

모델차수축소법을 이용한 프리스트레스 구조물의 효율적인 고유진동해석[§]

한 정 삼^{*†}

* 안동대학교 기계설계공학과

Efficient Modal Analysis of Prestressed Structures via Model Order Reduction

Jeong Sam Han^{*†}

* Dept. of Mechanical Design Engineering, Andong Nat'l Univ.

(Received April 11, 2011 ; Revised April 25, 2011 ; Accepted May 2, 2011)

Key Words : Model Order Reduction(모델차수축소법), Krylov Subspace(크리로프 부공간), Modal Analysis(고유진동해석), Prestress(프리스트레스)

초록: 일반적으로 회전체나 초기 하중 하의 구조물 또는 열변형된 파이프 등의 프리스트레스 구조물은 이러한 프리스트레스 효과로 인하여 고유진동수 및 고유진동모드가 변화되기 때문에 정확한 고유진동해석을 위해서는 프리스트레스 고유진동해석을 수행해야 한다. 시스템에 따라서는 그 복잡성으로 인하여 수십만~수백만의 큰 자유도를 갖는 대형 유한요소모델이 요구되어 이러한 대형 모델의 프리스트레스 영향을 파악하기 위한 프리스트레스 고유진동해석을 주어진 설계시간 내에 반복적으로 수행하기에는 여전히 시간적 어려움이 많은 형편이다. 따라서, 본 논문에서는 크리로프 부공간에 근거한 축소기법으로 시스템의 초기 유한요소모델에 대하여 고유진동 특성을 정확하게 나타내면서도 작은 차수의 축소모델로 표현하여 프리스트레스 고유진동해석에서의 계산시간 문제를 감소하였다. 초기 시스템과 축소 시스템의 모멘트를 일치하는 수치계산에는 아놀디 과정을 이용하였다. 적용예제로 휠과 컴프레서 임펠러를 선택하여 제안한 방법을 통한 회전에 따른 프리스트레스 고유진동해석의 정확성과 효율성을 보였다.

Abstract: It is necessary to use prestressed modal analysis to calculate the modal frequencies and mode shapes of a prestressed structure such as a spinning blade, a preloaded structure, or a thermally deformed pipe, because the prestress effect sometimes causes significant changes in the frequencies and mode shapes. When the finite element model under consideration has a very large number of degrees of freedom, repeated prestressed modal analyses for investigating the prestress effects might become too computationally expensive to finish within a reasonable design-process time. To alleviate these computational difficulties, a Krylov subspace-based model order reduction, which reduces the number of degrees of freedom of the original finite element model and speeds up the necessary prestressed modal analysis with the reduced order models (ROMs), is presented. The numerical process for the moment-matching model reduction is performed directly on the full order models (FOMs) (modeled in ANSYS) by the Arnoldi process. To demonstrate the advantages of this approach for performing prestressed modal analysis, the prestressed wheel and the compressor impeller under their high-speed rotation are considered as examples.

- 기호설명 -

1. 서론

- \mathcal{K}_n : n 차 크리로프 부공간
- $\omega^2(=\lambda)$: 고유치
- ϕ : 고유벡터
- Ω : 구조물의 회전속도(rad/s)

유한요소법을 통한 구조물의 고유진동해석은 시스템의 해석 및 설계시 시스템의 동역학 특성을 얻기 위하여 널리 이용되는 방법의 하나이다. 시스템에 따라서는 그 복잡성으로 인하여 수십만~수백만의 큰 자유도를 갖는 대형 유한요소모델이 요구되어 고유진동해석에 대규모 전산자원과 장시간의 연산시간을 필요로 하게 된다. 수치계산을 위한 전산자원의 눈부신 발전으로 합리적인 시간

[§] 이 논문은 2011년도 대한기계학회 CAE 및 응용역학부문 춘계학술대회(2011. 4. 14.-15., SETEC) 발표논문임

[†] Corresponding Author, jshan@andong.ac.kr

© 2011 The Korean Society of Mechanical Engineers

에 대형 문제의 고유진동해석이 가능하지만 큰 자유도를 가진 모델의 고유진동해석을 주어진 설계 시간 내에 반복적으로 수행하기에는 여전히 시간적 어려움이 많은 형편이다.^(1~3) 따라서, 시스템의 초기 유한요소모델에 대하여 고유진동 특성을 정확하게 나타내면서도 작은 차수의 축소모델로 표현할 수 있다면, 이 축소모델은 해석 및 설계에 효과적으로 이용될 수 있다. 이렇듯 초기 시스템에 대한 효율적인 해석을 위하여 초기 대형 유한요소모델의 차수를 축소하는 차수축소모델링에 대한 연구는 여러 분야 기계 구조물의 주파수응답 해석 등에 이용되고 있다.^(4~8)

본 논문에서는 시스템의 주파수응답 해석에 주로 사용되는 모멘트 일치법과 크리로프 부공간에 근거한 기존의 모델차수축소법^(9,10)에서 대형 프리스트레스 고유치 문제에 정확한 축소모델을 생성하는 방법을 제안하였다. 또한, 이를 구조물의 회전에 의하여 프리스트레스가 발생하는 경우의 고유치 문제에 적용하였다. 축소모델의 차수를 결정함에 있어서 오차수렴지표를 제안하여 사용자가 원하는 k번째 고유진동모드까지 요구되는 유효숫자의 정확도를 지닌 축소모델의 차수를 사용자가 추가적인 정보의 입력 없이 자동적으로 결정할 수 있는 방법을 제안하여 모델차수를 자동적으로 수행될 수 있도록 하였다. 적용 예제로 자동차 휠과 컴프레서 임펠러의 고유치 문제를 검토하여 본 모델차수축소법의 정확도와 효율성을 보이고자 한다.

2. 고유진동해석의 모델차수축소법

2.1 모델차수축소법의 개요

일반적으로 비감쇠 시스템의 운동방정식을 유한요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 t 는 시간변수, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$ 은 상태변수벡터, $u(t)$ 는 입력, 그리고 $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$ 는 출력벡터를 의미한다. 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$ 의 자유도는 N , 출력벡터의 크기는 p 이다. 행렬 \mathbf{M} , $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 는 각각 이차 시스템의 질량행렬, 강성행렬이다. 벡터 $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^N$ 와 $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{p \times N}$ 은 각각 하중이 작용하는 위치와 크기를 나타내는 하중분배벡터와 선택한 위치에서의 응답을 보기 위한 출력측정행렬을 의미한다. 일반적으로 대부분의 공학 문제에서 p 는 N 보다 훨씬 작다.

모델차수축소법의 기본 개념은 아래 식 (2)의 관계를 만족하는 변환행렬 $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{N \times n}$ 을 통하여 초기

시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터 $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 작은 자유도로 구성된 축소 시스템의 상태변수벡터 $\mathbf{z}(t)$ 로 근사화하는 것이다.

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^n, n \ll N \quad (2)$$

따라서, 먼저 변환행렬 \mathbf{V} 를 구한 후에 식 (1)의 이차 시스템을 식 (2)처럼 \mathbf{V} 에 투영(projection)시키고, 다시 식 (1)의 양변에 \mathbf{V} 의 전치행렬을 곱하면 다음과 같이 식 (1)과 동일한 형태를 지닌 이차 축소 시스템을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r\mathbf{z}(t) &= \mathbf{f}_r u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r\mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

이때, 축소행렬은 $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$, $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$, $\mathbf{f}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{f}$ 및 $\mathbf{L}_r = \mathbf{L} \mathbf{V}$ 로 각각 표현된다. 따라서, 모델차수축소법은 어떻게 변환행렬 \mathbf{V} 를 적합하게 구하는가 하는 문제가 된다. 여기서 축소모델의 자유도는 $n \ll N$ 이고, 축소모델에서 입력 $u(t)$ 와 출력벡터 $\mathbf{y}(t)$ 는 초기 시스템과 비교하여 변동이 없음을 알 수 있다. 따라서, 축소된 n 차 자유도의 모델을 해석에 이용하므로 매우 효율적인 동적해석이 가능하다.

2.2 모멘트 일치법

식 (1)을 제로초기조건(zero initial condition)하에서 라플라스(Laplace) 변환 후, 전달함수를 구하면

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)/U(s) = \mathbf{L}(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{f} \quad (4)$$

이며, 이 식을 s 에 대하여 전개점 $s=s_0$ 에서 테일러 급수전개(Taylor's series expansion)을 하면 전달함수는 아래와 같이 급수형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(s-s_0) + \cdots + \mathbf{m}_q(s-s_0)^q + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i(s-s_0)^i \end{aligned} \quad (5)$$

이때, 계수 \mathbf{m}_i 를 전개점 s_0 에 대한 전달함수의 모멘트(moment)라고 한다. 이 모멘트는 초기 시스템과 축소 시스템의 유사성(similarity)을 나타내는 지표로 사용된다. 즉 식 (1)과 동일한 이차 형태를 지닌 축소 시스템 (3)의 전달함수를

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{m}}_0 + \hat{\mathbf{m}}_1(s-s_0) + \cdots + \hat{\mathbf{m}}_q(s-s_0)^q + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{m}}_i(s-s_0)^i \end{aligned} \quad (6)$$

라고 하면, 결국 모멘트 일치법은 요구되는 차수 n 에 대하여 다음을 만족하는 축소 시스템 (3)을 찾는 문제를 의미한다.

```

• Arnoldi process:

Given a nonzero starting vector  $\mathbf{r} (= \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f})$  and a matrix  $\mathbf{A} (= -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})$ , this algorithm
produces orthonormal  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  such that
 $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}\}$  for  $k = 1, 2, \dots, n$ 

[L, U] = lu(K); % LU matrix factorization (K = L*U)
v = U \ (L \ f); % the starting vector by left division
v = (1/norm(full(v))) * v; % normalizing the starting vector

for j = 2:n % generate Krylov vectors up to n
    v(:, j) = U \ (L \ (-M * v(:, j-1)));
    for k = 1:j-1
        hv = v(:, k)' * v(:, j);
        v(:, j) = v(:, j) - hv * v(:, k);
    end
    v(:, j) = v(:, j) / norm(v(:, j));
end
end
    
```

Fig. 1 Generation of Krylov bases for $\mathfrak{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ using Arnoldi process in Matlab

$$\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

식 (1)의 비감쇠 이차 시스템에 대한 전달함수의 모멘트를 구하기 위하여, 식 (4)에서 테일러급수전개를 수행하면

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{L}(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{f} \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{I} + s^2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} s^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i s^{2i} \end{aligned} \quad (8)$$

을 얻는다. 즉, 비감쇠 이차 시스템의 모멘트는 $\mathbf{m}_i = \mathbf{L}(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ 이다.⁽⁴⁾

2.3 아놀디 과정을 통한 변환행렬 생성
행렬 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 및 벡터 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ 에 대하여

$$\mathfrak{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{r}) = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{A}^2\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}\} \quad (9)$$

를 n 차 크리로프 부공간(n th Krylov subspace)라 한다. 만약 $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$, $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ 라고 하면 n 차 크리로프 부공간은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_n(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}) \\ = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, \dots, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}\} \end{aligned} \quad (10)$$

크리로프 부공간에 근거한 모멘트 일치법은 전달함수의 모멘트 \mathbf{m}_i 를 실제로 계산하지 않고, 초기 및 축소 시스템의 모멘트를 일치시킬 수 있도록 한다. 크리로프 부공간에 근거한 모멘트 일치법에 대하여 식 (2)의 변환행렬 \mathbf{V} 의 각 열벡터(column vector)로 이루어진 모든 선형 결합들이 식

(10)의 n 차 크리로프 부공간을 구성(span)하면, 초기 비감쇠 이차 시스템과 비감쇠 축소 시스템의 첫 n 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.⁽⁹⁾ 이때, 변환행렬 \mathbf{V} 를 구하는데 초기 시스템의 질량 및 강성 행렬과 하중분배벡터의 정보를 이용한다.

변환행렬 \mathbf{V} 의 열벡터를 구하는 수치적 방법에는 아놀디 과정(Arnoldi process)^(8,10)이 이용된다. 크리로프 부공간 $\mathfrak{K}_n(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f})$ 을 구성하는 각 열벡터 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, \dots, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ 는 실제 수치계산에서 작은 n 값에도 서로 선형종속(linear dependent)이 되기 때문에, 실제 계산에서는 이 열벡터를 직접 계산하지 않고 같은 크리로프 부공간을 구성하는 새로운 기저 열벡터들을 계산한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬 \mathbf{V} 는 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가지고 있다.

$$\begin{aligned} \text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= \mathfrak{K}_n(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 \mathbf{I}_n 는 n 차의 단위행렬이다.

Fig. 1에는 아놀디 과정을 통하여 변환행렬 \mathbf{V} 의 열벡터를 생성하는 수치적 알고리즘에 대하여 행렬 \mathbf{A} 와 벡터 \mathbf{r} 을 각각 $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ 과 $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ 로 가정 한 경우의 Matlab⁽¹⁴⁾ 코드를 제시하였다.

- 1) Let $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k$ where $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$
- 2) Multiply \mathbf{K} on both sides, $\mathbf{K}\mathbf{v}_{k+1} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$
- 3) Decompose \mathbf{K} , $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$
- 4) Solve for \mathbf{w} , $\mathbf{L}\mathbf{w} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$ where $\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}$
- 5) Solve for \mathbf{v}_{k+1} , $\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}$

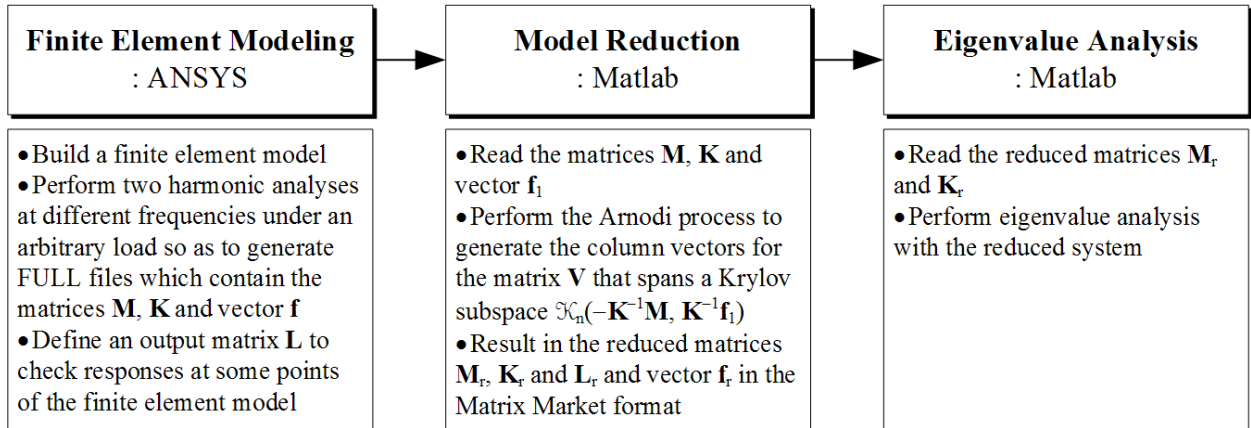


Fig. 2 Process of model order reduction for eigenvalue problems using ANSYS and Matlab

