신뢰성응용연구 신뢰성기술
제11권, 제2호. pp.167-176, 2011

수리 후 고장률이 지수적으로 증가하는 경우에 최적 예방보전 정책

김태희 · 나명환[1)]

전남대학교 통계학과

A Study on Optimal Preventive Maintenance Policy When Failure Rate is Exponentially Increasing After Repair

Tae Hui Kim · Myung Hwan Na

Department of Statistics, Chonnam National University

Abstract

This paper introduces models for preventive maintenance policies and considers periodic preventive maintenance policy with minimal repair when the failure of system occurs. It is assumed that minimal repairs do not change the failure rate of the system. The failure rate under prevention maintenance received an effect by a previously prevention maintenance and the slope of failure rate increases the model where it considered. Also the start point of failure rate under prevention maintenance considers the degradation of system and that it increases quotient, it assumed. Per unit time it bought an expectation cost from under this prevention maintenance policy. We obtain the optimal periodic time and the number for the periodic preventive maintenance by using Nakagawa's Algorithm, which minimizes the expected cost per unit time.

Keywords: preventive maintenance, reliability, expected cost, optimal periodic time

---

1) 교신저자 nmh@chonnam.ac.kr
논문접수일 : 2011년 04월 13일 논문수정일 : 2011년 05월 25일 게재확정일 : 2011년 06월 03일

1. 서 론

예방보전(Preventive Maintenance; PM)은 시스템이 고장이 났을 때 발생할 수 있는 여러 가지 손실을 줄이기 위해 미리 정해진 간격 또는 규정된 기준에 따라 수행되는 계획된 보전을 의미한다. 예방보전에서 주된 관심 사항은 예방보전들 사이의 시간길이를 어느 정도로 할 것인지? 또는 시스템을 교체할 때까지 예방보전을 몇 번 정도할 것인지를 결정하는 것이다. 이러한 것들을 결정하는 기준은 여러 가지가 있을 수 있으나, 일반적으로 예방정책에 대한 단위시간당 총비용을 최소화 시키는 방법을 많이 사용한다.

여기에서는 최소 수리를 수반하는 예방 보전정책에 대해 생각해 보자. 최소수리를 한다는 것은 수리를 한 후 시스템은 예방보전을 하기 전의 상태와 같은 상태로 복구된다. 즉 수리 후 시스템의 고장률은 변화하지 않는다고 가정한다. 최소수리의 예로는 시스템이 크고 복잡한 경우에는 많은 컴포넌트들로 구성되어 있기 때문에 어느 한 부분의 수리를 하였을 때 전체 시스템의 고장률에는 영향을 주지 않는다. Barlow and Hunter(1960)는 최소 수리와 함께 주기적인 교체를 수행하는 예방보전 정책을 고려하였다. 이 정책은 계획한 시간 kT (T는 교체주기이고, k는 교체횟수를 나타내는 정수)에서 시스템을 교체하고 이 사이에 고장이 발생한 경우 최소 수리를 행한다. Morimura(1963)는 $k-1$번째 고장에 대해서는 최소 수리를 하고 k번째 고장에서 예방보전을 수행하는 정책을 고려했다. Zhang와 Jafdine(1998)는 정비를 수반하는 보전모형으로 시스템에 최소 수리, 정비, 재생의 3가지 보전조치를 수행하는 방법으로서 시스템의 고장이 발생할 때 마다 최소 수리를 행하며 주기적으로 정비를 수행하는 예방보전정책을 제안하였다. 이때 최소수리 비용은 고장률에 따라 증가한다. Nakagawa(1986)은 정비를 포함하는 주기적이고 연속적인 예방보전 정책을 제안하였다. 이 모형 에서 예방보전은 주기적 시간 kx 혹은 일정한 구간 x_k ($k=1,2,3...N$)에서 행해진다. 시스템은 N번째 예방보전에서 새로운 시스템으로 교체된다. 시스템이 예방보전 사이에서 고장 나면 단지 최소수리만 수행한다. 그리고 시스템은 예방보전과 고장률 사이에서 서로 다른 분포를 가지며 고장률은 예방보전의 횟수에 따라 증가한다. Canfield(1986)는 주기적 예방보전 정책이 시스템의 열화 과정을 늦추는 반면에 고장률은 단조 증가를 유지하는 모형에 대해 논의하였으며 Jung(1998), 박동호 외(1998)의 모형은 이러한 Canfield의 모형에 기초한다.

