이면서 평행인 변이 있는 도형 · 윗면과 아랫면이 서로 합동인 <u>입체도형</u>(*) · <u>입체</u>이고 물체를 질 수 있는 도형 · <u>입체도형</u>을 각기둥이라고 합니다. · 평면이 아닌 <u>입체도형</u>(*) · <u>입체적</u>이고 면이 만나는 도형
<p>입체도형이 없는 정의(3)</p>	<ul style="list-style-type: none"> · 각기둥은 평행이 되기 때문에 · 면, 꼭짓점, 각 모양이 있는 것 · 각기둥은 평행이 있는 것

'평면도형'을 배제하도록 각기둥의 <정의 1>을 수정하게 한 결과, 10명의 학생 중에서 7명의 학생이 '입체', '입체적', '입체도형' 등을 담은 정의를 만들었다. <정의 1>에서는 '입체'를 사용하지 않았다가 <정의 2>에서 '입체'를 사용한 학생이 모두 5명이었다. 초등학교 교과서에 제시된 각기둥의 정의는 '위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형'이며, 여기서 '입체도형'은 명확하게 류의 자리⁶⁾에 놓여 있다. 위의 학생들이 만든 정의 중에서 '입체도형'을 그와 같은 식으로 사용한 학생은 표에서 (*)표친 두 명이었다. 평면도형을 배제하기 위해 대부분의 학생들은 '입체도형'을 각기둥의 주요한 성질로 부각할 줄 알았다. 다만, 교과서의 세련된 문장에서처럼 입체도형을 '류'의 자리에 정확히 위치시키는 데에는 미숙하였다.

2) 비(非) 예 '원기둥'의 배제와 <정의 3>

학생들은 두 번째 비(非) 예로 다음과 같은 '원기둥'을 보고 그들이 포함되지 않도록 정의를 수정하였다. 연구자는 '아래의 면이나 위의 면이 다각형이다.'라는 성질을 학생들이 부각시킬 것으로 기대하였다.



[그림 6] 비(非) 예 '원기둥'의 제시

6) 류와 종차로 이루어진 정의를 논리적 정의라고 하며, 흔히 사용하는 정의의 기본 구조라고 할 수 있다. 이를테면, 사각형을 '네 선분으로 둘러싸인 도형'이라고 정의할 때, '네 선분으로 둘러싸인'은 종차, '도형'은 류에 해당하며, 류의 자리는 그와 같다. 각기둥의 정의에서는 '입체도형'이 류이다.

원기등을 배제하도록 한 <정의 3>에서 학생들의 답변은 다음과 같았다.

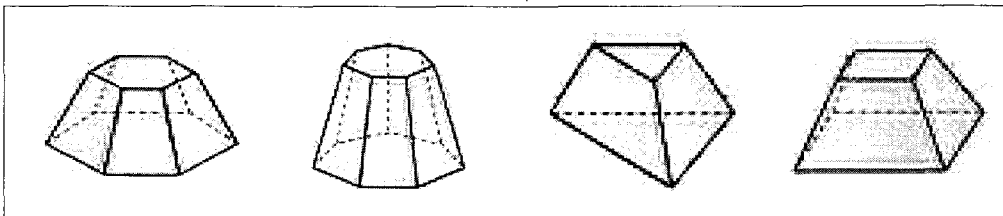
<표 4> '원기등'의 배제를 위해 만든 각기등의 정의 3

'각'을 사용한 정의 (4)		<ul style="list-style-type: none"> · 입체이고 <u>각이 있는 도형</u> · 윗면, 아랫면이 서로 합동이 되 윗면, 아랫면에 <u>각이 있는 입체도형</u> · 입체이고 물체를 질 수 있고 면과 <u>각이 있는 도형</u> · 입체도형이면서 <u>각이 있는 것</u>
'각'을 사용하지 않은 정의	구성요소를 사용한 정의(2)	<ul style="list-style-type: none"> · 입체이고 많은 면, 꼭짓점, 모서리 있고 평행인 변이 있다. · 면을 놓는다. 꼭짓점을 만든다.
	기타(4)	<ul style="list-style-type: none"> · 마주보는 변이 평행이 되지 않아서 · 지정된 입체도형 · 평행이 되어야 하고 같은 선분이 된 것 · 입체적이고 평면이 아닌 도형

학생들은 원기등에 대비되는 각기등의 성질로 '각이 있다.'는 점을 주로 부각시켰다. 학생 10명 중에서 '각이 있다.'는 점을 적은 학생이 모두 4명이었다. 한편 '꼭짓점 또는 모서리가 있다.'는 점을 정의에 제시한 학생이 두 명이었다. 연구자는 원기등을 배제하기 위해 '밑면이 다각형'이라고 진술할 것으로 기대했는데, 그런 경우에 해당하는 사례는 없었다.

3) 비(非) 예 '각뿔대'의 배제와 <정의 4>

세 번째 비(非) 예로 '각뿔대'를 제시하였으며, 학생들에게 제시한 학생용 활동지의 내용은 다음과 같았다.



[그림 7] 비(非) 예 '각뿔대'의 제시

각뿔대를 배제하도록 <정의 3>을 수정하여 만든 <정의 4>에서 학생들이 제시한 내용은 다음과 같았다.

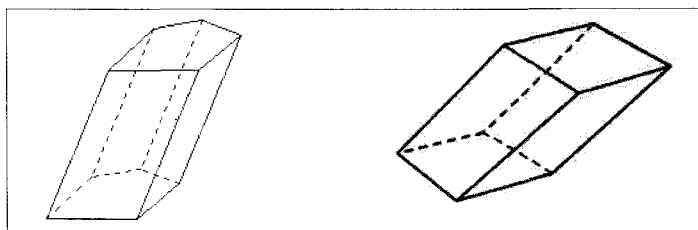
<표 5> '각뿔대'의 배제를 위해 만든 각기둥의 정의 4

<p>'합동'을 사용한 정의 (3)</p>	<ul style="list-style-type: none"> · 입체이고 면, 꼭짓점, 모서리가 많아야한다. 또 평행인 면이 같아야 한다. · 윗면, 아랫면이 서로 합동이고 각이 있는 입체도형 · 위에 면과 아랫면을 똑같이 한다. 꼭짓점을 놓는다. · 위아래가 변이 같은 것
<p>'합동'을 사용하지 않은 정의(7)</p>	<ul style="list-style-type: none"> · 각이 있고 마주보는 변이 평행이면서 입체인 도형 · 입체이고 면이 있고 각이 있고 모든 면에서 물체를 질 수 있는 도형 · 각기둥이 같은 선분이 되는 것 · 육면체이면서 각도도 약간씩 다르면서 선분도 둥근 것 · 각기둥은 같은 선분이 되고 직선이 바르게 되어야 함 · 면이 서로 평행이고 선이 수직인 것

비(非) 예 '각뿔대'를 배제하기 위해서는 각기둥의 특징으로 위의 면과 아랫면, 또는 밑면이 합동이라는 점을 부각시킬 것으로 기대하였다. 학생들이 만든 <정의 4> 중에서, '합동'이라는 용어를 쓴 학생은 한 명이었으며, 학생들은 '평행인 면이 같다.', '위아래가 변이 같은 것', '위에 면과 아랫면을 똑같이 한다.'와 같이 덜 정확한 문장으로 표현하였다.

4) 비(非) 예 '빗각기둥'의 배제와 정의 5

다섯 번째 비(非) 예로 다음의 '빗각기둥'을 제시하였다. 연구자는 학생들이 이 비(非) 예를 통해 '각기둥은 옆면이 직사각형이다.', 또는 '각기둥의 밑면은 옆면과 수직이다.'라는 성질을 부각될 것으로 기대하였다.

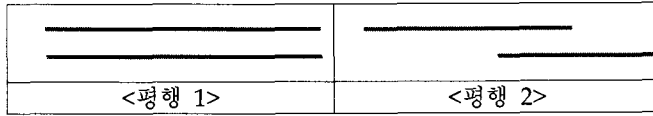


[그림 8] 비(非) 예 '빗각기둥'의 제시

학생들에게 '빗각기둥'을 제시하고, 그들이 각기둥인지 여부를 묻고 그 이유를 쓰도록 하였다. 각기둥이 아닌 이유로, '삐뚤다.(기울어져 있다.)'라는 아이디어를 말한 학생은 10명 중 4명이었다. '삐뚤다.' 또는 '기울어져 있다.'는 말은 일상에서 흔히 사용된다는 점과 그런 표현은 수학의 세계에서 통용되지 않는다는 점을 고려할 때, 그 학생들은 일상의 맥락과 수학의 맥락을 구분하지 않으며, 수학적 의사소통 능력이 부족하다고 볼 수 있다.

한편 위의 입체도형이 각기둥이 아닌 이유로 '면이 평행하지 않다.'는 것을 제시한 학생들이 10명 중에 5명이었다. 실은 위의 빗각기둥의 밑면 역시 평행함에도 학생들은 평행하지 않은 것으로 보고 있는 것이다. 세 명의 학생은 '면이 평행이 아니어서' 각기둥이 되지

않는다고 반응을 했다. 학생들이 평소 보아 온 평행의 모습과는 조금 다른 모습이어서 빗각기둥의 두 밑면을 평행이 아니라고 판단한 것으로 보인다.



[그림 9] 두 직선의 평행의 예

<평행 1>은 교과서를 비롯한 학습자들이 평소에 보아 온 두 직선의 평행인 그림이며 <평행 2>는 두 직선을 옆으로 약간 비켜 그린 그림이다. 빗각기둥의 두 밑면의 평행인 모습은 <평행 2>와 비슷하다. 교과서에서 4학년 때 직선 사이의 평행을 다루며, 5학년 때 직육면체를 통해 면과 면의 평행을 다룬다. 직육면체의 밑면을 정의하기 위해 간단히 다루고 있어 각기둥의 정의 요소 중 면과 면 사이의 평행에 대해 학습자들이 어려워하는 모습을 보인다.

학생들이 <정의 5>에서 답한 내용은 다음과 같았다. '빗각기둥'을 배제하기 위해서는 각기둥의 성질 중에서 '밑면과 옆면이 수직이다.' 또는 '옆면이 직사각형이다.'라는 성질이 부각되어야 한다. 그런데 학생들 중에서 그런 식으로 답을 한 학생들은 없었다. 대신 '빼돌리 않고 반듯해야 한다.'고 표현한 학생이 10명 중 3명이었다. 이 학생들은 수학적으로 표현하는 것과 일상적인 맥락에서 표현하는 것에 관한 구분이 비교적 안 되고 있다고 볼 수 있었다. 한편 나머지 학생들 중에서도 '밑면과 옆면이 수직'이라든지, '옆면이 직사각형'이라고 제시한 학생은 없었다.

<표 6> '빗각기둥'의 배제를 위해 만든 각기둥의 정의 5

'위로 반듯'을 사용한 정의	<ul style="list-style-type: none"> · 입체이고, 면, 모서리, 꼭짓점이 많다. 또 평행이어야 하고 반듯해야 하는 것 · 윗면, 아랫면이 합동이면서 윗면, 아랫면에 각이 있고 빼돌리지 않은 입체도형 · 위로 반듯이 된 것
기타	<ul style="list-style-type: none"> · 입체이고 평행인 변이 같으며 마주보는 각의 크기가 같으며 직선으로 되어있는 도형 · 면이 있고 각이 있고 면이 평행이고 입체이고 물체를 질 수 있는 도형 · 각기둥이 같은 선분이 되는 것 · 육면체이면서 변이 평행인 것 · 윗면과 아랫면이 똑같은 도형 · 면이 평행이 되고 입체적이면서 수직이 평행이 되는 도형

라. 정의에 대한 학생들의 인식 변화

본 수업을 거처기 전과 후의 정의에 대한 학습자들의 인식 변화를 살펴보았다. 먼저 수학에서 정의란 무엇인가라는 질문에 대한 대답 중에서 유의미한 변화를 가져온 경우는 다음과 같았다.

<표 7> 정의에 대한 인식 변화 (1)

학생 A	<p>1. 수학에서 정의란 무엇이라고 생각하는지 정의에</p> <p><u>정의는 도형의 성질과 약속 같다.</u></p>	<p>1. "정의 만들기"를 통해 알게 된 수학의 정의란 무엇이라고 생각합니까? 정의에 대한 생각이나 느낌을 써 보세요.</p> <p><u>도형의 성질, 도형의 성질을 증명하면 약속해서 나타낸 수학도형의 약속 같다</u></p>
학생 B	<p>1. 수학에서 정의란 무엇이라고 생각하는지 정의에 대한 생각이나 느낌을 써 주세요.</p> <p><u>삼각형이나 사각형 또는 다각형을 살피하는 정의 같이 (이) 같고 또 이 정의를 외워야 하는 것이 짜증나고(?) 귀찮다 또 나는 특히 다각형을 외우기가 어렵다</u></p>	<p>1. "정의 만들기"를 통해 알게 된 수학의 정의란 무엇이라고 생각합니까? 정의에 대한 생각이나 느낌을 써 보세요.</p> <p><u>정의를 삼각형, 사각형, 다각형, 직육면체, 구 등이 먼저 알아 보는 것이 것 같다</u></p>
전		후

학생 A의 경우 정의 만들기를 경험한 후 수학의 정의는 '도형의 성질을 중요한 것만 요약해서 나타낸 수학도형의 약속'이라고 표현하고 있다. '요약'이라는 단어에서, 수학의 정의는 정의에 꼭 필요한 내용만 담아야 함을 의식한 것으로 보인다. 학생 B의 경우 수업을 하기 전에는 정의는 외워야 하는 대상이며 짜증나고 귀찮다고 하였으나 수업을 한 후 정의는 도형들이 무엇인지 알아보는 것이라고 하여 정의가 학습자에게 주어져 외우는 대상이 아닌 해당 도형들을 알아보는 과정 속에서 만들어짐을 표현하였다.

두 번째로, 수학에서 정의는 어떻게 만들어진 것인가라는 질문에 대한 답변 중에서 유의미한 변화는 다음과 같았다.

<표 8> 정의에 대한 인식 변화 (2)

학생 C	<p>2. 정의는 어떻게 만들어진 것일까요?</p> <p><u>한 사람이 어떤 한 도형을 보고 생각해본 것 같다</u> <u>도형의 성질을</u></p>	<p>2. 정의는 어떻게 만들어진 것일까요?</p> <p><u>도형들을 보고 "이 도형들은 이러한 공통점이 있네?"라고 말하면서 사람이 만들었을 것이다</u></p>
학생 D	<p>2. 정의는 어떻게 만들어진 것일까요?</p> <p><u>귀찮기 때문에 쉽게 정리하기 위해서</u></p>	<p>2. 정의는 어떻게 만들어진 것일까요?</p> <p><u>약속하기 같이 차례대로 고쳐가라고 만든 것 같다.</u></p>
전		후

학생 C의 경우 "도형들을 보고 '이 도형들은 이러한 공통점이 있네?'라고 말하면서 사람들이 만들었을 것이다."고 답하였다. 즉, 다양한 예에서 공통된 특성을 발견해 내는 추상

화와 일반화 과정을 거쳐 정의가 만들어짐을 깨닫게 된 것으로 보인다. 또한, 학생 D의 경우 정의가 고쳐나가는 과정 속에서 만들어진다고 답하여 비(非) 예를 제거해 나가는 과정에서 정의가 엄밀해지며 만들어지는 정의의 경험을 반영한 것으로 보인다.

IV. 시사점과 제언

이 논문에서는 각기둥의 정의 만들기 지도를 위한 학생용 활동지를 통하여, 초등학교 5학년 학생들이 각자 스스로 활동지의 내용을 풀어가면서, 각기둥의 정의를 만들고 수정해 보도록 하였다. 그 활동지에 학생들이 제시한 답변을 토대로, 학생들이 어떤 반응을 보이며, 어떤 어려움을 겪는지를 알아보았다. 연구 결과를 구체적으로 제시하면 다음과 같았다.

첫째, 학생들은 각기둥의 성질을 찾는데 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 각기둥의 정의에 사용되는 성질들을 찾는 빈도수가 낮은 편이었으며, 학생들은 비수학적인 맥락에서 성질을 찾거나, 각기둥이 지니고 있는 성질이기는 하지만, 중요도가 낮은 성질을 찾기도 하였다. 교사가 수업에서 학생들과 적극적인 상호작용을 하여 각기둥의 성질을 찾고 이를 분류해 보는 활동을 할 필요성이 있다고 여겨진다.

둘째, 학생들은 각기둥의 정의를 수학적으로 볼 때 느슨하고 영성하게 만들었다. 수학에서 사용하는 정의의 독특함에 대한 인식은 매우 낮았으며, 일상적이고 직관적인 맥락에서 정의를 만드는 경우들이 많았다.

셋째, 비(非) 예들을 배제하도록 정의를 수정하는 과정에서 나타난 학생들의 주된 반응은 다음과 같았다. 비(非) 예 '평면도형'을 배제하기 위해, 학생들은 '각기둥은 입체도형이다.'라는 성질에 주목하였다. 비(非) 예 '원기둥'을 배제하기 위해 연구자는 학생들이 '밀면이 다각형이다.'라는 성질에 주목할 것으로 기대하였지만, 학생들은 '각기둥은 각이 있다.'라는 성질에 주목하였다. 비(非) 예 '각뿔대'를 배제하기 위해, 학생들은 '각기둥은 밀면이 합동이다.'라는 성질에 주목하긴 하였지만, 정확하게 '합동'이라는 용어를 사용한 학생의 수는 적었다. 비(非) 예 '빋각기둥'을 배제하기 위해 연구자는 학생들이 '옆면이 직사각형이다.' 또는 '밀면과 옆면이 수직이다.'에 주목할 것으로 기대하였지만, 학생들은 '비뿔이 아니고 반뿔하다.'라고 하여 상당히 직관적이고 일상적인 맥락에서 성질을 나타내었다. 또한 빋각기둥은 밀면이 평행하지 않다고 말하는 학생이 적지 않았다. 이와 같은 결과로 볼 때, 학생들이 스스로 학생용 활동지를 통하여 수학적으로 바람직한 방향으로 정의를 수정하고 개선하기는 어려워 보인다. 교사가 수업에서 학생들과 적극적으로 상호작용을 함으로써, 비(非) 예를 통하여 주목해야 할 성질들을 부각시키는 과정을 밝을 필요가 있으며, 그에 관한 앞으로의 상세한 연구가 필요하다.

넷째, 학생용 활동지를 스스로 풀어가면서 학생들은 얼마간 수학에서의 정의에 대한 인식이 나아졌음을 확인할 수 있었다. 이 연구에서 사용한 활동지를 기반으로 교사가 적극적으로 수업을 할 경우, 학생들의 정의 만들기나 수학에서의 정의에 대한 인식이 더욱 개선될 것으로 보인다.

이 연구는 교사의 개입을 최소로 하였기 때문에, 각기둥의 정의 만들기 지도가 얼마간 수동적으로 이루어졌다. 본 연구를 토대로 향후 교사가 적극적으로 학생들과 상호작용을 하는 정의 만들기 수업이나, 학생들 간의 모둠 활동에서 토론이 활발히 이루어지는 수업을 구상해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 강지형, 김수환, 라병소, 박성택, 이의원, 이정재, 정은실 (1999). 초등수학교육론. 동명사.
- 고진아 (2009). 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 학생의 인식. 제주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 권유미, 안병곤 (2005). 초등 수학 교과서에 사용되고 있는 수학 용어에 대한 학생들의 이해도 분석 - 도형 영역을 중심으로 -. 한국초등수학교육학회지, 9(2), pp.137-157.
- 교육과학기술부 (2008). 수학 6-가. 서울교육대학교 국정도서편찬위원회.
- 교육과학기술부 (2008) 수학 6-가. 서울교육대학교 국정도서편찬위원회.
- 김수미, 정은숙 (2005). 범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안. 수학교육학연구, 15(4), 401-417.
- 박교식 (2004). 수학용어 다시 보기. 서울: 수학사랑.
- 신해현 (2002). 초등학교 수학 교과서에 제시된 용어의 정의 유형 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 조영미 (2000). 수학교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색. 학교수학, 4(1), 15-27.
- 조영미 (2000). 직관기하의 정의 사용 양태 분석과 증명 지도에 대한 시사점. 수학교육학연구, 10(2), 215-227.
- 조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 박사학위논문.
- 조영미, 강홍규 (2002). 학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의. 수학교육학연구, 12(1), 95-108.
- 조영미 (2002). 제7차 초등학교 수학에 새롭게 등장한 용어 '악속'의 재미미. 학교수학, 4(2), 247-260.

<Abstract>

A Scheme of the Instruction of Prism Definition for 5th Grade Students

Cho, Youngmi⁷⁾; & Park, Ha-Na⁸⁾

The purpose of this study is to suggest an effective plan for teaching the definition of prism by integrating and analyzing the theories related to the instruction of definitions. The subjects in this study to realize these objectives were as follows. First, it looks to theoretical backgrounds regarding the instruction of the definition of solid by functions of definition in mathematics education. Second, it explores the instructional way to form the definition of solid through function of definition, by analyzing the unit of solid in the 6th grade. Third, after conducting the real practice with the 5th graders who before learn solid in 6th curriculum, according to plan of instruction, it examined student's response and testify its effectiveness, and then propose a teaching scheme which is designed to be useful based on the outcomes.

In terms of theoretical background, it investigated the precedent research in relation to the instruction of the definition that mathematical definition is not given perfectly but the process of making knowledge that mathematization activity is necessary.

It investigated the effects of the instruction of definitions, based on the effects of teaching and interviews with the 5th graders, and analysis of student's handout.

The followings were the results of this study.

First, 'Making Definitions' activities through remove counterexample process was possible to analytic thinking not intuitively thinking, and it effects the extend of awareness in definition that definition is not fixed but various. Second, it need the step of organize terms that is useful on solid's definition through activate of background knowledge. Third, it is effective that explore characters of the solids after construct the solids. Fourth, interactive discussion that students correct their mistakes each other through mathematical communication and they can think developmental is useful on making definition more than individual study.

Keywords: definition, prism, counterexample.

논문접수: 2011. 07. 11

논문심사: 2011. 07. 16

게재확정: 2011. 08. 09

7) ymcho@gjue.ac.kr

8) heanting@hanmail.net