초기벡터 \mathbf{r} 을 정규화하여 \mathbf{v}_1 을 얻고, 다음 열벡터 \mathbf{v}_{k+1} 는 $\mathbf{v}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{v}_k$ 의 관계를 이용하여 위의 단계로 구한다. 즉 \mathbf{K}^{-1} 을 직접 계산하지 않고, 2)처럼 양변에 \mathbf{K} 를 곱하여 행렬분해(matrix decomposition)을 수행한다. 행렬 \mathbf{A} 가 대칭(symmetric)인 양정치행렬(positive definite)이면 Cholesky분해를, 대칭이 아닌 행렬이면 LU분해를, 대칭이나 부정부호행렬(indefinite)이면 LDL^T 분해를 사용한다. 이후에 2회의 연립방정식 풀이를 통해 열벡터 \mathbf{v}_{k+1} 를 구한다. 따라서, \mathbf{v}_{k+1} 를 구하기 위해서는 행렬과 벡터의 곱($\mathbf{M}\mathbf{v}_k$) 1회, 전방대입법(forward substitution) 1회 및 후방대입법(backward substitution) 1회의 계산이 필요하다. 또한, 생성되는 \mathbf{V} 의 열벡터가 선형독립성을 가지도록 직교화(orthogonalization)을 수행한다. 많은 경우, 그람슈미트(Gram-Schmidt) 정규직교화 과정이 이용된다. 만약에 지정한 n 개의 선형독립인 열벡터를 구하기 전에 열벡터가 선형종속이 되면, 선형독립인 열벡터까지만 \mathbf{V} 의 열벡터로 취하게 된다. 따라서, 최종적으로 구해진 \mathbf{V} 의 열벡터는 식 (11)의 관계를 만족하게 된다.

2.4 프리스트레스 고유진동해석에 대한 적용

식 (1)의 시스템에서 $\mathbf{f}\mathbf{u}(t)=\mathbf{0}$ 로 가정하면 그 시스템에 대한 자유운동, 즉 고유진동 문제가 되며

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{12}$$

이 자유진동의 해는 다음 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \phi \sin(\omega t + \phi) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= -\omega^2 \phi \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{13}$$

이를 식 (12)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제(eigenvalue problem)가 된다.⁽¹¹⁾

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0} \tag{14}$$

이는 고유치(eigenvalue) $\omega^2(=\lambda)$ 와 그 고유치에 대

응하는 고유벡터(eigenvector) ϕ 를 구하는 문제가 된다. 이와 마찬가지로 식 (3)의 축소 시스템에 대한 고유치 문제도

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \hat{\phi} \sin(\hat{\omega}t + \hat{\phi}) \\ \ddot{\mathbf{z}}(t) &= -\hat{\omega}^2 \hat{\phi} \sin(\hat{\omega}t + \hat{\phi}) \end{aligned} \tag{15}$$

를 이용하면 아래와 같이 주어진다.

$$(\mathbf{K}_r - \hat{\omega}^2 \mathbf{M}_r)\hat{\phi} = \mathbf{0} \tag{16}$$

이때, $\hat{\omega}^2(=\hat{\lambda})$ 과 $\hat{\phi}$ 은 각각 축소 시스템의 고유치와 그에 해당하는 고유벡터이다. 따라서, n 차의 축소모델에서 n 개의 고유진동수를 얻을 수 있고, 식 (2)와 같이 변환행렬 \mathbf{V} 를 이용하여 축소 시스템의 고유벡터에서 초기 시스템의 고유벡터를 구할 수 있다. 그런데, 변환행렬 \mathbf{V} 의 생성시 질량행렬(\mathbf{M}), 강성행렬(\mathbf{K}) 및 하중분배벡터(\mathbf{f})의 정보가 이용되므로, 축소 시스템은 하중분배벡터에 대하여 의존적이다.⁽¹⁾ 따라서, 본 연구에서는 이러한 의존성을 제거하기 위하여 다음과 같이 모든 요소가 1의 값을 갖는 하중분배벡터 \mathbf{f}_1 를 제안하고 이를 이용하여 축소 시스템을 생성하였다.

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{where } \mathbf{f}_1 \in \mathfrak{R}^N \tag{17}$$

대부분의 공학문제는 큰 자유도의 대형 시스템에서도 설계 및 해석을 위하여 초기 몇 개의 고유치와 고유벡터만이 필요한 경우가 대부분이기 때문에, 자유도 N 의 초기 시스템보다 제안한 모델차수 축소법으로 생성된 자유도 n 인 축소모델을 이용함으로써 보다 효율적인 설계 및 해석이 가능하다.

시스템에 프리스트레스(prestress)가 존재하는 경우에 고유진동수와 고유진동모드에 변화가 발생한다. 본 논문에서는 특별히 구조물의 회전 에 의해

발생하는 프리스트레스 하에서 고유진동해석을 고려한다. 시스템에 회전으로 인한 프리스트레스 효과가 존재하는 경우, 식 (12)는 아래와 같이 변경되며

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (18)$$

여기서, 프리스트레스로 변경된 강성행렬은

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_\Omega \\ \text{where } \Delta\mathbf{K}_\Omega &= \Omega^2\Delta\mathbf{K} \end{aligned} \quad (19)$$

로 초기 강성행렬에 구조물의 회전속도(Ω)의 제곱에 비례하는 항이 더해진 형태로 표현된다. 따라서, 프리스트레스 고유치 문제에 대한 변환행렬 \mathbf{V} 의 열벡터를 계산할 때에는 아래의 식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \text{colspan}(\mathbf{V}) &= \\ \mathfrak{K}_n\{\bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}_1, (-\bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M})\bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}_1, \dots, (-\bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\bar{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{f}_1\} \end{aligned} \quad (20)$$

또한, 행렬 $\Delta\mathbf{K}$ 은 회전속도(Ω)에 독립적으로 계산할 수 있기 때문에, 여러 가지 회전속도에 대한 변경된 강성행렬 $\bar{\mathbf{K}}$ 을 식 (19)를 통하여 계산한 후, 각 경우에 대한 변환행렬을 식 (20)으로 계산하여 축소 시스템의 프리스트레스 고유치 문제를 계산시간 측면에서 더욱 효율적으로 수행할 수 있다.

2.5 유한요소해석을 통한 시스템 행렬의 계산

먼저 주어진 문제에 대한 ANSYS⁽¹²⁾ 유한요소모델링을 수행하여 식 (1)의 시스템 행렬을 얻는다. ANSYS에서는 주파수응답 해석시, 각 가진주파수 ω 에 대하여 시스템 행렬은 다음 선형연립방정식과 같이 수식화 되므로

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c\mathbf{x}_c &= \mathbf{F}_c \\ \text{where } \mathbf{K}_c &= \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} \end{aligned} \quad (21)$$

서로 다른 두 가진주파수 ω_1 과 ω_2 에 대하여 위의 정보를 ANSYS의 FULL 파일로 출력한다. 위에서 설명한 식 (21)의 정보를 포함한 ANSYS의 FULL 파일을 읽은 후, \mathbf{K}_c 의 실수 부분만을 고려하여 주어진 초기 시스템 행렬 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 를 얻고, 앞에서 설명한 아놀디 과정을 적용하여 식 (2)의 변환행렬 \mathbf{V} 를 생성한다. 최종적으로 생성된 식 (3)의 축소 모델은 Matrix Market 형태⁽¹³⁾로 출력하여, Matlab⁽¹⁴⁾에서 이 정보를 다시 읽어드려 축소 시스템에 대한 고유치 해석을 수행한다(Fig. 2 참고).

3. 적용 예제

3.1 자동차 휠

자동차 휠 모델의 정지상태와 회전상태에 대한

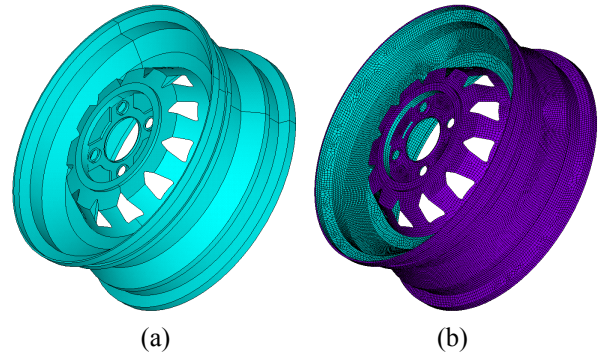


Fig. 3 ANSYS model of a wheel: (a) CAD and (b) finite element mesh (shell modeling)

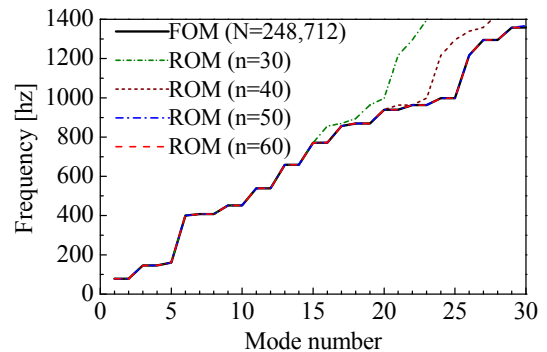


Fig. 4 Comparison of natural frequencies between FOM and ROM ($\Omega=0$ rad/s)

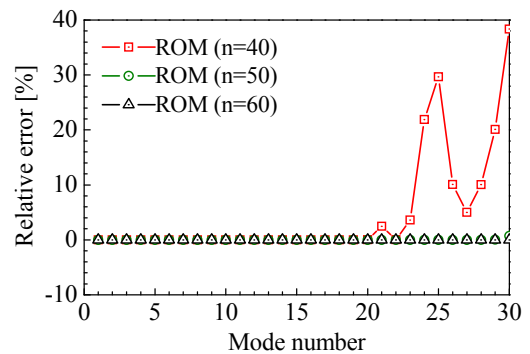


Fig. 5 Relative errors between FOM and ROM according to the reduced order

고유진동해석에 축소모델을 이용하여 제안한 방법의 정확도와 효율성을 검토하였다. Fig. 3은 각각 휠의 CAD 및 ANSYS 유한요소모델을 나타내며, 이때 유한요소모델은 41,207개의 쉘요소(SHELL63)와 41,612개의 절점으로 구성되었다. 경계조건으로 휠 중앙의 볼트자리에 해당되는 절점은 모두 구속되었다. 휠의 재료는 탄소강(carbon steel)으로서 물성치는 탄성계수 81.2 GPa, 푸아송비 0.25, 밀도 7860 kg/m³로 설정하였다.

Fig. 4는 초기 유한요소모델(FOM; N=248,712)과

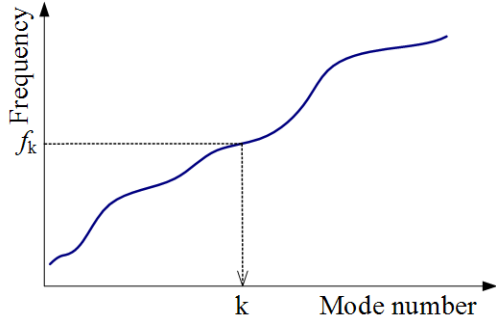


Fig. 6 The highest natural frequency f_k of interest and its corresponding mode number k

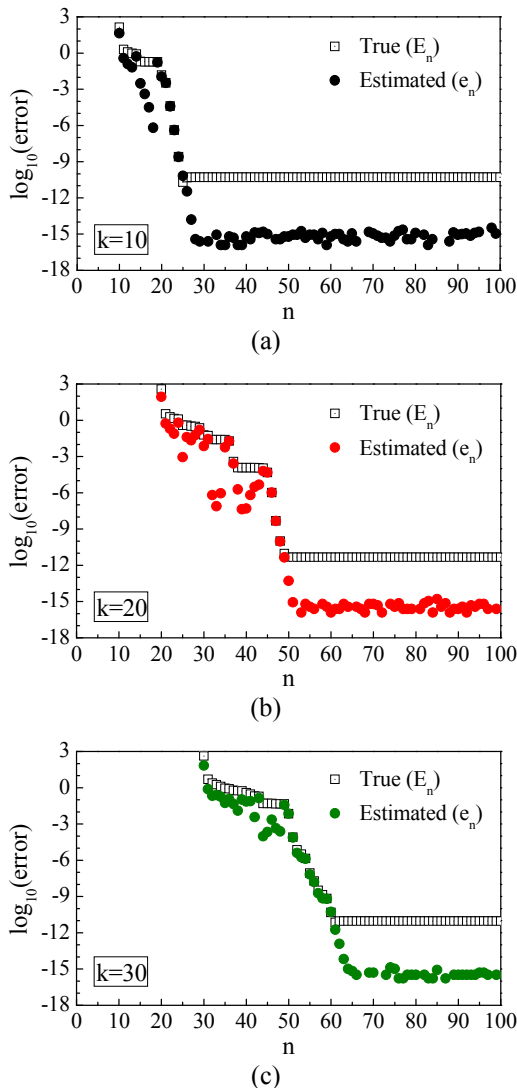


Fig. 7 Comparison between the true errors and the error convergence indicators for several natural frequencies: (a) $k=10, f_{10}=451.8$ hz; (b) $k=20, f_{20}=940.0$ hz; (c) $k=30, f_{30}=1358.5$ hz

축소모델(ROM; $n=30\sim60$)로 계산한 초기 30개의 고유진동수를 비교하여 도시한 것이다. FOM에서는 block Lanczos법⁽¹²⁾을 이용하여 고유진동수를 계

산하였다. 이 문제의 경우, 구조체의 형상이 대칭이므로 중복되는 모드형상으로 가지는 고유치 문제이다. 관심 주파수영역은 30번째 고유진동수 ($f_{30}=1358.5$ hz)까지를 고려하였다. 축소모델의 자유도를 30에서 60까지 10씩 증가시키며 결과를 비교하였는데, 축소모델의 자유도가 $n=30$ 인 경우에 15번째 고유진동수까지 상대오차 0.01 %이내로 정확히 예측할 수 있으며, $n=40$ 인 경우는 20번째 고유진동수까지 상대오차 0.01 %이내로 예측할 수 있었다. 축소모델의 자유도가 $n=50$ 인 경우, 29번째 고유진동수에서 0.01 %의 상대오차가 발생하였으며, $n=60$ 인 축소모델은 초기 유한요소모델의 30번째 고유진동수까지 결과와 일치하였다(Fig. 5 참고). 이때, 상대오차는 다음 식으로 계산하였다.

$$\text{Relative error (\%)} = \frac{f_{\text{ROM}} - f_{\text{FOM}}}{f_{\text{FOM}}} \times 100 \quad (22)$$

이 적용 예제를 통하여 관심있는 최대 고유진동수의 차수(k)보다 축소모델의 자유도(n)를 더 크게 선정해야 함을 확인할 수 있는데 이 경우, $n \approx 2k$ 이면 충분한 정확도를 얻을 수 있었다. 축소모델의 차수(n)가 증가할수록 축소모델의 결과는 더욱 높은 고유진동수까지 일치하는 것을 수치적으로 확인할 수 있었다. 또한, 변환행렬 \mathbf{V} 의 생성시 하중 벡터 \mathbf{f} 를 식 (17)에서 제안한 열벡터 \mathbf{f}_1 를 사용함으로써 하중분배벡터의 영향을 제거하여 정확한 축소모델을 생성할 수 있었다.

고유진동해석에서 설계에 필요한 높은 정확도를 가지면서 최소인 축소모델의 차수(n_{\min})를 결정하는 것은 해석의 정확도와 효율성 측면에서 중요한 문제이다. 이러한 축소모델의 차수를 공학적 관점에서 자동적으로 결정할 수 있도록 고유치 해석에 대한 오차수렴지표(error convergence indicator)⁽⁴⁾를 제안하였다. 이 오차수렴지표는 주파수응답 해석 및 다른 고유치 해석 방법의 수렴조건 등을 참고하였다.⁽¹⁵⁾ Fig. 6에서 설계에 필요한 최대 관심주파수를 f_k 라고 가정하면, 그 때 해당되는 고유진동모드는 초기 k 번째이다. 축소모델의 차수를 n 이라고 하면, 일반적으로 $n \geq k$ 이어야 축소모델로부터 필요한 개수인 k 개의 고유진동수를 계산할 수 있으며 이 때, 오차수렴지표 ($e_n(k)$) 및 최소 차수(n_{\min})는 다음 식으로 정의한다.

$$e_n(k) = \frac{|f_k^{(n)} - f_k^{(n+1)}|}{f_k^{(n+1)}} \quad n \geq k \quad (23)$$

$$n_{\min} = \min \{n | e_n(k) \leq \varepsilon \quad \varepsilon : \text{a small value}\} \quad (24)$$

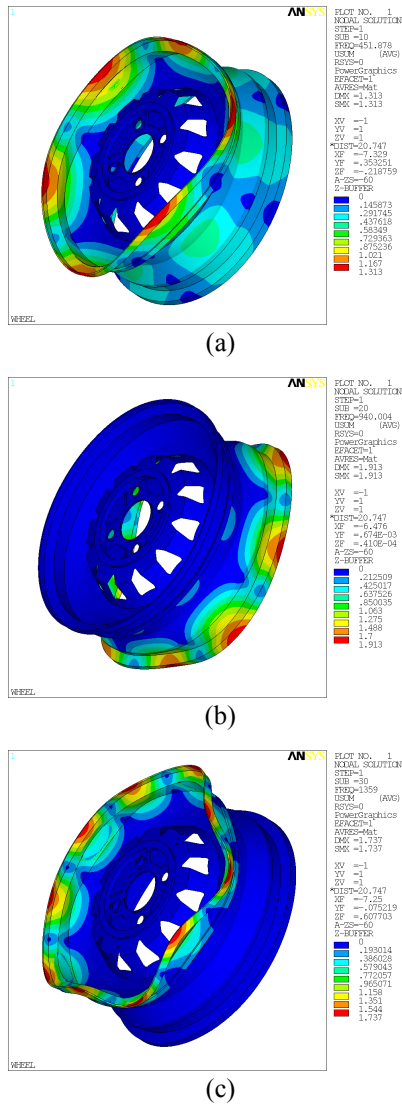


Fig. 8 Mode shapes considered in Fig. 7: (a) 10th mode; (b) 20th mode; (c) 30th mode

여기서, $f_k^{(n)}$ 는 n 차 축소모델로 계산된 k 번째 고유진동수를 나타낸다. 따라서, 오차수렴지표는 n 차 축소모델로 계산한 k 번째 고유진동수와 $n+1$ 차 축소모델로 계산한 k 번째 고유진동수의 상대오차를 의미한다. 이때, 수치적으로 $f_k^{(n)}$ 가 유효숫자 2s개까지의 정확도를 갖기 위해서는 매우 작은 값 ε 는 적어도 10^{-2s} 보다 작거나 같아야 함이 알려져 있다.

Fig. 7에 각각 $k=10, 20, 30$ 에 해당되는 고유진동수에 대하여 진오차(true error)와 오차수렴지표를 비교하였다. 각 경우에 해당되는 고유진동모드는 Fig. 8에 나타내었다. 축소모델의 차수는 $n=1\sim 100$ 에 대하여 고려하였다. 이 때, k 번째 고유진동수에 대한 진오차($E_n(k)$)는 다음 식으로 계산되었다.

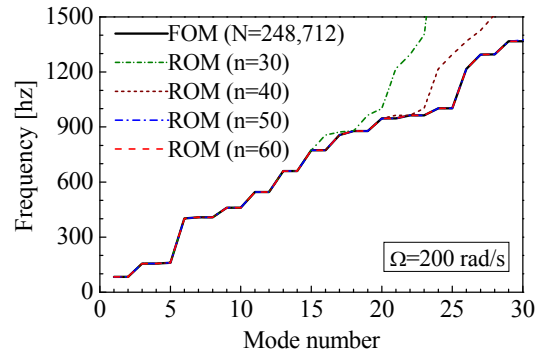


Fig. 9 Comparison of natural frequencies between FOM and ROM ($\Omega=200$ rad/s)

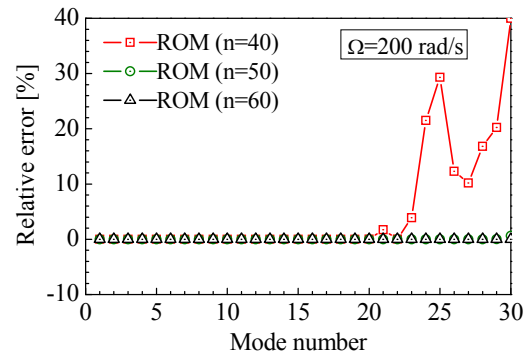


Fig. 10 Relative errors between FOM and ROM according to the reduced order

$$E_n(k) = \frac{|f_k^{(n)} - f_k|}{f_k} \quad (25)$$

여기서, f_k 는 초기 ANSYS 모델(FOM)로 계산된 k 번째 고유진동수를 나타낸다. 본 예제에서 고려한 k 의 경우, 축소모델의 차수가 대략 $n \approx 2k$ 부근부터 두 오차값이 모두 급격히 줄어들었으며, 진오차 $\log_{10}(E_n(k))$ 는 $-10\sim -12$ 부근에 수렴하였다. 진오차가 이 값에 수렴하는 이유는 진오차 계산에 사용된 FOM의 고유진동수 결과가 12자리의 유효숫자를 가지기 때문으로 더 높은 정확도를 얻기 위해서는 더 많은 자리의 유효숫자를 이용해야 한다. 오차수렴지표 $\log_{10}(e_n(k))$ 는 $-15\sim -16$ 부근에 수렴하는데, 오차수렴지표 계산에 사용된 Matlab의 고유진동수 결과는 15~16자리의 유효숫자를 이용하였기 때문이다. 오차수렴지표 계산에 사용된 수치가 더 많은 유효숫자를 가지고 있기 때문에 좀더 작은 값에 수렴하였을 뿐 많은 k 에 대하여 수치적으로

$$E_n(k) \approx e_n(k) \quad (26)$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서, 식 (26)를 이용

하면 관심있는 고유진동모드 k 에 대하여 요구되는 $2s$ 개 유효숫자까지의 정확도를 지닌 축소모델의 차수 n 을 사용자의 추가적인 노력 없이 자동적으로 결정할 수 있다. 즉, 진오차를 직접 계산하지 않고 오차수렴지표를 사용하여 대략 지정한 유효숫자의 정확도를 지닌 가장 경제적인 축소모델의 차수 n_{min} 를 자동적으로 구할 수 있다.

휠이 회전하는 경우, 원심력으로 인한 프리스트레스(prestress)가 발생하여 고유진동수와 고유진동모드에 변화가 발생한다. Fig. 9에는 휠의 회전 ($\Omega=200$ rad/s)에 의해 발생하는 프리스트레스 하에서 고유진동해석을 수행한 FOM과 ROM을 사용하여 계산한 고유진동수 결과를 비교하였다. 프리스트레스가 존재하는 경우에도 축소모델의 결과는 정지상태의 결과와 유사한 정확도를 보였다(Fig. 10 참고). 이전과 동일하게 축소모델의 자유도를 30에서 60까지 10씩 증가시키며 결과를 비교하였는데, 축소모델의 자유도가 $n=30$ 인 경우에 15번째 고유진동수까지 상대오차 0.01 %이내로 정확히 예측할 수 있으며, $n=40$ 인 경우는 20번째 고유진동수까지 상대오차 0.01 %이내로 정확히 예측할 수 있었다. 축소모델의 자유도가 $n=50$ 인 경우, 29번째 고유진동수에서 0.01 %의 상대오차가 발생하였으며, $n=60$ 인 축소모델은 초기 유한요소모델의 30번째 고유진동수까지 결과와 일치하였다. 이를 통하여 프리스트레스 고유진동해석에도 축소모델링기법을 통하여 정확하고 효율적인 고유진동수를 계산할 수 있음을 확인할 수 있었다.

3.2 컴프레서 임펠러

Fig. 11은 컴프레서 임펠러의 CAD 및 ANSYS 유한요소모델을 나타내며, 유한요소모델은 28,485개의 10 절점 사면체요소(SOLID92)로 구성되었고, 유한요소모델의 총 절점수는 54,037개이다. 축(shaft) 및 부분의 모든 절점은 경계조건으로 구속되었다. 임펠러의 재료는 철(steel)로서 물성치는 탄성계수 193 GPa, 푸아송비 0.29, 밀도 8030 kg/m³로 설정하였다.

초기 유한요소모델(FOM; N=161,190)과 축소모델(ROM; n=60~120)로 계산한 첫 50개의 고유진동수를 비교하여 Fig. 12에 함께 도시하였다. FOM에서는 block Lanczos법⁽⁸⁾을 이용하여 고유진동수를 계산하였다. 첫번째 고유진동모드는 축의 굽힘모드이고, 첫 비틀림모드는 3번째 모드로 2113 hz의 고유진동수를 가진다. 첫 50개의 고유진동모드를 고려하였으며 이때, 고유진동수는 $f_{50}=17.2$ khz이다. 축소모델의 자유도가 $n=100$ 인 경우, 50번째 고유

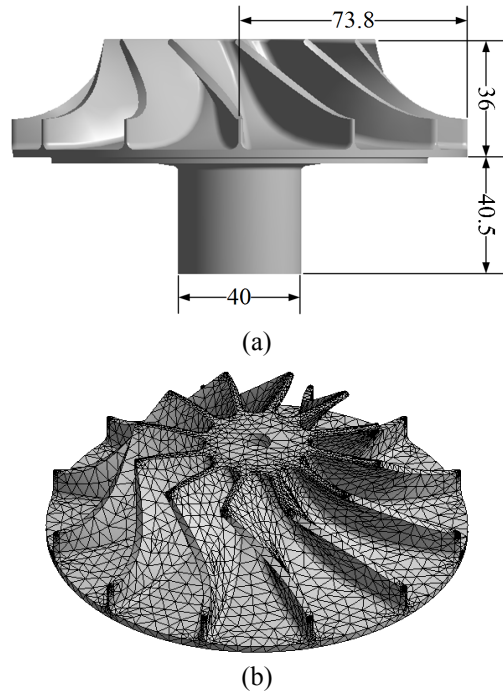


Fig. 11 (a) CAD geometry model and (b) ANSYS finite element mesh of the compressor impeller model

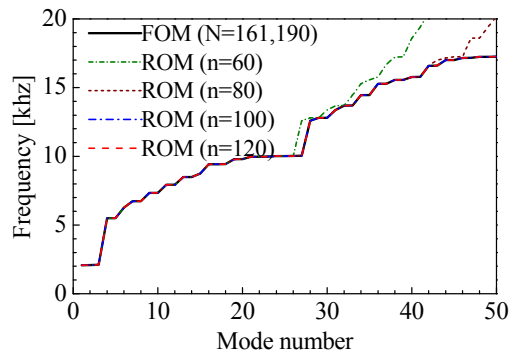


Fig. 12 Comparison of natural frequencies between FOM and ROM ($\Omega=0$ rad/s)

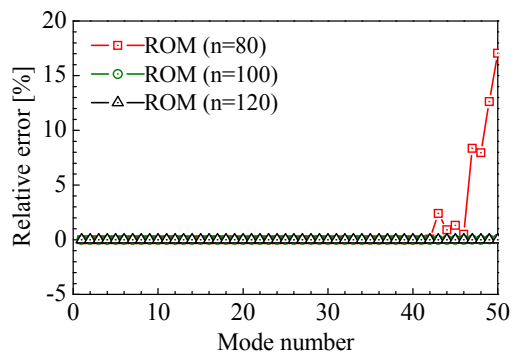


Fig. 13 Relative errors between FOM and ROM according to the reduced order

진동수까지 약 0.07 % 오차 이내로 정확히 예측할 수 있었으며, 축소모델의 자유도가 $n=120$ 인 경우

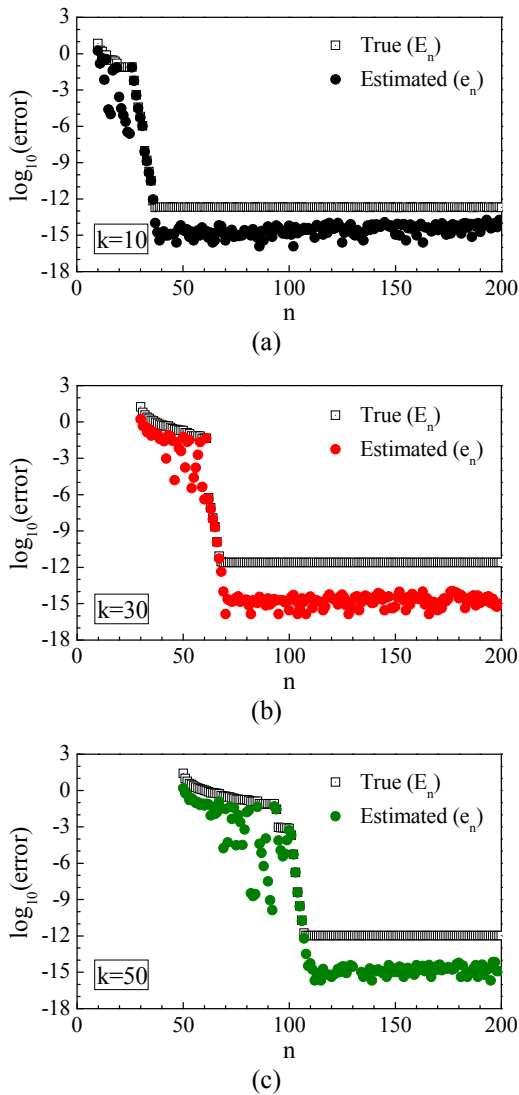


Fig. 14 Comparison between the true errors and the error convergence indicators for several natural frequencies: (a) $k=10, f_{10}=7.33$ khz; (b) $k=30, f_{30}=12.8$ khz; (c) $k=50, f_{50}=17.2$ khz

는 초기 유한요소모델의 50번째 고유진동수까지 결과가 일치하였다. 축소모델의 자유도를 점점 높임으로써 좀더 고차 고유진동수까지 정확하게 일치하는데, 이것은 테일러 급수 전개점(현재 축소모델의 경우, $s_0=0$ rad/s)에서부터 관심주파수 영역이 멀어지면 축소모델과 초기 유한요소모델 사이의 오차가 커지지만 축소모델의 자유도를 높이면 더 높은 고유진동수 영역까지 응답이 일치하는 모멘트 일치법의 특징을 잘 나타내고 있다. 또한, 해석 및 설계시 관심있는 고유진동수의 차수(k)보다 축소모델의 자유도(n)를 크게 선정해야 하는데, 이 문제에서도 $n \approx 2k$ 이면 충분한 정확도를 기대할 수 있었다(Fig. 13 참고).

Fig. 14에 각각 $k=10, 30, 50$ 에 해당되는 고유진동

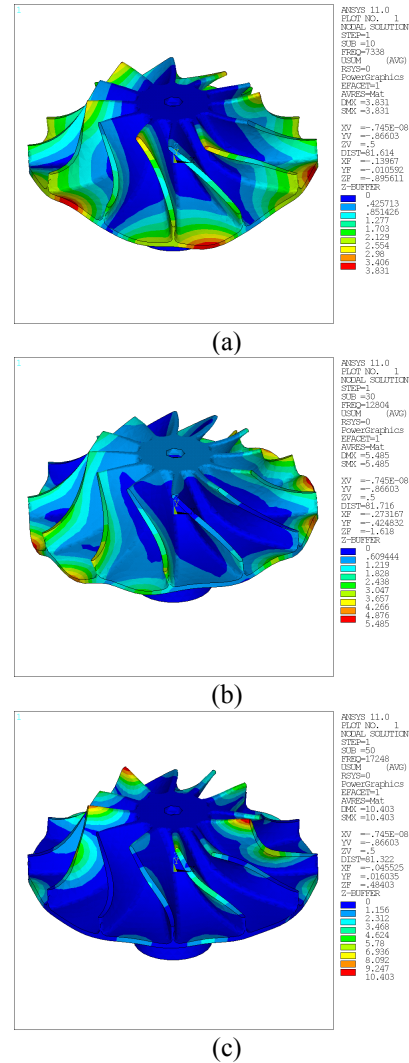


Fig. 15 Mode shapes considered in Fig. 14: (a) 10th mode; (b) 30th mode; (c) 50th mode

수에 대하여 진오차와 오차수렴지표를 비교하였다. 각 경우에 해당되는 고유진동모드는 Fig. 15에 나타내었다. 축소모델의 차수는 $n=1 \sim 200$ 에 대하여 고려하였다. 고려한 k 의 경우, 축소모델의 차수가 대략 $n \approx 2k$ 부근에서부터 두 오차값이 모두 급격히 줄어들었으며, 진오차 $\log_{10}(E_n(k))$ 는 $-12 \sim -13$ 부근에 수렴하였다. 진오차가 이 값에 수렴하는 이유는 진오차 계산에 사용된 FOM의 고유진동수 결과가 12자리의 유효숫자를 가지기 때문으로 더 높은 정확도를 얻기 위해서는 더 많은 자리의 유효숫자를 계산에 이용해야 한다. 반면에 오차수렴지표 $\log_{10}(e_n(k))$ 는 $-14 \sim -16$ 부근에 수렴하는데, 오차수렴지표 계산에 사용된 고유진동수 결과는 15~16자리의 유효숫자를 가지고 있기 때문이다. 훗 문제의 경우와 같이 오차수렴지표 계산에 사용된 수치가 더 많은 유효숫자를 가지고 있기 때문

Table 1 Comparison of computation times in seconds

(a) Wheel problem

Computation time (sec)	Full ANSYS model (N=248,712)	Reduced model (n=100)
Meshing in ANSYS	20	20
Simulation in ANSYS	771	-
Processing of the FULL files*	-	66
Arnoldi process	-	136
Eigenvalue Simulation in Matlab	-	1
Total time	791	223

(b) Compressor impeller problem

Computation time (sec)	Full ANSYS model (N=161,190)	Reduced model (n=100)
Meshing in ANSYS	12	12
Simulation in ANSYS	456	-
Processing of the FULL files*	-	55
Arnoldi process	-	114
Eigenvalue Simulation in Matlab	-	1
Total time	468	182

* The full-size harmonic simulations are done in ANSYS.

에 좀더 작은 값에 수렴하였을 뿐 많은 k의 경우에 대하여 수치적으로 식 (26)의 관계가 여기에서도 성립함을 알 수 있다.

컴프레서 임펠러가 고속으로 회전하는 경우, 원심력에 의한 프리스트레스(prestress)가 발생하여 고유진동수와 고유진동모드에 변화가 발생할 수 있다. Fig. 16에는 임펠러의 회전($\Omega=1,000$ rad/s)에 의한 프리스트레스 하에서 고유진동해석을 수행한 FOM과 ROM을 사용하여 계산한 고유진동수 결과를 비교하였다. 프리스트레스가 존재하는 경우에도 축소모델의 결과는 정지상태의 결과와 유사한 정확도를 보였다(Fig. 17 참고).

축소모델의 자유도를 80에서 120까지 20씩 증가시키며 결과를 비교하였는데, 축소모델의 자유도가 n=80인 경우에 41번째 고유진동수까지 상대오차 0.001 %이내로 정확히 예측할 수 있으며, n=100인 경우는 46번째 고유진동수까지 상대오차 0.001 %이내로 정확히 예측할 수 있었다. 축소모델의 자유도가 n=120인 경우는 초기 유한요소모델의 50번째 고유진동수까지 결과와 일치하였다.

컴프레서 임펠러의 경우에 회전축에 가까운 쪽으로 질량이 모여 있으므로 회전($\Omega=1,000$ rad/s)에 따른 원심력에 의한 고유진동수의 변화량은 대략 3 hz 미만으로 그 영향은 미약하였다. 반면에 휠의 경우, 회전축에 가까운 쪽보다는 휠의 둘레에 질량이 모여 있으므로 회전($\Omega=200$ rad/s)에 따른 원심력에 의한 고유진동수의 증가량은 컴프레서 임

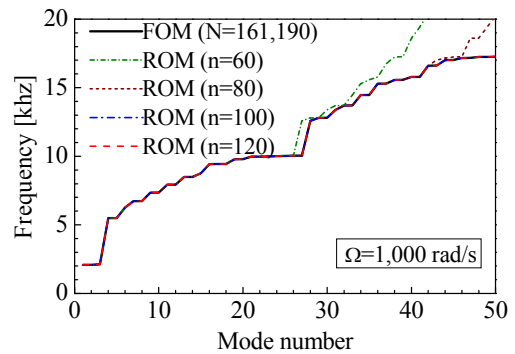


Fig. 16 Comparison of natural frequencies between FOM and ROM ($\Omega=1,000$ rad/s)

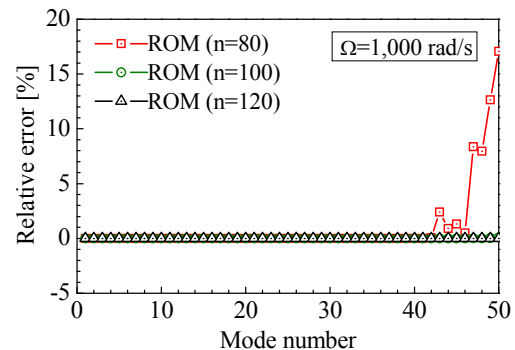


Fig. 17 Relative errors between FOM and ROM according to the reduced order

펠러의 경우보다 큼을 알 수 있다.

3.3 계산시간 비교

각 방법에 따라서 고유진동해석에 소요되는 계

산시간을 비교하였다. FOM에 대한 고유진동해석은 ANSYS의 block Lanczos법을 이용하여 수행되었다. 축소모델을 이용하여 고유진동해석을 수행하기 위해서는 다음 단계에 따른 계산시간이 소요된다.

- 1) 초기 유한요소모델의 시스템행렬 정보를 포함한 ANSYS의 FULL 파일을 생성하기 위하여 서로 다른 가진주파수에 대한 주파수응답 해석을 수행하는 시간
- 2) 두 개의 FULL 파일을 읽고 처리하는 시간
- 3) 아놀디 과정을 통하여 변환행렬 V 의 열벡터를 구하는 시간
- 4) Matlab에서 축소모델을 이용하여 고유진동해석을 수행하는 시간

해석에는 HP workstation xw8200으로 3.80 GHz Intel Xeon® CPU 2개에 4 GB RAM을 장착한 32-bit Windows XP 기반의 시스템이 이용되었다.

휠 문제의 축소모델을 생성하고 이를 이용하여 고유진동해석을 수행한 경우, 대략 223 s가 소요되었고, 컴프레서 임펠러 문제의 경우에는 대략 182 s가 소요되었는데 이것은 초기 유한요소모델을 이용하여 ANSYS에서 수행한 계산시간의 30~40%에 해당하였다. 따라서, 여러 가지 회전속도에 대한 고유진동수 변화를 파악해야 하는 프리스트레스 고유진동해석에 이 방법을 사용하면, 계산시간 측면에서 더욱 효과적일 것이다.

4. 결론

본 논문에서는 주파수응답 해석에 주로 사용되는 모멘트 일치법과 크리토프 부공간에 근거한 모델차수축소법을 이용하면 구조물의 고유진동해석, 나아가 회전으로 인한 프리스트레스 고유진동해석 문제를 정확하면서도 매우 효율적으로 계산할 수 있음을 보였다. 본 논문을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 시스템의 주파수응답 해석에 주로 사용되는 모멘트 일치법과 크리토프 부공간에 근거한 기존의 모델차수축소법에서 변환행렬 V 의 생성시, 하중벡터 f 를 식 (17)에서 제안한 열벡터를 이용함으로써 하중분배벡터의 영향을 제거하여 대형 고유치 문제에 정확한 축소모델을 생성할 수 있음을 확인하였다.
- (2) 제안한 축소모델링기법을 구조물의 회전에 의해 발생하는 프리스트레스 하에서의 고유진동해석을 수행하는 경우에 적용하여 대형 유한요소모델의 프리스트레스 고유진동해석을 효과적으로 수

행할 수 있었다.

(3) 248,712개의 자유도를 가지는 자동차 휠의 유한요소모델에서 계산한 초기 30개의 고유진동수를 축소모델의 결과와 비교하였을 때, 축소모델의 자유도가 $n=50$ 인 경우는 29번째 고유진동수에서 0.01%의 상대오차가 발생하였으며, $n=60$ 인 축소모델은 초기 유한요소모델의 30번째 고유진동수까지 결과와 일치하였다.

(4) 161,190개의 자유도를 가지는 컴프레서 임펠러의 유한요소모델에서 계산한 초기 50개의 고유진동수를 축소모델의 결과와 비교하였을 때, 축소모델의 자유도가 $n=100$ 인 경우는 50번째 고유진동수까지 약 0.07% 오차 이내로 정확히 예측할 수 있었으며, 축소모델의 자유도가 $n=120$ 인 경우는 초기 유한요소모델의 50번째 고유진동수까지 결과가 일치하였다.

(5) 문제에 따라서 차이는 발생하지만 대략 축소모델의 차수가 $n \approx 2k$ 인 축소모델로 충분히 정확히 고유진동수를 도출할 수 있었다.

(6) 제안한 오차수렴지표를 이용하면, 원하는 k 번째 고유진동수까지 요구되는 유효숫자의 정확도를 지닌 축소모델의 차수 n 을 사용자의 추가적인 입력 없이 자동적으로 결정할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2009학년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2009-0087705).

참고문헌

- (1) Han, J. S., 2006, "System Reduction Method for Eigenvalue Analysis of Structures," *Proceedings of the KSME 2006 Fall Annual Meeting*, pp. 7~12.
- (2) Joo, B. H. and Lee, B. C., 2003, "Improvement of Computational Efficiency of the Subspace Iteration Method for Large Finite Element Models," *Transactions of the KSME A*, Vol. 27, No. 4, pp. 551~558.
- (3) Choi, D., Kim, H. K. and Cho, M., 2007, "Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (I) – Undamped Structural Systems," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 2, pp. 211~220.
- (4) Han, J. S. and Ko, J. H., 2009, "Frequency Response Analysis of Array-Type MEMS Resonators by Model Order Reduction Using Krylov Subspace Method," *Transactions of the KSME A*, Vol. 33, No. 9, pp. 859~992.

- (5) Han, J. S., 2007, "Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 5, pp. 541~549.
- (6) Han, J. S., 2006, "Efficient Vibration Simulation Using Model Order Reduction," *Transactions of the KSME A*, Vol. 30, No. 3, pp. 310~317.
- (7) Han, J. S., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Efficient Optimization of Transient Dynamic Problems in MEMS Devices Using Model Order Reduction," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 822~832.
- (8) Rudnyi, E. and Korvink, J., 2006, "Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp. 349~356.
- (9) Su, T. J. and Craig, Jr. R. R., 1991, "Krylov Model Reduction Algorithm for Undamped Structural Dynamics Systems," *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 14, pp. 1311~1313.
- (10) Freund, R. W., 2000, "Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 395~421.
- (11) Qu, Z., 2004, "*Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis*," Springer.
- (12) ANSYS, 2007, *ANSYS Theory Reference 11.0*, SAS IP, Inc.
- (13) Matrix Market, <http://math.nist.gov/MatrixMarket/>, 2011.
- (14) The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com>, 2011.
- (15) Bathe, K. J., 1996, "*Finite Element Procedures*," Prentice-Hall, Inc.