본 연구에서는 예방보전하의 고장률이 이전 예방보전에 의해 영향을 받아 고장률의 기울기가 증가하는 모형을 제안한다. 예방보전 기간 동안 발생하는 최소수리비용, 예방보전 비용, 교체비용을 고려한 기대비용 분석에서 단위시간당 기대비용을 최소화 하는 최적주기와 횟수를 구하고자 한다.

2. 최적의 예방보전 정책

이제 예방보전에 의해 감소하는 고장률이 시간에 따라 증가하면서 고장률의 기울기가 예방보전의 횟수에 따라 증가하는 경우를 생각해 보자. 예방보전 정책의 목적은 시스템이 작동

되고 있는 동안에 시스템의 열화 과정을 늦추고 시스템의 수명을 늘이는 것이다. 예방보전 직후의 시스템의 상태가 이전에 수행되었던 예방보전직후의 시스템의 상태만큼 좋아지지는 않는 경우의 모형을 고려하자. 이 논문은 고장률의 기울기가 이전 예방보전 직후의 고장률의 기울기보다 큰 경우를 고려한다. 각 예방보전 직후의 특정한 시점(x)에서 고장률의 기울기는 이전 예방보전 직후의 특정한 시점(u)에서의 고장률의 기울기보다 크다고 가정한다(u<x). 그러므로 각 예방보전 후의 특정한 시점에서 고장률의 기울기는 이전 예방보전직후의 특정한 시점에서 고장률의 기울기보다 α배 만큼 크다고 하자. x가 주기시점인 경우 (k+1) 주기에서의 고장률은 이전 주기의 고장률과 다음과 같은 관계를 가지게 된다.

$$h'[\mu+(k+1)x]=\alpha h'(\mu+kx),\ \alpha>0,\ 0<\mu<x,\ k=0,1,2,\cdots,N.$$

시스템의 열화(degradation)비율은 시스템의 운영(operating)시간에 따라 증가하게 된다. 따라서 각각의 예방보전직후의 고장률의 시작점들이 지수형태(즉, $e^{\beta t}-1$)를 구성하는 경우를 고려하자. 이제 다음의 예방보전 정책 모형을 고려하자. 시스템은 주기적 시간 kx에서 예방적으로 보전되고 N번째 예방보전에서 새로운 시스템으로 교체된다.
예방보전직후의 고장률은 지수적으로 시간에 따라 증가하며 각 예방보전직후의 특정시점에서 고장률의 기울기는 이전 주기의 고장률보다 α배 만큼 크다. 그리면 위와 같은 시스템의 예방보전하에서 고장률 함수는 다음과 같다.

$$h_{pm}(t)=\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1\ ,\ kx<t\leqq(k+1)x\ \ ,k=0,1,2,\cdots,N.$$

단, 여기서 $h(t)$는 첫 번째 예방보전이 수행될 때까지의 고장률 함수이며 t=0일때는 $h_{pm}(0)=h(0)=0$이다. 또한 $\alpha>1$, $\beta>0$으로 알려진 상수 값이다.
예로, 다음과 같은 고장률 함수 $h(t)=t^2$가 있다고 하자. 이때의 $x=3$, $\alpha=1.5$이고 $\beta=0.2$의 값을 갖는다고 하자. 그러면 시간 t 에 따른 $h_{pm}(t)$는 아래의 식과 같고 고장률은 <그림2.1>이 타점된다.

$$\begin{aligned} h_{pm}(t)&=\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1\\ &=(1.5)^k h(t-3x)+e^{0.6k}-1,\quad 3k<t\leqq 3(k+1)\ \ ,k=0,1,2,\cdots,N \end{aligned}$$

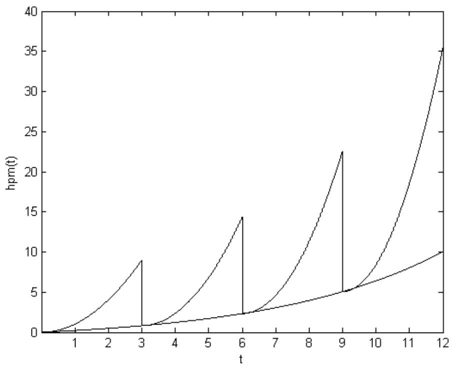

그림 2.1 예방보전

<표 2.1>에서 고장률 값을 보면 예방보전을 하지 않았을 경우 t=3인 경우 값이 9이지만 첫 번째 예방보전을 시작했을 때 값은 0.822로 고장률이 감소한 다음에 증가함을 알 수 있다. 두 번째, 세 번째 예방보전 시작점을 보면 앞 시점의 고장률보다 감소함을 알 수 있다.

<표 2.1> 시간에 따른 예방보전 고장률 값

k	0				1(첫번째 예방보전)			
t	0	1	2	3	3	4	5	6
hpm(t)	0	1	4	9	0.82212	2.3221	6.8221	14.322
k	2(두번째 예방보전)				3(3번째 예방보전)			
t	6	7	8	9	9	10	11	12
hpm(t)	2.3201	4.5701	11.32	22.57	5.0496	8.4246	18.55	35.425

일정 시간 동안 시스템 보전하의 기대비용은 최소수리비용, 예방보전비용 그리고 교체비용을 더한 값을 구간의 기대길이로 나눈 값과 같다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$C(x,N)=\frac{C_m\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kx}^{(k+1)x}(\alpha^k h(t-kx)+e^{\beta kx}-1)dt+(N-1)C_p+C_r}{Nx} \quad (2.1)$$

여기서 C_m은 최소수리 비용이며, C_p는 예방보전의 비용, C_r은 교체비용이고 이들 비용 사이에는 다음과 같은 부등식 $C_r > C_p > C_m$이 성립한다. 기대비용 식 (2.1)을 간단히 정리하면 다음 식이 도출된다.

$$C(x,N)=\frac{C_m(\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\int_o^x h(t)dt+xe^{\beta x}\frac{e^N-1}{e-1}-x)+(N-1)C_p+C_r}{Nx} \quad (2.2)$$

시스템을 보전하는 경우에 가장 관심 있는 부분은 예방보전을 몇 번 할 것인가, 예방보전의 수행 시기는 어느 시점일 것인가의 결정이다. 이를 결정하는 방법은 교체하기 이전에 단위 시간당 기대비용을 최소화 하는 주기와 횟수를 결정하는 것이다. 이와 같이 결정된 주기와 횟수는 최적 주기와 최적 횟수가 된다.

2.1 주기 x가 고정된 경우 최적 횟수 N^*구하기

$x>0$이면 식(2.2)의 $C(x,N)$을 최소화 하는 최적 예방보전 횟수 N^*는 다음 부등식을 만족한다.

$$C(x,N+1)\geq C(x,N) \quad 과 \quad C(x,N)<C(x,N-1).$$

위 첫 번째 부등식을 정리하면 $C(x,N+1)-C(x,N)\geq 0$ 이고 이를 계산하면 좌변은

$$\frac{\mathrm{N}\,(\alpha^{\mathrm{N}+1}-1)-(\mathrm{N}+1)(\alpha^{\mathrm{N}}-1)}{\alpha-1}\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{h}(\mathrm{t})\mathrm{dt}+\mathrm{x}\mathrm{e}^{\beta\mathrm{x}}\frac{\mathrm{N}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}+1}-1)-(\mathrm{N}+1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-1}{\mathrm{e}-1}+\mathrm{x}$$

와 같고 우변은 $(C_r-C_p)/C_m$ 이 된다. 좌변의 식들을 다시 정리하면 첫 번째 부등식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$(N\alpha^N-\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\int_0^x h(t)dt+(\neq^{N}-\frac{e^N-1}{e-1})xe^{\beta x}+x\geqq\frac{C_r-C_p}{C_m}.$$

두 번째 부등식을 정리하면 $C(x,N)-C(x,N-1)<0$ 이고 이를 계산하면 좌변은

$$\frac{(\mathrm{N}-1)\,(\alpha^{\mathrm{N}}-1)-\mathrm{N}\,(\alpha^{\mathrm{N}-1}-1)}{\alpha-1}\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{h}(\mathrm{t})\mathrm{dt}+\mathrm{x}\mathrm{e}^{\beta\mathrm{x}}\frac{(\mathrm{N}-1)\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}}-1)-\mathrm{N}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{N}-1}-1)}{\mathrm{e}-1}+\mathrm{x}$$

와 같고 우변은 $(C_r-C_p)/C_m$ 이 된다. 이 부등식을 최종적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$L(x,N)\geqq(C_r-C_p)/C_m \text{과 } L(x,N-1)<(C_r-C_p)/C_m. \tag{2.3}$$

$L(x,N)$은 아래와 같은 함수이다.

$$L(x,N)=\begin{cases}(N\alpha^N-\dfrac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\displaystyle\int_0^x h(t)dt+(\neq^{N}-\dfrac{e^N-1}{e-1})xe^{\beta x}+x & ,N=1,2\,\ldots.\\ 0 & ,N=0\end{cases}$$

Theorem 2.1 어떤 주어진 $x(>0)$에 대하여 식(2.3)을 만족하는 유한하고 유일한 N^*가 존재한다.
Proof. $\alpha>1,\ \beta>0,\ \ x>0$이므로

$$L(x,N)-L(x,N-1)=N\alpha^{N-1}(\alpha-1)\int_0^x h(t)dt+e^{N-1}(e-1)xe^{\beta x}>0.$$

따라서 $L(x,N)$은 N에 관한 함수이므로 $N\rightarrow\infty$갈수록 무한대로 증가한다. 그러므로 부등식 (2.3)을 만족하는 유한하고 유일한 N^* 가 존재한다. □

2.2 N이 고정된 경우 최적 주기 x^*구하기

$C(x,N)$을 x에 대해 미분하여 0으로 놓으면

$$\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(xh(x)-\int_0^x h(t)dt)+\frac{e^N-1}{e-1}x^2\beta e^{\beta x}=\frac{(N-1)C_p+C_r}{C_m} \tag{2.4}$$

과 같은 식을 얻을 수 있다.

Theorem 2.2 고장률 함수 $h(t)$가 미분가능하고 무한대로 증가하면, 주어진 정수 N에 대해 (2.4)을 만족하는 유한하고 유일한 x^*가 존재한다.
Proof. 식 (2.4)의 좌변을 미분하면

$$\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(xh(x)-\int_0^x h(t)dt)+\frac{e^N-1}{e-1}x^2\beta e^{\beta x}$$
$$=\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(xh'(x))+\frac{e^N-1}{e-1}(2x\beta e^{\beta x}+x^2\beta^2 e^{\beta x})>0.$$

이며 $xh(x)>\int_0^x h(t)dt$이다. 따라서 어떤 정수 N에 대하여 식(2.4)을 만족하는 유한하고 유일한 x^*가 존재하게 된다.

2.3 최적 주기 x^*와 최적 횟수 N^*구하기

이제 x와 N이 고정되어 있지 않은 경우 $C(x,N)$ 을 최소화 시키는 최적 주기 x^*와 예방보전의 최적 횟수 N^*를 찾는 방법을 고려해 보자. 먼저 식(2.4)을 만족하는 x_N을 구하면 단위 시간당 기대비용은 x_N과 N의 함수로 표현된다.

$$C(x_N,N)=\frac{C_m(\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\int_o^{x_N}h(t)dt+x_N e^{\beta x_N}\frac{e^N-1}{e-1}-x_N)+(N-1)C_p+C_r}{Nx_N} \tag{2.5}$$

식 (2.5)이 오로지 N에 관한 함수이므로 다음 식을 만족하는

$$N^*=\min_N C(x_N,N),\quad N=1,2,.....$$

N^*를 구할 수 있다. 주어진 정수 N에 대하여 식(2.4)을 만족하는 유한하고 유일한 x_N이 존재한다. 이렇게 해서 정리 2.2의 결과에 의해 계산된 식 (2.5)을 만족하는 N^*의 값과 x^*는 최적 예방보전 횟수와 식(2.2)에서 $C(x,N)$ 을 최소화하는 최적 주기이다.
직접 x^*와 N^*를 찾아내는 것은 어렵다. 그래서 Nakagawa의 알고리즘이 x^*와 N^*를 찾는데 사용되고 있다. 식 (2.3)과 (2.4)을 만족하는 최적 x^*와 N^*는 계산될 수 있다.
Nakagawa 알고리즘(1986)
단계1.$N=1$을 집어넣고 식(2.4)을 만족하는 x_1을 계산한다.
단계2.$x=x_1$을 집어넣고 식(2.3)을 만족하는 N_1을 계산한다.
단계3.$N=N_1$을 집어넣고 식(2.4)을 만족하는 x_2를 계산한다.
단계4.$N_j=N_{j+1}(j=0,1,2,...)$일 때까지 계속하라. 단, $N_0=1$
그러면 $N^*=N_j$이고 x^*는 정리3.2에 의해 얻어진다.

3. 적용 사례 및 분석

시스템의 수명이 와이블 분포를 따른다고 하자. 그러면 이 분포의 고장률은

$$h(t) = (m/\eta)\,(t/\eta)^{m-1} \quad ,\text{단} \quad t \geqq 0, \qquad m > 1$$

이다. m은 형상모수, η는 척도모수이다. 그럼 가장 간단한 경우로 $m=2$인 경우에 대해 생각해 보자. 이 경우 고장률은 $h(t)=2t/\eta^2$ 이므로 예방보전하의 고장률 함수는 아래와 같다.

$$h_{pm}(t) = \alpha^k h(t-kx) + \exp(\beta kx) - 1 = (2\alpha^k/\eta^2)\,(t-kx)^2 + \exp(\beta k) - 1,$$
$$kx < t \leqq (k+1)x \quad ,k = 0,1,2,\ldots..,N$$

또한 고장률 함수를 식 (2.3)과 (2.4)에 대입하면 단위시간당 기대비용을 x에 대해 미분한 식(3.1)과 부등식(3.2)를 구할 수 있다.

$$\frac{\alpha^N-1}{\alpha-1}(x^2-\frac{x^2}{\eta^2}) + \frac{e^N-1}{e-1}x^2\beta e^{\beta x} = \frac{(N-1)C_p+C_r}{C_m} \tag{3.1}$$

$$L(x,N) \geqq (C_r-C_p)/C_m \text{과 } L(x,N-1) < (C_r-C_p)/C_m \tag{3.2}$$

부등식 (3.2)에서 $L(x,N)$은 다음과 같이 얻어진다.

$$L(x,N) = \begin{cases} (N\alpha^N - \dfrac{\alpha^N-1}{\alpha-1})\dfrac{x^2}{\eta^2} + (Ne^N - \dfrac{e^N-1}{e-1})xe^{\beta x} & ,N=1,2\,\ldots. \\ 0 & ,N=0 \end{cases}.$$

또한 단위시간당 기대비용은 식(3.3)과 같다.

$$C(x,N) = \frac{C_m(\dfrac{\alpha^N-1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{x^2}{\eta^2} + xe^{\beta x}\dfrac{e^N-1}{e-1}) + (N-1)C_p + C_r}{Nx} \tag{3.3}$$

<표 3.1> $\alpha=1.1$, $\beta=0.1$, $h(t)=t$ 일때 x^*와 N^*

	Cp=1			Cp=2		
Cr	N^*	x^*	C	N^*	x^*	C
5	5	2.1907	2.0205	1	4.4721	2.2361
10	10	1.5164	2.6324	3	4.4606	3.1429
15	13	1.3184	3.0782	8	2.2546	3.7967
20	15	1.2312	3.4595	10	1.9692	4.2446
25	16	1.2166	3.8038	12	1.7452	4.6275
30	18	1.1318	4.1244	13	1.6786	4.9758
35	19	1.1110	4.4259	15	1.5124	5.2982
40	20	1.0881	4.7137	16	1.4587	5.6023
45	20	1.1170	4.9902	16	1.4910	5.8923
50	21	1.0896	5.2565	17	1.4352	6.1697

	Cp=3			Cp=5		
Cr	N^*	x^*	C	N^*	x^*	C
5	1	4.4721	2.2361	1	4.4721	2.2361
10	1	6.3246	3.1623	1	6.3246	3.1623
15	1	7.7460	3.8730	1	7.7460	3.8730
20	1	8.9443	4.4721	1	8.9443	4.4721
25	1	10.0000	5.0000	1	10.0000	5.0000
30	1	10.9545	5.4772	1	109545	5.4772
35	1	11.8322	5.9161	1	11.8322	5.9161
40	1	12.6491	6.3246	1	12.6491	6.3246
45	14	1.7807	6.6546	1	13.4164	6.7082
50	15	1.6985	6.9474	1	14.1421	7.0711

[표 3.2] $\alpha = 1.1$, $\beta = 0.1$, $h(t) = 2t$ 일때 x^*와 N^*

	Cp=1			Cp=2		
Cr	N^*	x^*	C	N^*	x^*	C
5	6	1.5285	2.4085	4	2.1925	2.8685
10	9	1.4041	3.0228	6	2.1169	3.6243
15	12	1.2449	3.5037	7	2.1231	4.1919
20	13	1.2520	3.9189	9	1.8911	4.6633
25	14	1.2431	4.2972	11	1.6939	5.0790
30	16	1.1535	4.6477	12	1.6939	5.4550
35	16	1.2009	4.9783	13	1.5828	5.8048
40	17	1.1739	5.2924	14	1.5259	6.1346
45	18	1.1455	5.5940	15	1.4705	6.4489
50	19	1.1164	5.8861	15	1.5056	6.7498

	Cp=3			Cp=5		
Cr	N^*	x^*	C	N^*	x^*	C
5	3	2.6782	3.1052	1	3.1623	3.1623
10	4	2.9015	3.9820	3	3.6562	4.3743
15	5	2.8674	4.6413	3	4.2141	5.1376
20	6	2.7490	5.1977	4	3.9241	5.8070
25	8	2.3458	5.6756	4	4.2216	6.3953
30	9	2.2270	6.0970	5	3.8219	6.9573
35	10	2.1113	6.4798	6	3.4758	7.4671
40	11	2.0024	6.8337	7	3.1767	7.9185
45	12	1.9014	7.1658	8	2.9196	8.3213
50	13	1.8085	7.4815	9	2.6985	8.6878

따라서 Nakagawa(1986)의 알고리즘을 사용하여 최적의 x^*와 N^*를 구해면 다음과 같이 해를 구할 수 있다. <표 3.1>는 고장률이 $h(t) = t$ 일 때 찾아낸 최적 횟수와 주기 값들을 보여준다. 또한 최적 주기와 횟수를 이용하여 단위시간당 기대비용을 구했다. <표3.2>는 고장률이 $h(t) = 2t$ 일 때 찾아낸 최적 횟수와 주기값과 단위시간당 기대비용을 구했다.

4. 결 론

수리 가능한 시스템의 주기적 예방보전 정책에서 시스템의 열화비율이 시스템 운영시간에 따라 증가하므로, 각 예방보전 직후의 고장률의 시작점들이 지수적으로 증가하는 경우의 예방보전 모형을 제시하였다. 그리고 일정 시간 동안 시스템 보전하의 최소수리 비용, 예방보전 비용, 교체비용 등을 포함한 기대비용을 산출하였다. 시스템을 보전하는 경우에 예방보전의 횟수와, 어느 시점에서 수행할 것인지를 결정하기위해 Nakagawa 알고리즘을 적용하여 기대비용 $C(x,N)$을 최소화 하는 최적주기 x^*와 최적횟수N^*를 찾아내었다. 지수 고장률을 갖는 모형에서 예방보전비용이 일정할 때 교체비용이 증가할수록 예방보전 횟수는 증가하고 최적주기는 짧아지는 경향을 나타내었다.

참고문헌

[1] 박동호, 염준근, 정기문(1998) Optimal Policy for Periodic Preventive Maintenance, 한국통계학회, 1998년 춘계학술발표회 논문집, 177-182.

[2] 정기문(1998).A Study on Optimal Periodic Preventive Maintenance Policy of a Repairable System, 동국대학교 대학원 통계학과 박사학위 논문.

[3] Barlow,R.E. and Hunter,L.C.(1960). Optimum Preventive Maintenance Policies Operations Research, vol 9, 90-100.

[4] Canfield R. V.(1986). Cost Optimization of Periodic Preventive Maintenance, IEEE Transactions on Reliability, 35, 78-81.

[5] Nakagawa, T.(1986). Periodic and Sequential Preventive Maintenance Policies, Journal of Applied Probability, vol 23, 536-542 .

[6] Zhang,F. and Jardine, A.K.S(1998). Optimal Maintenance Models with Minimal Repair, Periodic Overhaul and Complete Renewal,IEE Transactions on Reliability, vol 30, 1109-1119.