

수학적 재능에 대한 Krutetskii의 연구 분석

김 성 현 · 한 인 기 1)

ABSTRACT. In this study we study Krutetskii and Krutetskii's monograph 'The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren' which is published in Russia(in Russian) and USA(in English). We describe Krutetskii's biography briefly, which was not published in Korea. We analyze the methods, procedures, and results which are presented in the Krutetskii' work, and systemize these. Our study will give a overview of Krutetskii' viewpoint about mathematical abilities.

1. 서론

영재교육진흥법(법률 제7702호)의 제 2조에서 영재는 '재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자'로 정의하였고, 영재교육은 '영재를 대상으로 각 개인의 능력과 소질에 맞는 교육내용과 방법으로 실시하는 교육'이라고 정의하였다. 이로부터 수학적영재, 수학 영재교육을 법률에 근거하여 정의할 수 있을 것이다.

영재교육진흥법에서 영재를 정의하기 위해, 심리학에서 연구하는 '재능'의 개념을 이용한 것은 학술적으로 의미로운 접근이라 할 수 있다. 그리고 영재교육에 관련된 연구들에서 재능, 영재성, 재능의 본질과 구조, 재능의 발현, 일반적인 영재성과 특수한 영재성 등과 같은 개념이나 단어결합을 쉽게 찾아볼 수 있는데, 이것도 영재교육진흥법에서 규정한 영재의 개념과 무관하지 않을 것이다.

'재능'이라는 개념은 주로 심리학에서 연구된다. 재능에 대한 심리학 분야의 연구들로는 Siefer([17]), Purcell & Renzulli([15]), Clark([8]), Rubinshtein([16]), Teplov([18]), Petrovskii([14]) 등을 들 수 있는데, 이들 중 일부가 우리말로 번역되어 출판된 것은 심리학이나 영재교육의 연구 활성화라는 측면에서는 큰 의의를 들 수 있다. 이들 연구를 통해, 재능의 본질, 재능의 특성들, 재능의 구조에 대한 다양한 지식들이 축적되었다.

1) 교신저자

2011년 7월 15일 투고, 2011년 8월 31일 심사완료.

2000 Mathematics Subject Classification: 97C99

Key words: 수학적 재능, 수학 영재교육, Krutetskii의 연구

이들 연구를 기반으로 수학 교과에서의 재능이란, 즉 수학적 재능이란 무엇인가라는 물음을 던질 수 있다. 그리고 수학적 재능에 관한 체계적인 연구는 수학 영재교육의 정체성 확립, 올바른 방향 정립, 성공적인 구현을 위해 필수적인 전제조건이 될 것이다. 그러나 수학적 재능에 대한 국내의 연구는 아직 출발 단계에 머물러 있다고 해도 과언이 아닐 것이다.

본 연구는 수학적 재능에 대한 체계적인 국내 연구의 지식 기반을 조성하는데 관련된 문헌연구로, 전 세계적으로 수학적 재능에 대한 연구의 고전으로 꼽히며 지금도 수학적 재능에 대한 연구의 이론적 바탕으로 인용되고 있는 Krutetskii의 ‘학생들의 수학적 재능의 심리학’을 분석할 것이다. 비록 이 연구가 국내에 오래 전에 소개되기는 했지만, 우리나라에서는 Krutetskii의 연구의 일부분만이 알려지고 인용되었다. 본 연구에서는 Krutetskii의 생애와 연구 영역, 수학적 재능에 대한 Krutetskii의 연구 방법 및 연구 결과들을 체계적으로 분석할 것이다. 특히 러시아어로 기술된 Krutetskii의 연구가 영어로 번역되고, 영어를 다시 우리말로 번역하는 이중번역의 문제를 해소하기 위해, 본 연구에서는 Krutetskii의 러시아어 원본과 영어 번역본을 동시에 병행하여 분석할 것이다.

2. Krutetskii와 ‘학생들의 수학적 재능의 심리학’

Krutetskii는 성이며 이름은 Vadim이다. 1917년 12월에 러시아의 모스크바에서 태어났고 1991년 9월 15일에 생을 마감하였다.

Krutetskii는 중등학교를 다닐 때에 수학을 아주 좋아했으며, 졸업 후에 모스크바항공대학교에 입학하여 두 학기를 다녔다. 그러나 나쁜 시력으로 인하여, 모스크바항공대학교를 그만두고 모스크바국립대학교의 지질학과를 입학하여 경제지질학을 전공하였다.

Krutetskii는 1941년에 모스크바국립대학교의 지질학과를 졸업했으며, 그해 9월부터 ‘아스트라한’이라는 도시의 기술학교 교사 생활을 시작했다. 1947년에 Krutetskii는 1947년에 러시아 교육학술원 부설 심리학연구소의 박사과정에 입학하여, 1950년에 Smirnov 박사의 지도하에 박사학위를 취득하였다. 박사학위를 취득한 후에는 심리학연구소에서 약 30년 동안 심리학 연구를 계속하였다.

Krutetskii는 1960년부터 1979년까지 심리학연구소의 재능연구실험실의 책임자로서 재능에 관련된 다양한 실험연구를 진행하였다. 그리고 1979년에 심리학연구소를 떠나, 모스크바국립사범대학교의 심리학과 교수로 임명되었고, 그곳에서 나머지 생애 동안 연구 활동을 하였다.

Chuprikova([7])에 의하면, Krutetskii는 다방면에 걸친 학술적인 호기심과 해박한 지식을 소유한 사람이었다. 그는 러시아 고전 문학, 시문학, 천문학, 국제정치, 국제관계 분야에 해박한 지식을 가지고 있었으며, 드라마, 오페라, 발레, 그림 등을 좋아했다. 특히 Krutetskii는 자신이 직접 시를 쓰기도 했으며, 노년에는 천

체물리학에 깊은 관심을 가지고 연구하기도 하였다.

Krutetskii는 발달심리학과 교육심리학 분야에서 학술적인 연구를 수행하였으며, 청소년의 도덕성 개념과 심리학적 특성들, 의지, 성격 등의 문제들을 연구하였다.

Krutetskii는 심리학연구소의 재능연구실험실을 이끌면서 문학적 재능, 음악적 재능, 예술적 재능, 교육적 재능, 기술적 재능에 관련하여 재능의 진단과 발달의 문제들을 집중적으로 연구하였다. 그리고 모스크바국립사범대학교에 재직하면서, 1980년부터 다른 연구자들과 함께 교육적 재능의 본질과 구조, 교육적 재능의 진단과 발달의 문제를 광범위하게 연구하였다.

Krutetskii는 130편이 넘는 학술적 업적을 남겼는데, 이들 중에서 1959년과 1965년에 출판된 저서 '청소년의 심리학', 1963년에 출판된 '고학년 학생들의 심리학 개론', 1968년에 출판된 '학생들의 수학적 재능의 심리학', 1972년에 출판된 '교육심리학의 기초', 1976년에 출판된 '학생들의 교육과 훈육의 심리학'은 러시아에서 널리 알려진 심리학 분야의 고전들이다. 특히 '학생들의 수학적 재능의 심리학'은 러시아 교육학술원의 우수 학술상을 받았으며, 미국, 캐나다, 영국, 일본 등에서 번역, 출판되었다.

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구가 서구 세계에 알려지기 시작한 계기는 1963년 워싱턴에서 개최된 국제 심리학 학술대회(International Congress of Psychology)이다. 그 후에 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 논문이 영문으로 된 'Educational Psychology in the USSR'에 실렸으며, 1969년에 출판된 'Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics' 시리즈의 제 2권인 'The Structure of Mathematical Abilities'에는 Krutetskii의 논문만 4편이 실렸다. 이 책의 목차는 [그림 1]과 같다.

TABLE OF CONTENTS

Introduction	1
An Investigation of Mathematical Abilities in Schoolchildren V. A. Krutetskii	5
An Analysis of the Individual Structure of Mathematical Abilities in Schoolchildren V. A. Krutetskii	59
An Experimental Analysis of Pupils' Mathematical Abilities V. A. Krutetskii	105
Mathematical Aptitudes V. A. Krutetskii	113

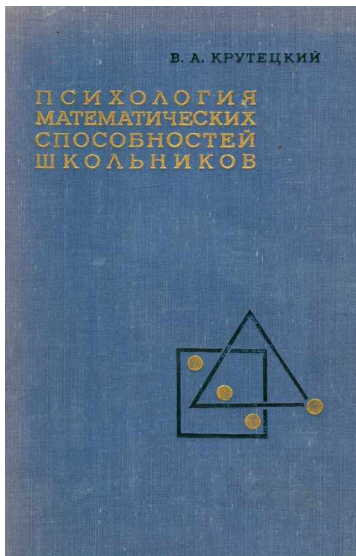
[그림 1] The Structure of Mathematical Abilities의 목차

Kilpatrick & Wirszup([12], p.vii)에 의하면, 'Krutetskii가 수학적 능력에서 개인차를 연구한 유일한 소비에트의 학자이기 때문이 아니라, 그가 연구에서 사용

한 수학적 문제들이 아주 다양하고 독창적이기 때문에, Krutetskii의 연구가 흥미를 불러일으켰다'고 기술하면서, Krutetskii의 연구가 서구의 많은 학자들에게 학술적인 차원의 흥미와 관심을 일으켰음을 인정하였다.

Krutetskii의 '학생들의 수학적 재능의 심리학'은 Teller에 의해 영어로 번역되었으며, 1976년에 Chicago 대학교의 출판부에서 Kilpatrick과 Wirszup의 편집으로 'The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'이라는 제목으로 출판되었다.

그런데 러시아어로 저술된 Krutetskii의 연구가 영어와 우리말로 번역되는 과정에서 '재능'이라는 단어와 관련된 약간의 어려움이 발생되었다. 러시아어에서는 재능을 뜻하는 단어인 'способность', 능력을 의미하는 'умение', 기능을 의미하는 'навык'라는 단어가 구별되어 사용된다. 일반적으로 문제해결 능력에서의 '능력'은 'умение'로 표기하며, 연산 기능에서 '기능'은 'навык'로 표기된다. Krutetskii는 '학생들의 수학적 재능의 심리학'에서 '재능'이라는 단어를 способностью로 나타냈다(러시아에서 출판된 '학생들의 수학적 재능의 심리학'의 표지는 [그림 2]이고, [그림 3]은 Krutetskii의 사진이다). 그런데 способность, умение, навык를 우리말로 번역하면 재능, 능력, 기능이 되며, 영어로는 ability, skill, habit 또는 skill로 번역된다. 그런데 영어인 ability를 우리말로 '능력'이 된다. 결국 러시아어에서 별개의 의미로 사용되는 두 단어 способность, умение를 곧바로 우리말로 번역하면 재능, 능력이 되지만, 이들 러시아어 단어를 영어로 번역한 다음, 이 영어 단어들을 우리말로 번역되면 모두 '능력'이 된다. 그리하여 Krutetskii의 연구에 관련된 국내의 문헌들은 '재능'보다는 '능력'이라고 표현된 것이 대부분이다.



[그림 2] 책의 표지



[그림 3] Krutetskii의 사진

출처: <http://www.koob.ru/krutetskii/>

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구가 국내에 소개되기 시작한 것은 강완 ([1])의 연구 '수학적 능력 및 발견·발명의 사고과정과 수학교육'이 될 것이다. 그리고 Krutetskii의 연구가 김응태·박한식·우정호([2])의 수학교육학개론 8장에 '수학적 능력'라는 주제로 기술되어 있다. 여기에는 Krutetskii의 연구 결과 중에서 학생들이 수학적 정보를 수집하는 과정의 특성, 정보처리 과정의 특성, 정보파지과정의 특성이 중심으로 정리되어 있다. 이들 연구를 통해 수학교육학을 연구하는 많은 사람들에게 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구가 폭넓게 알려질 수 있었다.

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구가 국내에서 소개된 것이 30년 정도가 되었지만, Krutetskii의 연구 결과를 수학교육학의 다양한 연구 주제들과 관련시켜 발전적으로 연구를 수행한 사례는 많지 않다. Krutetskii의 연구를 진지하게 분석하여 발전적으로 활용한 대표적인 것으로 황동주([6])와 서보역([3])의 연구를 들 수 있다.

황동주는 수학적 영재성의 본질, 특징들을 밝히기 위해 Keating([11]), House ([10]), Feldhusen, Hoover & Sayler([9]) 등의 연구와 함께 Krutetskii의 수학적 재능의 개념을 분석하였고, 수학 창의성 및 문제해결력 검사 도구를 개발하기 위해 Krutetskii가 고안한 수학 문제들의 체계를 활용하였다.

한편 서보역은 Krutetskii가 제시한 학생들의 개인차에 대한 연구 결과를 기반으로, 중학생들의 개인차를 고려한 기하 교수-학습 모형과 자료를 개발하였다. 즉 Krutetskii의 연구를 비롯한 다양한 문헌들에 대한 연구를 통해 중학생들의 기하학습에서 개인차를 유발하는 5가지 변인으로 수학적 대상에 대한 정보수집에서의 개인차, 일반화하는 능력에서의 개인차, 사고과정에서의 개인차, 풀이의 심미지향성에서의 개인차, 수학적 정보에 대한 기억에서의 개인차를 추출한 다음, 이들 변인의 하위변인들을 조사하여, 이에 상응하는 교수-학습 자료를 개발하였다.

3. 수학적 재능에 대한 Krutetskii의 연구 방법 및 절차

(1) Krutetskii의 연구 방법 및 절차

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구는 1955년에서 1966년까지 12년 동안 진행되었다. 수학적 재능에 대한 주된 연구 성과는 실험연구를 통해 얻어졌지만, 이와 병행하여 비실험연구의 방법도 사용되었다.

Krutetskii는 실험연구를 수행하기에 앞서 심리학과 수학 분야의 방대한 문헌들을 분석하여, 수학적 재능에 대한 탐색적 성격의 연구를 수행하였다. 그 결과 수학적 재능의 구성 요소들에 대한 가설적인 성격의 결론을 [표 1]과 같이 얻었다.

수학적 재능의 가설적 구성 요소들	
수학적 자료의 형식화	내용으로부터 형식을 추출하기, 구체적인 양적인 관계와 공간적 형태로부터 추상화하기, 형식적인 구조를 조작하기
수학적 자료의 일반화	수학적인 자료를 일반화하기, 비본질적인 것으로부터 벗어나 주된 것을 분석하기, 외적으로는 다르지만 공통인 것을 보기
수와 기호의 조작	수들, 기호들을 조작하고 이용하기
올바른 논리적인 추론	증명, 근거를 찾기, 결론을 도출하기와 관련하여 순차적으로 올바른 논리적인 추론을 진행하기
추론의 단축	추론 과정을 단축하기, 함축된 구조로 사고하기
사고의 가역성	사고 과정에서 순방향에서 역방향으로 전환하기
사고의 유연성	한 가지 지적 조작에서 다른 지적 조작으로 전환하기, 틀에 박힌 것들로부터 벗어나기
수학적 기억	정보를 일반화하고 형식화하여 간략한 형태로 기억하기
공간적인 표상	기하(특히 공간 기하)와 관련된 공간적인 상상력

[표 1] 수학적 재능의 가설적인 요소들

실험연구에서는 연구를 위해 특별히 고안된 수학 문제들을 다양한 수학적 재능을 가진 학생들이 해결하는 과정에 대해 질적으로 그리고 양적으로 분석하였다.

이때 실험은 층화적인 성격을 가졌다. 각 층은 시간적으로 비교적 길지 않게 구성되며, 층들에 대한 실험연구를 통해 학생들의 발달에서 나타나는 변화의 본질을 규명하려 시도하였다. 특히 수학적 재능 요소들의 전반적인 발달의 경향 및 방향은 첫째, 다양한 발달 단계에 있는 서로 다른 학생들로부터 얻어진 층들에 대한 정보를 비교하는 방법(횡단적 방법)에 의해, 둘째 개개 학생들의 다양한 발달 단계에서 얻어진 층들에 대한 정보를 비교하는 방법(종단적 방법)에 의해 연구되었다.

층화적 방법에 의한 실험연구와 함께, 몇몇 집단에 대해 수년간의 장기간에 걸친 실험연구들이 진행되었다. 예를 들어 1963년에서 1966년까지 저학년 학생들을 대상으로 수학적 재능에 대한 실험 연구가 이루어졌다. 장기간의 실험 연구에서는 학교나 집에서 학생들의 수학적 활동이 관찰되었으며, 학생들, 이 학생의 부모와 친구들과 상담을 통해서도 자료가 수집되었다.

한편 비실험연구에서는 특정한 집단의 사람들에 대해 질문지를 이용하거나 구두로 수학적 재능에 대한 정보를 수집하였다. 비록 비실험연구를 통해 얻어진 자료들이 Krutetskii의 연구에서 최종적인 결론의 의미는 가지지 않았지만, 실험연구를 보완하는 측면에서는 그 나름대로의 가치를 부여할 수 있었다.

수학교사들, 수학교육학자들, 수학자들을 대상으로 하는 비실험연구를 통해, 수

학적 재능의 구조에 대한 다양한 자료들이 수집되었다. 1958년에서 1960년 사이에 62명의 수학자들과 수학교사들을 조사하여, 수학적 재능의 요소들, 수학적 재능의 구조에 대한 정보를 수집하였다. 그리고 1965년에는 수학교사들을 대상으로 설문지를 이용하여 자료를 수집하였다. 이 설문지에서는 학생들의 수학적 재능이 어떻게 발현되며, 재능있는 학생들의 특징은 무엇이며, 어떠한 종류의 수학적 활동을 수행하였는지 등에 대한 수학교사들의 생각을 기술하도록 하였다.

그리고 84명의 저명한 러시아와 외국의 수학자, 물리학자들의 자서전, 회고록 등 문서 자료들을 분석하였다. 여기서는 이들이 언제 수학적 재능을 보이기 시작했으며, 어떻게 수학적 재능이 발현되었으며, 이들의 수학적 사고에는 어떤 특징이 있는지 등이 조사되었다.

비실험연구에는 대규모의 조사 연구도 포함되었다. 예를 들어 모스크바의 7-10학년 학생들 1000명 이상을 대상으로 다양한 교과목의 성취도 사이의 관계가 조사되었다. 그리고 보충자료로 몇몇 지역 수준의 수학 경시대회와 대학 입학 본고사의 문제들, 6-8학년 학생들의 수학 공책을 체계적으로 검토하여 얻어진 자료들, 수업 시간에 학생들의 수학적 지식의 획득 과정을 관찰하여 얻어진 자료들이 수집되었다.

(2) 실험연구의 특징

실험연구는 다양한 수준의 수학적 재능을 가진 학생들의 문제해결 과정을 분석하는 것에 관련된다. Krutetskii는 실험연구를 설계하고 수행하는 과정에서 다음과 같은 생각을 가지고 있었다.

첫째, 수학적 재능의 연구는 수학적 활동의 범위 안에서 이루어져야 하므로, 실험 문제들(Krutetskii가 고안하고 학생들이 실험 연구에서 해결해야 하는 문제들)은 수학적 활동의 특성을 밝혀낼 수 있어야 한다. 결국 Krutetskii의 실험연구에서 학생들은 특별히 고안된 수학 문제들을 해결하며, 이때 얻어진 문제해결의 결과를 분석하여 재능있는 학생들과 그렇지 않은 학생들이 보인 수학적 활동에서의 차이점들, 문제해결 과정에서 지적 활동의 특징들이 분석되었다.

둘째, 실험 문제들은 다양한 수준의 난이도를 가지며(쉬운, 중간 정도의, 고난이도의), 이들 문제에는 풀이 과정에 수학적 창의성의 요소들이 필요한 비정형적인 문제들도 포함되어야 한다. Krutetskii는 실험 문제들의 난이도를 문제에 내포된 관계들의 복잡도 수준을 바탕으로 규정하였으며, 의심이 되는 경우에는 학생들에게 실제로 풀도록 하여 문제의 난이도를 결정하였다.

셋째, 실험 문제들은 의도된 목적의 달성에 적합해야 한다. 즉 실험 문제들의 해결 과정에서 수학적 활동의 특징들이 드러나야 한다. Krutetskii는 실험연구에 앞서, 실험 문제들의 타당도를 검사하였다. 이때 수학적으로 재능이 있는 학생들

은 실험 문제들을 성공적으로 풀었고, 실험 문제에서 높은 점수를 받은 학생들은 수학적으로 재능이 있는 것이 확인되었다.

넷째, 연구목적을 달성하기 위해서는 주어진 실험 문제들에 대한 학생들의 최종적인 결과뿐만 아니라, 실험 문제에 대한 학생들의 수행 과정 자체에 대한 자료를 분석해야 한다. 이를 위해, Krutetskii는 학생들이 크게 자신의 생각을 말하면서 문제를 해결하도록 요구하였다.

다섯째, 문제해결은 과거의 경험, 지식, 능력, 기능 등이 복합적으로 관련된다. 그러나 이 연구는 수학적 재능에 대한 것이므로, 해결 과정에서 수학적 재능의 요소들을 가장 잘 나타낼 수 있는 그러한 문제들을 선별해야 한다. 이를 위해 Krutetskii는 해결 과정에 특별한 지식, 능력, 기능이 필요하지 않는 실험 문제들을 선별했으며, 과거 경험의 영향으로부터 벗어나기 위해 익숙하지 않은 새로운 실험 문제들을 찾았으며, 새로운 학습에 대한 학생들의 특징을 보기 위해 직전에 배운 내용과 관련된 실험 문제들을 사용했으며, 수학적 창의성의 요소들을 포함하는 비정형적인 문제들을 사용했다.

여섯째, 재능은 역동성, 발달의 테두리 안에서 규명될 수 있다. 즉 특정 순간의 도달 수준만으로는 재능에 대한 결론을 내릴 수 없다. 그러므로 실험연구는 진단적인 성격뿐만 아니라 교육적인 성격을 가져야 한다. Krutetskii는 교육실험의 방법도 이용하여, 학생들이 새로운 내용을 학습하는 과정에서 수학적 재능 요소들의 형성을 관찰하였다.

일곱째, 질적인 분석이 실험연구의 근간이 되는 방법이지만, 연구 대상의 양적인 특성들도 조사해야 한다. 양적인 특성들로는 진전의 빠름 정도, 주어진 유형의 문제해결 기능의 획득에서 빠름 정도(예를 들어 새로운 내용을 배우는데 필요한 연습문제의 개수, 높은 난이도의 문제를 풀기 위해 필요한 연습문제의 개수 등), 문제해결에 필요한 시간 등이 고려되었다.

(3) 실험 문제들의 특징 및 구성

Krutetskii는 방대한 양의 실험 문제들을 개발하여 체계적으로 조직하였다. 문제해결 과정에서 정보의 수집, 정보의 변환, 정보의 저장 단계에서 다양한 수준의 수학적 재능을 가진 학생들의 특징을 얻을 수 있도록 고안된 실험 문제들과 수학적 재능의 유형에 대한 자료를 얻을 수 있는 실험 문제들을 개발하였다.

정보의 수집에 관련된 실험 문제들을 통해서 문제의 이해 단계에서 수학적 재능에 대한 자료를 얻을 수 있었으며, 실험 문제는 [표 2]와 같이 4개의 묶음(series)로 구성되었다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
물음이 제시되지 않은 문제	문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각	-
불충분한 정보를 가진 문제	문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각	-
과잉된 정보를 가진 문제	문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각	수학적 기억
복합적인 융합된 요소를 가진 문제	지각(배경으로부터 기하학적 요 소들, 도형들을 추출)	수학적 재능의 유형

[표 2] 정보의 수집에 관련된 실험 문제들

정보의 변환에 관련된 실험 문제들은 일반화, 사고의 유연성, 사고 과정의 가역성, 논리성(추론)에 대한 자료를 얻을 수 것들로 구성되었다. 일반화에 관련된 실험 문제들은 [표 3]과 같이 8개의 묶음이 개발되었다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
단일 유형의 문제들 체계	일반화(개념들의 위계)	지각, 추론 과정의 단축
다양한 유형의 문제들 체계	일반화(일반화의 형성) 추론 과정의 단축 수학적 기억력 문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각	사고 과정의 유연성
구체로부터 추상으로의 옮김의 문제들 체계	일반화(일반화의 형성)	지각 수학적 기억력
주어진 유형의 문제들의 구성	일반화(일반화의 형성) 지각(문제의 일반화된 지각)	-
증명 문제	추론 방법의 일반화 추론의 논리성 추론 과정의 단축	수학적 재능의 유형
문제의 조건에 따른 방정식의 구성	추론 방법의 일반화 추론의 논리성 추론 과정의 단축, 문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각	사고 과정의 유연성
비현실적인 문제들	일반화 문제에서 관계들과 구체적으로 주어 어진 것들의 지각 수학적 기억력	-
인위적인 개념의 형성	비수학적 내용의 일반화	-

[표 3] 일반화에 관련된 실험 문제들

사고의 유연성에 관련된 실험 문제들은 [표 4]와 같이 4개의 묶음으로 구성된다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
여러 가지 해를 갖는 문제들	사고 과정의 유연성 풀이의 우아함	사고의 비판성 수학적 기억
변화에 대한 내용을 가지는 문제들	사고 과정의 유연성	-
연산의 재구성에 대한 문제들	사고 과정의 유연성	수학적 재능의 유형
자기제한에 직면하는 문제들	사고 과정의 유연성	-

[표 4] 사고의 유연성에 관련된 실험 문제들

사고 과정의 가역성에 관련된 실험 문제들은 [표 5]와 같이 1개의 묶음으로 구성된다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
순방향과 역방향의 문제들	사고 과정의 가역성	-

[표 5] 사고 과정의 가역성에 관련된 실험 문제들

논리성(추론)에 관련된 실험 문제들은 [표 6]과 같이 4개의 묶음으로 구성된다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
발견술적 과제들	추론의 논리성 일반화의 자립성	추론 과정의 단축
논리적인 추론에 대한 문제들	추론의 논리성 수학적 기억 추론 과정의 단축	-
수열들	추론의 논리성	관계의 지각 수학적 재능의 유형
수학적 퀘변들	추론의 논리성	사고 과정의 유연성 수학적 재능의 유형

[표 6] 논리성(추론)에 관련된 실험 문제들

정보의 저장에 관련된 실험 문제들은 수학적 기억에 대한 자료를 얻을 수 것들이다. 수학적 기억에 관련된 실험 문제들은 [표 7]과 같이 1개의 묶음으로 구

성된다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
암기하는데 복잡한 조건들을 가진 문제들	수학적 기억 문제에서 관계들과 구체적으로 주어진 것들의 지각	-

[표 7] 수학적 기억에 관련된 실험 문제들

한편 수학적 재능의 유형에 관련된 실험 문제들은 [표 8]과 같이 4개의 묶음으로 구성된다.

묶음(series)	문제의 기본 의도	추가적인 의도
풀이가 다양한 수준의 직관성을 가지는 문제들	수학적 재능의 유형	일반화 추론 과정의 단축 사고 과정의 유연성 수학적 기억
언어적이며 직관적 형태의 문제들	수학적 재능의 유형	일반화 추론 과정의 단축 수학적 기억
공간적 표상과 관련된 문제들	수학적 재능의 유형	-
비수학적인 지적 활동의 직관-형상적인 요소들과 언어-논리적인 요소들 사이의 관계에 대한 문제들	수학적 재능의 유형	-

[표 8] 수학적 재능의 유형에 관련된 실험 문제들

Krutetskii는 ‘학생들의 수학적 재능의 심리학’에 개발된 실험 문제들을 나열하여, 자신의 연구 결과를 명확히 기술했을 뿐 아니라, 후속 연구자들이 수학 문제의 성격, 문제의 선별, 문제의 개발 등에 폭넓게 활용할 수 있도록 하였다.

4. 수학적 재능에 대한 Krutetskii의 연구 결과

국내의 몇몇 문헌들([1], [2], [3], [4] 등)에 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구의 일부 결과가 제시되어 있다. 이들 문헌에서는 주로 실험연구의 결과가 체계적으로 기술되어 있기 때문에, 본 연구에서는 비실험연구의 결과를 자세히 분석하고, 실험연구의 결과는 개괄적으로 살펴보기로 한다.

(1) 비실험연구의 결과

1958년에서 1960년 사이에 62명의 수학자와 수학 교사들을 조사하여, 수학적 재능의 기준, 징표들에 대한 1차 비실험연구가 진행되었다. Krutetskii는 수학자와 수학 교사들의 답변을 빈도수를 중심으로 소개하였다. 수학자와 수학 교사들이 수학적 재능의 기준, 징표들에 대해 대답한 것을 정리하면, [표 9]와 같다.

수학적 재능의 기준, 징표들	수학자와 수학 교사들의 응답 비율(%)
수학적 지식, 기능, 능력을 빨리 획득, 이해 속도	95
사고의 논리성과 독립성	82
수학의 학습에서 재치와 사리판단	67
수학적 자료의 빠르고 견고한 기억	50
수학적 자료를 높은 수준에서 분석, 종합, 일반화	50
수학을 공부할 때 피로를 덜 느낌	3
사고의 진행 방향에서 역방향으로 빨리 전환하기	1.5

[표 9] 수학자와 수학 교사들에 대한 1차 비실험연구의 결과

‘수학적 지식, 기능, 능력을 빨리 획득, 이해 속도’와 관련하여, 여기서 빠름이라는 것은 질적인 진척의 빠름을 의미하는 것이다. 예를 들어 “물론, 본질적인 차이들 중의 하나는 빠른 획득이다. 한 학생에게 다섯 번을 반복 설명했지만 조금밖에 획득하지 못한 반면, 다른 학생은 아직 한 번의 설명도 채 끝나지 않았는데, 벌써 본질을 파악했다”와 같은 주장을 통해, 지적 활동의 빠름이 수학적 재능을 드러내는 한 특징이 된다고 하였다.

‘사고의 논리성과 독립성’과 관련하여, “다른 사람의 생각을 반복하지 않고, 독립적이고 자발적으로 증명하며 고찰하는 능력”과 같은 주장들이 제기되었다. ‘수학의 학습에서 재치와 사리판단’은 의견은 “재능이 있는 학생들은 수학적 판단을 잘 한다. 이들은 정형적인 틀에서 자유로우며, 재치있게 다양한 방법의 풀이를 시도한다. 덜 재능이 있는 학생들은 독자적이고 자발적으로 틀의 범위를 벗어나지 못한다”와 같은 주장에 의해 뒷받침되었다.

한편 ‘수학적 자료의 빠르고 견고한 기억’에 관련하여서는 “재능있는 학생들은 수학적 자료들을 재빨리 터득하고, 이것들을 기억에 확고하게 저장한다. 이것은 기계적인 기억이 아니라, 의미적 구조로의 기억으로 증명의 기본적인 틀을 기억한다”와 같은 의견이 수집되었다. ‘수학적 자료를 높은 수준에서 분석, 종합, 일반화’와 관련하여서는 “새로운 것과 이전의 것들 사이의 관계를 탐지하고, 이것을 다른 것과 관련시키며, 지식을 새로운 조건에 사용할 수 있다”와 같은 의견이 수집되었다.

한편 1965년에 수학교사들을 대상으로 설문지를 이용하여 2차 비실험연구가 수행되었다. 1차 비실험연구와는 달리, 2차 비실험연구에서는 교사들이 설문에

답하기 전에 몇일 동안 수학적 재능에 관련된 강의와 토론에 참여하였다. 2차 비실험연구의 결과를 정리하면, [표 10]과 같다.

수학적 재능의 기준, 징표들	수학 교사들의 응답 비율(%)
일반화	98
추론의 논리성	98
재지와 사리판단	88
수학적 기억	82
추상화	82
사고의 유연성	73
직관성의 활용	63
공간적 표상	57
사고의 순방향에서 역방향으로의 전환	52
지력의 경제성 지향	48
추론 과정의 단축	38
수학을 공부할 때 피로를 덜 느낌	30

[표 10] 수학 교사들에 대한 2차 비실험연구의 결과

2차 비실험연구의 결과를 [표 9]와 비교하면, [표 10]에서는 일반화를 가장 많은 수학 교사가 수학적 재능의 기준, 징표로 대답하였으며, 1차 비실험연구의 결과에서 가장 많은 응답률을 기록한 지적 활동의 빠름은 [표 10]에서는 수학적 재능의 기준, 징표로 포함되지 못했다. 반면에 [표 9]와 비교하면, [표 10]에서는 추상화, 사고의 유연성, 직관성의 활용, 공간적 표상, 사고의 순방향에서 역방향으로의 전환 등과 같은 사고 활동의 질적인 측면을 나타내는 개념들이 많이 포함되어 있다.

(2) 수학 영재학생들의 사례 연구

Krutetskii는 1958년에서 1966년에 걸쳐 수학적 재능이 있는 다양한 연령의 학생들을 관찰하면서, 수학적 재능에 대한 정보를 수집하였다. Krutetskii의 연구에 제시된 영재학생 Sonya의 사례 일부를 살펴보자.

Sonya는 1950년 생으로 1958~1959년에 걸쳐 관찰되었다. 그 당시 Sonya는 8세이고, 모스크바의 164번 학교에서 2학년에 재학 중이었다. 그녀의 가정에는 7학년에 다니는 오빠가 있었는데, 오빠는 수학적 재능이 나타나지는 않았다.

Sonya의 부모님들은 Sonya가 약 4살일 때 처음으로 Sonya의 수학적 재능에 주목하기 시작했다. 이때까지 어느 누구도 그녀에게 산술을 가르치지 않았고, 그

녀는 2학년에 다니는 오빠가 산술 공부를 소리내어 하는 것을 옆에서 들었을 가능성이 있을 뿐이었다. 아무도 모르는 사이에 그녀는 세기 시작했는데, 처음에는 10까지, 그리고는 100까지. ...중략

4학년에서 배우면서 Sonya는 8학년 학생들과 함께 동아리 활동을 성공적으로 했다. 그리고 1965년 15살에 Sonya는 중등학교를 금메달을 받고 졸업했으며, 세 번이나 월반을 했다(4학년 후에 6학년으로, 6학년 후에 8학년으로, 9학년 후에 11학년으로). 졸업한 바로 그 해에 15세인 Sonya는 모스크바국립대학교의 역학-수학부에 입학했다([13], pp.212-219).

Krutetskii는 영재학생 Sonya의 사례를 체계적으로 분석하여, 다음과 같은 Sonya의 수학적 재능에 관련된 특징들을 제시하였다.

- 생각함에 있어 빠름, 지적인 방향 설정의 빠름
- 사고의 논리성, 생각의 체계성과 순차성
- 수학적 추상화의 재능, 수학적 자료의 빠르고 폭넓은 일반화
- 사고의 유연성
- 사고에서 자유자재로 진행하던 방향에서 역으로 전환하기
- 문제해결 과정에서 고찰의 빠른 함축, 단축의 경향
- 생각의 경제성의 경향
- 수학적 자료의 빠르고 견고한 알기
- 수학 공부를 할 때 피로함을 덜 느끼는 것
- 지능의 수학적 방향성

Krutetskii는 Sonya의 사례뿐만 아니라, 영재학생들인 Volodya(1949년 출생), Gilya(1953년 출생), Ira(1952년 출생), Dima(1956년 출생), Lenya(1957년 출생), Sasha(1955년 출생), Volodya(1956년 출생), Borya(1954년 출생)에 대한 구체적인 사례를 기술하면서, 이들의 수학적 활동에 관련된 수학적 재능의 측면들을 체계적으로 분석하였다.

(3) 실험연구의 결과

Krutetskii([13], p.5)에 의하면, '재능의 문제는 개인차의 문제'라고 하였다. 이러한 생각은 재능은 주어진 활동의 성공적인 수행의 조건이 되며, 활동의 수행에 필요한 지식, 기능, 능력 등의 획득 과정에서 차이를 유발시키는 개인적-심리적인 특성들이라는 Petrovskii([14])의 주장과도 일맥상통한다.

Krutetskii는 수학적 재능의 구성 요소들을 규명하기 위해, 실험연구를 통해 다양한 학생들의 개인차에 대한 광범위한 자료를 수집하였다. Krutetskii는 학생들을 수학적 재능의 수준에 따라 [표 11]과 같이 세 집단으로 나누어, 이 집단의 학생들의 개인적-심리적 특성들을 분석, 비교하는 실험연구를 수행하였다.

집 단	학생들의 특징
재능있는 학생들 (C: Capable)	수학 과제를 빠르고 쉽게 익히며, 수학적 연산을 능숙하게 하였다. 새로운 과제를 학습하는 동안 독립적이고 창의적으로 생각하며, 비정형적인 문제들에 대해 독창적인 해답을 발견하였다.
평균적인 학생들 (A: Average)	새로운 형태의 문제를 해결하기 위해 주어진 정보를 변환하는데 큰 어려움을 느낀다. 하지만 반복 연습을 통해 익숙해지면, 유사한 문제에 대해서는 잘 대처하였다. 이들의 지식은 창의적이라기보다는 모방적이다.
수학에 약한 학생들 (Incapable)	부지런하고 열심히 공부함에도 불구하고 수학 학습에서 많은 어려움을 느끼는 학생들로, 다른 과목에서는 성공적일 수도 있으나 수학에서는 눈에 띄는 성취를 이루지 못하였다.

[표 11] 수학적 재능에 따른 실험 대상의 특징

필요한 경우에는 재능있는 학생들을 수학적 재능이 매우 뛰어난 학생들(VC: Very Capable in mathematics)과 재능있는 학생들(C: Capable)로 나누어 분석하였다.

한편 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 실험연구의 결과는 김응태·박한식·우정호([2]), 강완([1]), 한인기([4]), 서보억([3]) 등에 일부가 이미 소개되었으므로, 본 연구에서는 실험연구의 결과는 아주 구체적으로는 기술하지 않을 것이다.

1) 정보의 수집에 관련된 실험연구의 결과

문제해결을 위한 정보의 수집 과정에서 분석-종합적 지각에 관련된 실험연구의 결과는 [표 12]와 같이 정리할 수 있다.

집단	학생들의 개인차
C	수학 문제의 자료를 분석적(요소들을 분리, 체계화, 위계 결정)이고 종합적(복합체로 통합, 수학적 관계와 기능적 종속성 발견)으로 파악한다. 따라서 모든 자료를 놓치지 않고 전체로써 문제를 이해한다.
A	새로운 유형의 문제를 인식할 때 하나의 규칙, 분리된 수학적 요소로 파악한다. 이들을 분석 종합적으로 이해하기 위해서는 이와 관련된 특별한 과제를 다루어야만 한다.
I	문제 각 요소들 사이의 그런 연결과 상호관계를 외부의 도움이 있어도 매우 어렵게 획득한다.

[표 12] 분석-종합적 지각에서의 개인차

Krutetskii는 분석-종합적 지각에서의 개인차에 대해 연구하기 위해, [표 2]에 제시된 것과 같은 실험 문제들을 이용하였다. [표 2]에 제시된 문제들에 대해 C

집단의 학생들은 정확하게 불음을 제시하거나 조건이 부족 또는 과잉되었다는 것을 지적하였다. 이것은 C집단의 학생들이 문제의 구조를 인식했으며, 이에 근거하여 문제의 어떤 요소가 부족한지, 과잉되었는지를 인식하였다는 것을 의미한다. 그리고 과잉된 조건의 존재가 문제해결을 방해하지 못했다.

반면에 A집단과 I집단의 학생들은 제시된 문제에 숨겨진 불음을 인식하지 못하였고, 과잉된 자료는 문제를 해결하는데 커다란 장애가 되었다.

한편 C집단의 학생들의 정보 수집과정에서 분석-종합적인 지적 활동은 단축적이며 매우 빠르게 일어났다. 이들의 분석-종합적인 활동은 마치 문제를 읽으면서 그 자리에서 문제의 구조를 파악하는 것처럼 보이며, 이것은 장기간 연습의 결과가 아니었다.

2) 정보의 변환에 관련된 실험연구의 결과

Krutetskii는 문제해결 과정에서 정보의 변환과 관련하여, 수학적 재능의 요소로 일반화, 추론 과정의 단축, 사고 과정의 유연성, 단순하고 명료하며 우아한 해법의 지향성, 수학적 추론의 가역성을 추출하였다.

수학적 대상, 관계 및 연산을 일반화하는데 필요한 도움의 양을 중심으로, 일반화 과정에서의 개인차를 [표 13]과 같이 정리할 수 있다.

집단	일반화에 필요한 도움의 양에서 개인차
C	어떤 도움없이 수학적 자료를 보자마자 그 자리에서 일반화가 이루어진다.
A	잘 조직된 교육을 통해 유도된 수학적 일반화가 가능하지만, 일반화를 위해서는 먼저 실험 문제들을 풀어보고 비교해야 한다. 교사의 격려와 도움이 있어야 적절하고 오류 없는 일반화가 일어난다.
I	특별히 고안된 자료들, 장시간의 교육을 통해 약간의 일반화가 가능하다.

[표 13] 일반화에서의 개인차

Krutetskii는 일반화 과정에서 재능있는 학생들은 한 문제만 접한 후에 곧바로 문제해결의 틀을 일반화한다는 것을 관찰하였다. 예를 들어 증명문제의 해결에서 C집단의 학생들은 한 번의 증명으로 유사한 모든 증명문제를 어려움 없이 해결하는 반면, A집단과 I집단의 학생들은 간단한 것으로부터 좀더 복잡한 것으로 독립적인 옮김, 일반화가 일어나지 못했다. 이들은 증명과정에서 중간의 몇 단계를 교사의 도움을 통해 진행하면서 증명의 최종단계에 도달할 수 있었다. 추론 과정의 단축과 관련된 개인차를 [표 14]와 같이 정리할 수 있다.

집단	추론 과정에서의 개인차
C	추론 과정이 즉각적이며 빠르게 단축되어, 문제의 지각과 결론이 직접적으로 연결된 것처럼 보인다. 이러한 단축은 근거없는 단축이 아니라, 논리적으로 압축된 사고구조를 갖는 것으로 보인다.
A	처음에는 단축이 잘 일어나지 않지만, 점진적으로 연습의 결과로써 추론과정의 단축이 일어난다.
I	눈에 보이는 단축은 일어나지 않으며, 교사의 도움으로 어렵게 추론과정이 순차적으로 구성된다.

[표 14] 추론 과정의 단축에서의 개인차

추론 과정의 단축은 학생들이 발견한 해법을 일반화한 후에 이루어진다. C집단의 학생들의 일반화는 문제를 지각하면서 곧바로 이루어지므로, 추론의 단축 또한 즉각적으로 관찰되었다.

사고 과정의 유연성과 관련된 개인차는 문제의 다양한 해결 방법, 해법의 발견 시간, 변화된 문제의 해결에 걸린 시간을 중심으로 [표 15]와 같이 정리할 수 있다.

집단	사고 과정의 유연성에서의 개인차
C	어려움 없이 하나의 사고 방향으로부터 다른 사고의 방향으로 성공적인 전환을 하였다. 새로운 과제가 주어지면, 기꺼이 새로운 풀이를 찾기 위해 노력하였고 이 과정에서 이전에 찾았던 풀이는 영향을 끼치지 않았다.
A	이미 해결된 문제에 대해 새로운 풀이 방법을 찾는 것에 대해 어려워했다. 새로운 사고의 방향은 기존의 방향으로부터 벗어나기 힘들었다. 문제해결 과정에서 고정되거나 성공하지 못한 해법을 고치는 것을 어려워하였다.
I	이미 발견한 해결 방법은 그 방법의 변형이라는 측면에서 어떤 가능성도 없는 것처럼 보였다. 만약 어떤 학생이 다른 시점에서 다른 관점으로 문제의 해법을 생각하였다면, 이것은 이전의 풀이 방법을 잊어버렸다는 것을 의미하였다.

[표 15] 사고 과정의 유연성에서의 개인차

단순하고 명료하며 우아한 해법의 지향성과 관련된 개인차는 경제적이며 합리적이며 우아한 해법을 찾는 노력을 중심으로 [표 16]과 같이 정리할 수 있다.

집단	단순하고 명료하며 우아한 해법의 지향성에서의 개인차
C	학생들이 가장 명백하고, 가장 간단하고, 가장 우아한 풀이를 찾기 위해 노력하였다. 그들은 첫 번째 발견한 풀이에 만족하지 않았으며, 풀이의 개선을 위해 노력하였다. 이러한 과정은 그들이 찾은 풀이가 경제적이고 합리적이고 우아할 때에 만족감을 느끼며 비로소 탐구 과정이 종결되었다. 수학을 잘하는 학생일수록 이러한 특성은 분명하게 보인다. 재능있는 학생일수록 이러한 성향이 일찍 나타나기 시작한다.
A	그들이 찾은 풀이가 다루기 힘들거나 복잡할 때, 불만족과 성가심을 직접적으로 말하지만 더 나은 풀이를 찾을 수는 없었다.

[표 16] 단순하고 명료하며 우아한 해법의 지향성

I집단의 학생들은 단순하고 명료하며 우아한 해법의 지향성과 관련하여 어떤 의미로운 결과를 보이지 못했다.

수학적 추론의 가역성과 관련된 개인차는 진행하던 사고의 방향으로부터 역방향으로 전환하는 것에 관련되며, [표 17]과 같이 정리할 수 있다.

집단	추론의 가역성에서의 개인차
C	특별한 어려움이나 도움 없이 주어진 문제의 역문제를 빠르고 예리하게 다루었다. 기존의 문제의 풀이는 역문제의 풀이를 방해하지 않았다. 많은 학생들은 주어진 문제와 별개로 제시된 역문제보다는, 주어진 문제와 결합하여 제시된 역문제를 더 빨리, 더 쉽게 푸는 것을 보여줬다.
A	주어진 문제와 별개로 제시되는 역문제들은 어려움이 해결해 나갔다. 그러나 많은 학생들에게 있어, 주어진 문제를 해결한 후에 곧바로 역문제를 제시하면, 주어진 문제의 해결은 역문제의 해결을 방해하였다.
I	정리와 역을 증명하는 과정에서 정리를 증명한 다음에 곧바로, 정리의 역을 증명하는 것은 항상 많은 어려움을 일으킨다. 오히려 학습한 추론 과정을 잊어버리고, 독립적으로 제시된 어떤 정리의 역을 해결하면 덜 어려워하였다.

[표 17] 추론의 가역성에서의 개인차

3) 정보의 저장에 관련된 실험연구의 결과

문제해결에 관련된 정보의 저장에서 수집된 학생들의 개인차에 대한 자료들을 [표 18]과 같이 정리할 수 있다.

집단	정보의 저장에 관련된 학생들의 개인차
C	문제 유형, 문제를 해결하는 일반적인 방법, 추론의 틀, 증명의 기본 윤곽, 논리적 패턴 등은 지속적으로 기억되었다. 하지만 주어진 문제의 구체적인 수치 자료 등은 문제를 해결하는 동안에는 잘 기억되지만, 그 이후에는 재빨리 잊혀졌다.
A	구체적 데이터와 수치들은 상대적으로 잘 기억했지만, 문제 유형의 특징을 기억하는 부분에는 서툴렀다. 이 학생들은 매번 일반화된 자료들, 구체적인 자료들, 필요 없는 자료들을 같은 수준에서 기억하려고 열심히 노력하였다.
I	전형적인 문제의 해법, 정리의 증명에 대한 기억이 매우 부족했다. 이 내용들의 기억에는 지속적인 반복과 부단한 노력이 요구되었다. 실험자의 도움으로 문제 유형과 문제해결에 필요한 조각들의 일반적인 성질을 이해했을 때조차 학생들은 이들을 재빨리 기억에서 잃어버렸다.

[표 18] 정보의 저장에 관련된 학생들의 개인차

Krutetskii는 C집단의 학생들에서 기억의 작용은 선택적이라고 주장하였다. 이들은 입력되는 모든 수학적 정보를 저장하는 것이 아니라, 구체적인 데이터를 다듬어서 일반화되고 생략된 구조로 표현하여, 이들을 저장하였다. 이러한 과정을 통해, 뇌에 쓸데없는 정보는 저장하지 않으므로 결국 문제의 구조, 문제해결의 틀 등 수학적 활동에서 중요한 역할을 하는 정보들을 더 오래 그리고 보다 쉽게 기억할 수 있었다.

5. 결론

영재교육에서 재능, 재능의 본질과 구조, 재능의 발현, 일반적인 영재성과 특수한 영재성 등과 같은 개념들은 핵심적인 역할을 하는 중요한 것들이다. 이때 재능은 무엇인가? 또는 수학적 재능은 무엇이며 어떻게 계발할 수 있는가? 등과 같은 물음은 영재교육의 정체성 확립, 올바른 방향 정립, 성공적인 구현을 위해 필수적인 전제조건이라 할 수 있다.

본 연구에서는 Krutetskii의 ‘학생들의 수학적 재능의 심리학’을 연구하였는데, 특히 Krutetskii의 생애와 연구 분야, 수학적 재능에 대한 Krutetskii의 연구 방법 및 연구 결과들을 러시아어로 된 문헌들과 영어로 된 문헌들을 종합적으로 조사, 분석하였다.

Krutetskii는 1941년에 모스크바국립대학교의 지질학과를 졸업했으며, 1947년에 Krutetskii는 1947년에 러시아 교육학술원 부설 심리학연구소의 박사과정에 입학하여, 1950년에 Smirnov 박사의 지도하에 박사학위를 취득하였다. 박사학위를 취득한 후에는 심리학연구소에서 약 30년 동안 연구를 하였으며, 1979년부터 모스크바국립사범대학교의 심리학과에서 연구를 하였고, 1991년에 죽었다.

Krutetskii는 발달심리학과 교육심리학 분야에서 전문적인 연구를 하였으며,

130편이 넘는 학술 저술을 남겼다. 특히 본 연구에서 분석하는 ‘학생들의 수학적 재능의 심리학’은 러시아 교육학술원의 우수 학술상을 받았다.

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구는 1955년에서 1966년까지 12년 동안 진행되었다. 수학적 재능에 대한 주된 연구 성과는 실험연구를 통해 얻어졌으며, 비실험연구의 방법도 보충적으로 사용되었다. 실험연구에서는 연구를 위해 특별히 고안된 수학 문제들을 다양한 수학적 재능을 가진 학생들이 해결하는 과정을 질적으로 그리고 양적으로 분석하였다. 한편 비실험연구에서는 특정한 집단의 사람들에 대해 질문지를 이용하거나 면접조사를 통해 수학적 재능에 대한 정보를 수집하였다.

Krutetskii는 비실험연구와 실험연구를 통해, 정보의 수집에 관련된 수학적 재능의 요소들, 정보의 변환에 관련된 수학적 재능의 요소들(일반화, 추론 과정의 단축, 사고 과정의 유연성, 수학적 추론의 가역성), 정보의 저장에 관련된 수학적 재능의 요소들을 성공적으로 추출하였다. 본 연구에서는 비실험연구와 실험연구의 방법, 절차, 결과들을 체계적으로 분석, 정리하여 제시하였다.

Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구는 수학분야의 영재성, 수학적 재능, 수학적 재능의 형성과 발현, 수학적 재능에 대한 연구 방법론의 측면에서 의미로운 시사점을 던져준다. 특히 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구 결과는 수학 영재 선발, 수학 영재 교수-학습 자료 개발, 수학 영재 교수-학습 방법 등의 분야에 직접적으로 응용될 수 있다. 예를 들어, 관찰추천에 의한 수학 영재 학생의 선발 과정에 사용되는 체크리스트를 기술한 수학적 재능의 요소들을 중심으로 개발할 수 있으며, 수학 영재 교수-학습 자료의 개발에서 정보의 변환 과정에서 중요한 측면인 일반화, 유연성, 가역성 등을 고려할 수 있다. 실제로 한인기·꾸쉬니르([5])는 지적인 유연성을 개발할 수 있는 기하학 영역의 학습 자료를 개발하였다.

본 연구의 결과는 수학적 재능에 대한 체계적인 국내 연구의 기반을 조성하며 Krutetskii의 수학적 재능에 대한 연구를 개괄하며, 수학 영재교육 및 수학적 재능에 대한 후속 연구의 참고자료가 될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

- [1] 강완, 수학적 능력 및 발견·발명의 사고과정과 수학교육, 서울대학교 석사 학위 논문(1984).
- [2] 김용태·박한식·우정호, 수학교육학개론, 서울: 서울대출판부(2004).
- [3] 서보억, 중학교 기하교육에서 개인차에 기반한 교수-학습에 대한 연구, 경상대학교 박사학위 논문(2008).
- [4] 한인기, 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부(2006).
- [5] 한인기·꾸쉬니르, 뇌를 자극하는 수학공부, 서울: 경문사(2008).

- [6] 황동주, 수학 영재 관별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사 개발과 채점 방법에 관한 연구, 단국대학교 박사학위 논문(2005).
- [7] Chuprikova N. I., Prediclovie. In Chuprikova N. I., (Ed.), *Psihologiya Matematicheskikh Sposobnostei Shkolnikov*(1998), Moskva: Izdatelstvo NNO <MODEK>.
- [8] Clark B., *영재교육과 재능개발*, 서울: 시그마프레스(2010). (김명숙, 서혜애, 이미순 옮김)
- [9] Feldhusen J. F., Hoover S. M., & Sayler M., *Identifying and educating gifted students at the secondary level*, NY: Trillium Press(1990).
- [10] House P. A., *Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12*. Reston, Virginia: NCTM(1987).
- [11] Keating D. P., *The Study of Mathematically Precocious Youth*. In Stanley J. C., Keating D. P. & Fox L. H., (Ed.), *Mathematical Talent: Discovery, Description, and Development*. Baltimore: Johns Hopkins University Press (1974), pp.23-45.
- [12] Kilpatrick J. & Wirszup I., *Editors' Preface*. In Krutetskii V. A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press(1976).
- [13] Krutetskii V. A., *Psihologiya matematicheskikh sposobnoctei shkolnikov*, Moskva: Prosveshenie(1968).
- [14] Petrovskii A. V., *Sposobnocti*. In Petrovskii A. V.(Ed.), *Obshaya psihologiya*. Moskva: Prosveshenie(1986), pp. 439-462.
- [15] Purcell J. H. & Renzulli J. S., *종합재능 기록표: 영재아 관별과 교육을 위한 체계적인 계획*, 서울: 박학사(2007). (이미순 옮김)
- [16] Rubinshtein S. L., *Problemy obshei psihologii*. Moskva: Pedagogika(1976).
- [17] Siefer W., *재능의 탄생 - 천재성을 폭발시키는 강력한 힘*, 서울: 타임북스 (2010). (송경은 옮김)
- [18] Teplov B. M., *Sposobnocti i odarennoct*. In Gippenreiter Yu. B. & