Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 37, No. 3, pp. 258-263, September 2011.

일반화된 일반상한제약을 갖는 이차원 선형계획 배낭문제 연구

원 중 연†

경기대학교 산업경영공학과

On a Two Dimensional Linear Programming Knapsack Problem with the Generalized GUB Constraint

Joong Yeon Won

Industrial and Management Engineering, Kyonggi University, Gyeonggi-do, 443-760, Korea

We study on a generalization of the two dimensional linear programming knapsack problem with the extended GUB constraint, which was presented in paper Won(2001). We identify some new parametric properties of the generalized problem and derive a solution algorithm based on the identified parametric properties. The solution algorithm has a worst case time complexity of order O(n^2logn), where n is the total number of variables. We illustrate a numerical example.

Keywords: Generalized GUB Constraint, Two Dimensional LP Knapsack Problem, Computational Complexity

1. 서 론

본 연구에서는 다음 문제 (P)와 같이 표현되는 이차원 선형계획 배낭문제의 새로운 모수분석 특성을 보이고, 이를 활용하여 최적해를 효율적으로 찾는 해법에 대해 연구한다.

$$\text{(P)}\quad \text{Maximize}\quad \textstyle\sum_{j\in N} q_j x_j \qquad (1)$$

$$\text{subject to}\quad \textstyle\sum_{j\in N} a_j x_j \leqq T, \qquad (2)$$

$$\textstyle\sum_{j\in N} x_j \leqq r, \qquad (3)$$

$$0 \leqq x_j \leqq 1,\ \ \forall\, j\in N. \qquad (4)$$

여기서 $q_j > 0$, $0 < a_j \leqq T$, $j\in N=\{1, 2, \cdots, n\}$, 그리고 $r > 0$이다.

문제 (P)의 제약식 (3)은 선형계획이나 정수계획 등의 여러 분야에서 빈번히 발생하는 제약형태이다. 제약식 (3)은 제약의 형태가 등식 또는 부등식인지의 여부와 우변상수 r이 1이나 정수값 또는 실수값을 갖는 지의 여부에 따라 다양한 이름으로 불리우고 있으며 그 특성들이 달라진다(Won, 2001, 참조).

본 연구에서는 문제 (P)에 제시된 제약식 (3)을 일반화된 일반상한제약이라 부른다. Won(2001)에서는 제약식 (3)대신에 확장된 일반상한제약인 $\sum_{j\in N} x_j = r$이 포함된 문제가 연구되었다. 따라서 본 문제 (P)는 Won(2001)에서 연구된 모형의 일반화된 모형이며 해공간은 확장되어 있다. 본 연구에서는 확장된 해공간에서 성립하는 새로운 모수분석 특성을 찾아내고, 이 특성을 활용하여 문제 (P)의 최적해를 효율적으로 찾는 일반해법을 제시한다. 이 일반해법의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$으로 분석된다.

문제 (P)와 동일한 구조를 갖는 문제는 Bagchi(1996)에서도 연구되었다. Bagchi(1996)에서는 제약식 (2)에 대한 라그랑지 완화된 문제를 고려하고 라그랑지 승수를 변화시켜가면서 문제 (P)에 대한 최적조건인 원가능, 쌍대가능, 여유상보조건을 만족시키는 최적해를 찾는 해법을 제시하였다. 이 해법의 계산복잡도도 $O(n^2 \log n)$으로 제시되고 있다. 문제 (P)의 현실 적용에 대해서는 Bagchi(1996)을 참조한다.

이 논문은 2010학년도 경기대학교 연구년 수혜로 연구되었음.
† 연락저자 : 원중연 교수, 443-760 경기도 수원시 영통구 이의동 산 94-6 경기대학교 산업경영공학과, Tel : 031- 249-9750, Fax : 031-244-3534, E-mail : jywon@kgu.ac.kr
2011년 5월 28일 접수; 2011년 8월 13일 게재 확정.

다음 제 2장에서는 문제 (P)에 성립하는 모수분석 특성들을 보인다. 제 3장에서는 앞 절에서 보인 특성들을 활용하여 최적해를 효율적으로 찾는 일반해법을 제시하고, 최악상황하의 계산복잡도를 분석한다. 제 4장에서는 간단한 수치예제를 제시한다.

2. 모수분석 특성

본 절에서는 우변상수 T에 대한 모수분석을 통해서 확장된 해공간에 성립하는 최적기저 변화의 새로운 특성들을 파악한다. 먼저 문제 (P)의 모든 변수들에 대해서 임의의 두 지수 i, j가 $i<j$ 이면 $a_i \leqq a_j$가 되도록 변수들을 재배열한다. 문제 (P)의 한 기저가능해를 $\overline{x}=(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})$ 으로 표기하고, 이 해의 우변상수 값을 $\overline{T}=\sum_{j\in N} a_j \overline{x_j}$, 목적함수값을 $z(\overline{T})=\sum_{j\in N} q_j \overline{x_j}$이라 하자. 해 $\overline{x}$의 지수집합 F와 J를 각각 $F\equiv\{j \mid 0<\overline{x_j}<1\}$, $J\equiv\{j \mid \overline{x_j}=1\}$이라 정의하고, 상수 f는 $f\equiv r-[r]$이라 하자. 여기서, $[r]$은 r을 넘지 않는 최대 정수값을 의미한다. 본 논문에서는 상수 f가 $f\neq 0$임을 가정한다. $f=0$인 경우, 즉 r이 정수인 경우의 기저가능해 특성은 이미 Won (2001)에서 보조정리로 제시된 바 있다.

기저가능해 $\overline{x}$ 에서 제약식 (2) 및 (3)에 해당하는 두 기저변수의 지수를 각각 i, j $(i<j)$라 하자. 축소 기저행열 B는 제약식 (2) 및 (3)에서 두 기저변수에 해당하는 열로 이루어진 2×2인 행렬로 정의한다. 우변상수 $\overline{T}$ 가 ΔT 만큼 더 증가할 때 목적함수 값의 변화는 다음 두 식의 형태로 발생한다. 먼저, 두 기저변수 i, j 가 모두 $i\in N$, $j\in N$일 경우에는 다음 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} z(\overline{T}+\Delta T) &= z(\overline{T})+\Delta T c_B B^{-1} e \\ &= z(\overline{T})+\Delta T(q_j-q_i)/(a_j-a_i) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서, $c_B=(q_i, q_j)$, $e=(1,0)^t$ 이다. 다음으로, 어느 한 기저변수 j만이 $j\in N$일 경우에는 다음 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} z(\overline{T}+\Delta T) &= z(\overline{T})+\Delta T c_B B^{-1} e \\ &= z(\overline{T})+\Delta T(q_j/a_j) \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, $c_B=(q_j, 0)$, $e=(1,0)^t$이다. 식 (5) 및 식 (6)에서 계산된 비율들을 각각 $\theta(i,j)=(q_j-q_i)/(a_j-a_i)$, $\theta(0,j)=(q_j/a_j)$로 표기한다. 단, $a_i=a_j$인 경우는 $\theta(i,j)\equiv\infty$으로 정의한다.

문제 (P)에서 제약식 (2)의 우변상수를 0으로부터 T 에 이르기까지 증가시켜 나가는 과정 중에 발생하는 최적기저 변화의 특성들을 정리 2 및 정리 3에 보인다. 이를 위해 우선 문제 (P)에 항상 성립하고 있는 비율특성을 다음의 정리 1에 보인다.

정리 1 임의의 두 변수의 지수를 i, j $(i<j)$라 할 때, $\theta(0,i)\geq\theta(0,j)$이면 항상 $\theta(0,j)\geq\theta(i,j)$가 성립한다. 단, $a_i\neq a_j$이다.

(증명) 가정에 의하여 $\theta(0,i)\geq\theta(0,j)$이므로 $q_i/a_i\geq q_j/a_j$이고 이를 다시 정리하면 다음 식 (7)과 같다.

$$q_i a_j - q_j a_i \geq 0 \tag{7}$$

$\theta(0,j)-\theta(i,j)$를 계산하면 $\theta(0,j)-\theta(i,j)=(q_i a_j-q_j a_i)/a_j(a_j-a_i)$이다. 식 (7)에 의하여 $q_i a_j - q_j a_i\geq 0$이고, $a_j>0$, $a_j-a_i>0$이므로, $\theta(0,j)-\theta(i,j)\geq 0$이다. 따라서 정리 1이 성립한다.

다음의 정리 2에 적용할 초기 기저가능해로는 $\overline{x}=(0,\cdots,0)$을 사용한다. 우변상수 $\overline{T}$ 가 0에서 증가함에 따라 형성되는 최적 목적함수 $z(\overline{T})$는 조각적 선형함수(piecewise linear function)로서 위로 볼록한(concave) 형태로 나타난다. 다음의 정리 2 및 정리 3에서 결정된 새로운 기저가 최적으로 유지되는 구간 분석을 위하여 편의상 $\overline{T}$는 목적함수 $z(\overline{T})$의 한 절점(break point)이라 하자. 정리 2는 가능해 영역중 제약식 (3)을 부등식으로 만족시키는 모든 기저가능해에 대해 성립한다.

정리 2 $F=\phi$인 기저가능해 $\overline{x}$의 우변상수 값을 $\overline{T}$ 라 하자. 우변상수가 $\overline{T}$ 로부터 증가함에 따라 발생하는 새로운 기저변수의 지수 i^*, j^*는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta(i^*, j^*)=\max_{j\in N\setminus J}\{\theta(0,j)\}$$

(증명) 문제 (P)에서 우변상수 T의 값이 $\overline{T}$ 이면 $\overline{x}$는 문제 (P)의 최적해이다. 우변상수 $\overline{T}$ 가 작은 양 ΔT 만큼 증가한다면 최적을 유지하기 위한 새로운 기저의 변화는, $F=\phi$이므로 다음의 두 경우가 가능하다. (1) 현재 0의 값을 취하고 있는 한 변수 x_j, $j\in N\setminus J$, 만이 증가해서 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이때 목적함수의 증가비율은 식 (6)과 같이 $\theta(0,j)$이다. (2) 작은 계수 a_i를 갖는 변수 x_i가 감소하고, 큰 계수 a_j를 갖는 변수 x_j가 증가하는 형태로 나타난다. 즉, 현재 1을 취하고 있는 한 변수 x_i, $i\in J$, 가 1에서 감소하고 0의 값을 취하고 있는 다른 변수 x_j, $j\in N\setminus J$, $j>i$, 가 증가하여 동시에 두 변수가 분수값을 갖는 기저변수가 된다. 이때 목적함수의 증가비율은 식 (5)와 같이 $\theta(i,j)$이다. 그러나 $J=\phi$이면 경우 (2)는 발생하지 않는다. 또한, $J\neq\phi$라 하더라도, 증가한 우변상수 ΔT를 반영하기 위한 최적의 기저변화는 경우 (1)의 형태로 처리할 수 있다. 이것은 (2)의 경

우가 발생하면 최적해인 $\overline{x}$에서 변수 x_i, $i \in J$, 는 이미 1의 값을 취하고 있으므로 $\theta(0,i) \geq \theta(0,j)$, $j \in N \backslash J$, 이고, 또한 $\theta(0,i) \geq \theta(0,j)$이면 앞에서 제시한 정리 1에 의해 항상 $\theta(0,j) \geq \theta(i,j)$가 성립하므로, 경우 (1)의 목적함수 증가비율인 $\theta(0,j)$가 경우 (2)의 $\theta(i,j)$보다 더 크거나 같기 때문이다. 이상으로부터 여러 비율 $\theta(0,j)$, $j \in N \backslash J$, 중에서 가장 큰 비율 $\max\{\theta(0,j)\}$을 갖는 j^*가 최적 기저변수의 지수로 결정된다. 따라서 정리 2가 성립한다.

정리 2에서 결정된 기저변수 x_{j^*}가 증가할 수 있는 최대값은 $|J|$에 따라 달라지므로, 최적 유지구간은 다음의 두 경우로 발생한다. 먼저 $|J| < [r]$인 경우에는 결정된 기저변수 x_{j^*}가 가질 수 있는 최대값은 1이 되므로 우변상수의 최적 유지구간은 $[\overline{T},\ \overline{T}+a_{j^*}]$이다. 새로운 절점인 $\overline{T}+a_{j^*}$에 이르기 전까지는 x_{j^*}만이 분수값을 가진다. 그러나 우변상수가 더 증가하여 $\overline{T}+a_{j^*}$에 이르면 x_{j^*}가 1이 되므로 집합 J에는 지수 j^*가 추가되고 집합 F는 $F=\phi$가 된다. 다음으로 $|J|=[r]$인 경우 결정된 기저변수 x_{j^*}가 가질 수 있는 최대값은 f이므로 우변상수의 최적 유지구간은 $[\overline{T},\ \overline{T}+fa_{j^*}]$가 된다. 이 경우에는 최적 유지구간 $[\overline{T},\ \overline{T}+fa_{j^*}]$의 모든 값에서 x_{j^*}만이 분수값을 가지며 집합 F는 $F=\{j^*\}$이다.

문제 (P)에 정리 2를 반복 적용하면 결정된 최적기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 구간은 연속으로 매번 증가하게 되고 마침내 T를 포함하는 최적구간에 이르면 문제 (P)의 최적해를 구할 수 있다. 그러나 $\overline{T}$가 T에 이르기 전에 최적기저가 위 구간분석의 두 번째 경우처럼 $|J|=[r]$을 만족하고 한 기저변수만이 f의 값을 가지게 되면 이후의 우변상수의 증가에 따른 최적기저의 변화는 다음의 정리 3에 따른다(Won, 2001, 참조). 정리 3은 가능해 영역중 제약식 (3)을 등식으로 만족시키는 모든 기저가능해에 대해 성립한다.

정리 3 [Won, 2001] 기저가능해 $\overline{x}$는 $|J|=[r]$, $\overline{x_p}=f$, $p \in F$를 만족하고, 이 때의 우변상수 값은 $\overline{T}$라 하자. 우변상수가 $\overline{T}$로부터 증가함에 따라 발생하는 새로운 기저변수의 지수 i^*, j^*는 다음과 같이 결정된다.

$$\theta(i^*,j^*) = \max\left[\max_{i \in J,\ i<p}\{\theta(i,p)\},\ \max_{j \in N \backslash J,\ j>p}\{\theta(p,j)\}\right]$$

(증명) 가정에 의하여 $|J|=[r]$, $x_p=f$이므로 제약식 (3)은 우변상수 $\overline{T}$가 증가하더라도 항상 등식으로 유지된다. 따라서 우변상수 $\overline{T}$가 적절히 작은 양 ΔT만큼 증가하게 되면 현재 0이나 1인 한 변수가 분수값을 갖는 새로운 기저변수로 도입되고, f의 값을 가지던 변수 x_p는 이에 연동하여 다른 분수 값을 갖는 기저변수로 계속 남게 된다. 이때 다음의 두 가지 경우가 가능하다.

(1) $i<p$인 한 변수 x_i가 기저에 도입된다고 하자. 여기서 $a_i<a_p$이므로 우변상수 $\overline{T}$가 조금 증가함에 따라 발생하는 변수값의 변동은, 큰 계수 a_p를 갖는 변수 x_p가 현재의 값 f보다 커지고 대신 작은 계수 a_i를 갖는 변수 x_i의 값은 그만큼 작아지는 형태로 나타난다(이 경우에 $x_i+x_p=1+f$가 유지된다). 따라서 새로운 기저변수의 지수 i는 현재 1의 값을 갖고 있는 변수들의 집합 J에서 선택되어 진다. 그러므로 목적함수 값을 최대로 증가시키는 새로운 기저변수의 지수 i^*는 다음 식과 같이 결정된다.

$$\theta(i^*,p) = \max_{i \in J,\ i<p}\{\theta(i,p)\} \tag{8}$$

(2) $j>p$인 한 변수 x_j가 기저에 도입된다고 하자. 여기서 $a_j>a_p$이므로 우변상수 $\overline{T}$가 조금 증가함에 따라 발생하는 변수값의 변동은, 작은 계수 a_p를 가진 변수 x_p가 현재의 값 f보다 작아지고 대신 큰 계수 a_j를 갖는 변수 x_j의 값이 그만큼 커져야 하는 형태로 나타난다(이 경우에 $x_p+x_j=f$가 유지된다). 따라서 새로운 기저변수의 지수 j는 현재 0의 값을 갖고 있는 변수들의 지수집합 $N \backslash J$에서 선택되어 진다. 그러므로 목적함수값을 최대로 증가시키는 새로운 기저변수의 지수 j^*는 다음 식과 같이 결정된다.

$$\theta(p,j^*) = \max_{j \in N \backslash J,\ j>p}\{\theta(p,j)\} \tag{9}$$

이상의 식 (8), 식 (9) 중에서 목적함수의 증가가 더 커지는 기저변화가 최적이므로 정리 3이 성립한다.

정리 3에서 최적비율이 $\theta(i^*,p)$로 결정되면 두 기저변수 x_{i^*}와 x_p가 변화하는 최대값은 증명에서 보인 바와 같이 $1-f$이다. 따라서 현 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 구간은 $[\overline{T},\ \overline{T}+(1-f)(a_p-a_{i^*})]$이다. 새로운 절점인 $\overline{T}+(1-f)(a_p-a_{i^*})$에 이르기 전까지는 두 기저변수 모두가 분수값을 가지며, $\overline{T}+(1-f)(a_p-a_{i^*})$에 이르면 x_p는 1의 값을 갖고 x_{i^*}는 f의 값을 갖는다. 따라서 집합 J에 p가 추가되고 대신 i^*가 삭제되며 $F=\{i^*\}$로 수정된다. 반면에, 최적비율이 $\theta(p, j^*)$로 결정되면 두 기저변수 x_p와 x_{j^*}가 변화하는 최대값은 f이다. 따라서 현 기저가 최적으로 유지되는 우변상수의 구간은 $[\overline{T},\ \overline{T}+f(a_{j^*}-a_p)]$이다. 새로운 절점인 $\overline{T}+f(a_{j^*}-a_p)$에 이르기 전까지는 두 기저변수 모두가 분수값을 가지며, $\overline{T}+f(a_{j^*}-a_p)$에 이르면 x_p는 0의 값을 갖고 x_{j^*}는 f의 값을 갖는다. 이때는 $F=\{j^*\}$로 수정된다.

3. 해 법

문제 (P)에서 우변상수 $\overline{T}$가 증가함에 따라 형성되는 최적 목적함수 $z(\overline{T})$는 위로 볼록한 조각적 선형함수의 형태이므로 $z(\overline{T})$를 구성하는 부분선형 선분의 기울기들은 $\overline{T}$가 증가함에 따라 점점 작아지게 된다. 이 기울기들은 정리 2 및 정리 3에서 결정된 최대비율들에 해당된다. 따라서 이미 결정되었던 최대비율이 $\overline{T}$가 증가하면서 결정되는 최대비율보다 일단 커지는 경우에는 최적여부를 판단하기 위해 다시 고려할 필요가 없다.

본 연구에서는 정리 2 및 정리 3에서의 최적기저 결정을 효율적으로 처리하기 위하여, 모든 비율들 $\theta(0, j)$, $j \in N$, 와 $\theta(i,j)$, $i<j$, $i \in N$, $j \in N$, 들을 먼저 계산한 후, 비율목록 L에 비증가 순으로 정리한다. 다음으로 비율목록 L에서 가장 큰 비율부터 차례로 선택하여 해당 변수들의 기저진입 가능여부를 판단한다. 여기서, 비율값이 음수인 경우는 목적함수의 값이 오히려 감소하는 경우이므로 미리 제거한다. 또한 ∞로 정의되는 비율도 정리 2 및 정리 3에서 최대비율로 결정될 수 없으므로 미리 제거한다.

다음에 제시하는 일반해법은 $\overline{T}$의 증가에 따라 발생하는 최적기저의 결정 및 수정을 지수집합 J및 F를 통하여 수행한다. 그리고 이들 집합에 속한 지수들도 미리 비감소 순으로 정리, 유지함으로써 이 후의 단계에서 필요한 지수추가 및 지수삭제 작업을 좀 더 효율적으로 처리한다(Kronsjö, 1979, 참조).

<일반 해법>

1. $J \leftarrow \phi$, $F \leftarrow \phi$, $L \leftarrow \phi$, $f \leftarrow r-[r]$, $\overline{T} \leftarrow 0$이라 한다. 또한, 임의의 두 지수 i, j에 대해 $i<j$이면 $a_i \leqq a_j$가 되도록 변수들을 재배열한다.

2. 다음과 같은 모든 비율 $\theta(0, j)$, $\theta(i, j)$를 계산하고 비율목록 L에 비율크기의 비증가 순으로 정리한다. 단, 음수의 비율이나 ∞의 비율은 미리 제거한다.

   $\theta(0, j) \equiv (q_j/a_j)$, $j \in N$,

   $\theta(i, j) \equiv (q_j - q_i)/(a_j - a_i)$, $i<j$, $i \in N$, $j \in N$.

3. 비율목록 L에서 첫 번째 위치한 가장 큰 비율을 선택한다 ($\theta(i, j)$라 하자).

   $i=0$ 이고 $j \in N \backslash J$, $F=\phi$이면, 단계 4로 간다.

   $i \in J$ 이고 $j \in F$이면, 단계 5로 간다.

   $i \in F$ 이고 $j \in N \backslash J$이면, 단계 6으로 간다.

   이 외의 경우에는 단계 7로 간다.

4. $|J|<[r]$이면, $\overline{T} \leftarrow \overline{T}+a_j$를 계산한다.

   $\overline{T} < T$이면, $J \leftarrow J \cup \{j\}$라 하고 단계 7로 간다.

   $\overline{T} \geqq T$이면, $j^* \leftarrow j$, $\bar{e} \leftarrow \overline{T}-T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

   $x_{j^*} = 1 - \bar{e}/a_{j^*}$,

   $x_k = 1$, $k \in J$, $x_k = 0$, $k \in N \backslash (J \cup \{j^*\})$.

   $|J| = [r]$이면, $\overline{T} \leftarrow \overline{T} + f a_j$를 계산한다.

   $\overline{T} < T$이면, $F \leftarrow F \cup \{j\}$라 하고 단계 7로 간다.

   $\overline{T} \geqq T$이면, $j^* \leftarrow j$, $\bar{e} \leftarrow \overline{T}-T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

   $x_{j^*} = 1 - \bar{e}/a_{j^*}$,

   $x_k = 1$, $k \in J$, $x_k = 0$, $k \in N \backslash (J \cup \{j^*\})$.

5. $\overline{T} \leftarrow \overline{T} + (1-f)(a_j - a_i)$를 계산한다.

   $\overline{T} < T$이면, $J \leftarrow J \cup \{j\} \backslash \{i\}$, $F \leftarrow F \cup \{i\} \backslash \{j\}$라 하고 단계 7로 간다.

   $\overline{T} \geqq T$ 이면, $i^* \leftarrow i$, $j^* \leftarrow j$, $\bar{e} \leftarrow \overline{T}-T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

   $x_{i^*} = f + \bar{e}/(a_{j^*} - a_{i^*})$, $x_{j^*} = 1 - \bar{e}/(a_{j^*} - a_{i^*})$,

   $x_k = 1$, $k \in J \backslash \{i^*\}$, $x_k = 0$, $k \in N \backslash (J \cup F)$.

6. $\overline{T} \leftarrow \overline{T} + f(a_j - a_i)$를 계산한다.

   $\overline{T} < T$이면, $F \leftarrow F \cup \{j\} \backslash \{i\}$라 하고 단계 7로 간다.

   $\overline{T} \geqq T$이면, $i^* \leftarrow i$, $j^* \leftarrow j$, $\bar{e} \leftarrow \overline{T}-T$로 설정하고 과정을 끝낸다. 최적해는 다음과 같다.

   $x_{i^*} = \bar{e}/(a_{j^*} - a_{i^*})$, $x_{j^*} = f - \bar{e}/(a_{j^*} - a_{i^*})$,

   $x_k = 1$, $k \in J$, $x_k = 0$, $k \in N \backslash (J \cup F)$.

7. $L \leftarrow L \backslash \{\theta(i, j)\}$라 하고, 단계 3으로 간다.

일반해법의 각 단계 4, 5, 6에서 최적조건이 성립되었을 때 비율값이 같은 여러 개의 최적비율들이 존재하면 다수 최적해가 발생한다. 이 경우 해당 비율들의 지수 i, j를 적용하여 모든 최적해를 찾을 수 있다.

최악상황하에서 위 일반해법의 계산복잡도는 다음과 같이 분석된다. 단계 1에서 모든 변수들을 재배열하는 데 $O(n \log n)$이 소요된다. 단계 2에서 모든 비율들을 계산하는 데 $O(n^2)$이 소요되고 비율목록 L에 비증가 순으로 배열하는 데 $O(n^2 \log n)$이 소요된다. 단계 3, 4, 5, 6, 7은 해법의 주 회전단계이다. 주 회전단계에서 검토할 비율들의 수는 총 $O(n^2)$ 개이므로 주 회전단계의 최대 회전수는 $O(n^2)$이다. 한 회전 안에서 단계 3 및 7은 상수회에 판단되며, 단계 4, 5, 6에서 집합 J 및 F에 지수를 추가하고 삭제하는 데 이진탐색법을 적용하면 각각 $O(\log [r]) \leqq O(\log n)$의 계산이 소요된다. 따라서 주 회전단계의 최대 회전에 따른 계산양은 $O(n^2 \log n)$이 된다. 이상의 단계 2와 주 회전단계의 계산양은 각각 $O(n^2 \log n)$이므로 결국 일반해법에 소요되는 최대계산은 $O(n^2 \log n)$으로 분석

된다. 따라서 문제 (P)의 최적해를 찾는데 걸리는 최악상황하의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$이다.

4. 수치예제

다음의 예제에 일반해법의 적용과정을 보인다. 이 예제는 Won (2001)의 예제와 동일한 계수값을 갖는다. 이것은 두 해법의 차이점을 쉽게 보이기 위함이다.

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \textstyle\sum_{j\in N} q_j x_j \\ \text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{j\in N} a_j x_j \leqq 9.5, \\ & \textstyle\sum_{j\in N} x_j \leqq 1.6, \\ & 0 \leqq x_j \leqq 1, \ \forall\, j \in N = \{1, \cdots, 6\}. \end{aligned}$$

여기서, 계수 q_j 및 a_j의 값은 다음 표와 같다.

$q_j,\ a_j$ \ j	1	2	3	4	5	6
q_j	2	8	7	10	5	11
a_j	2	3	5	5	6	7

<1회>

1. $J \leftarrow \phi,\ F \leftarrow \phi,\ L \leftarrow \phi,\ f = 0.6,\ \overline{T} = 0$
2. $L = \{\theta(1,2) = \theta(5,6) = 6,\ \theta(0,2) = \theta(1,4) = 2.667,$
   $\theta(0,4) = \theta(3,6) = 2.0,\ \theta(1,6) = 1.8,\ \theta(1,3) = 1.667,$
   $\theta(0,6) = 1.571,\ \theta(0,3) = 1.4,$
   $\theta(0,1) = \theta(2,4) = 1.0,\ \theta(0,5) = 0.833,$
   $\theta(1,5) = \theta(2,6) = 0.75,\ \theta(4,6) = 0.5\}$
3. $\theta(1,2)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,2)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<2회>

3. $\theta(5,6)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(5,6)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<3회>

3. $\theta(0,2)$를 선택한다. $i = 0,\ 2 \in N \setminus J,\ F = \phi$이므로 단계 4로 간다.
4. $|J| (=0) < [r] (=1)$이므로, $\overline{T} = 0 + 3 = 3$이다.
   $\overline{T} < T$이므로 $J = \{2\}$이다. $(F = \phi)$ 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,2)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<4회>

3. $\theta(1,4)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,4)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<5회>

3. $\theta(0,4)$를 선택한다. $i = 0,\ 4 \in N \setminus J,\ F = \phi$이므로 단계 4로 간다.
4. $|J| = [r] (=1)$이므로, $\overline{T} = 3.0 + 0.6(5) = 6.0$이다.
   $\overline{T} < T$이므로 $F = \{4\}$이다. $(J = \{2\})$ 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,4)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<6회>

3. $\theta(3,6)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(3,6)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<7회>

3. $\theta(1,6)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,6)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<8회>

3. $\theta(1,3)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,3)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<9회>

3. $\theta(0,6)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,6)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<10회>

3. $\theta(0,3)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,3)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<11회>

3. $\theta(0,1)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,1)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<12회>

3. $\theta(2,4)$를 선택한다. $2 \in J,\ 4 \in F$이므로 단계 5로 간다.
5. $\overline{T} = 6.0 + (1 - 0.6)(5 - 3) = 6.8$이다.
   $\overline{T} < T$이므로 $J = \{4\}, F = \{2\}$이다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(2,4)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<13회>

3. $\theta(0,5)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(0,5)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<14회>

3. $\theta(1,5)$를 선택한다. 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(1,5)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<15회>

3. $\theta(2,6)$를 선택한다. $2 \in F,\ 6 \in N \setminus J$이므로 단계 6으로 간다.
6. $\overline{T} = 6.8 + (0.6)(7 - 3) = 9.2$이다.
   $\overline{T} < T$이므로 $F = \{6\}$이다. $(J = \{4\})$ 단계 7로 간다.
7. $L \leftarrow L \setminus \{\theta(2,6)\}$이라 하고, 단계 3으로 간다.

<16회>

3. $\theta(4,6)$를 선택한다. $4 \in J,\ 6 \in F$이므로 단계 5로 간다.
5. $\overline{T} = 9.2 + (1 - 0.6)(7 - 5) = 10.0$

$\overline{T} > T(=9.5)$ 이므로 $i^* = 4,\ j^* = 6,\ \bar{e} = 10.0 - 9.5 = 0.5.$ 최적해는 다음과 같다

$$x_4 = 0.6 + 0.5/(7-5) = 0.85,$$
$$x_6 = 1 - 0.5/(7-5) = 0.75,$$
$$x_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 5.$$

일반해법은 최적해를 구하기 위해서 우변상수 $T = 9.5$에 이르기 까지 모든 단계인 4, 5, 6을 거치고 있다. 최종적으로 선택된 최적비율이 일반해법 단계 5의 최적조건을 만족하므로, 구해진 최적해는 제약식 (3)을 등식으로 만족시키고 있다. 그러나 T에 이르는 마지막 최적비율이 일반해법 단계 4의 두 경우 중 어느 하나로 발생될 경우에는 제약식 (3)을 부등식으로 만족시키는 최적해가 발생하게 된다. 예제에서 $T = 5.5$일 때의 최적해는 <5회>째의 단계 4에서 발생되며, 따라서 최적해는 $x_2 = 1,\ x_4 = 0.5,\ x_k = 0,\ k = 1,\ 3,\ 5,\ 6$으로 구해진다.

5. 결론 및 토의

본 연구에서는 Won(2001)에서 제시되었던 확장된 일반상한제약이 더 일반화된 이차원 선형계획 배낭문제를 고려하고, 문제에 성립하고 있는 모수분석 특성 및 해법에 대해 연구하였다. 일반화된 문제의 확장된 해공간에서 새로이 성립하는 모수분석 비율특성을 찾아내고, 이 특성을 활용하여 최적기저의 변화 형태를 직접 파악하므로써 효율적으로 최적해를 찾는 일반해법을 개발하였다. 본 연구에서 제시한 해법은 효율적인 다항식 해법으로서 최악상황하의 계산복잡도는 $O(n^2 \log n)$으로 분석되었다.

본 연구에서는 편의상 일반화된 일반상한제약의 우변상수가 정수가 아닌 경우로 한정하여 정리들을 제시하였다. 그러나 문제 (P)의 일반화된 일반상한제약의 우변상수는 정수를 포함한 실수가 될 수 있다. 이러한 경우에는 우변상수가 정수인 경우의 기저가능해 특성을 밝힌 보조정리(Won(2001))와 연계하여, 본 정리 3의 기저결정 기준을 두 경우로 분류함으로써 일반해법을 확장할 수 있다. 이 경우에도 문제 (P)의 최적해는 최악상황하에서 $O(n^2 \log n)$의 계산복잡도로 찾을 수 있다.

참고문헌

Bagchi, A., Bhattacharyya, N., and Chakravarti, N. (1996), LP Relaxation of the Two Dimensional Knapsack Problem with Box and GUB Constraints, *European J. Opnl. Res.*, **89**, 609-617.

Kronsjö, L. I. (1979), *Algorithms : Their Complexity and Efficiency*, Wiley, N. Y.

Won, J. Y. (2001), On a Two Dimensional Linear Programming Knapsack Problem with the Extended GUB Constraint, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **27**(1), 25-29.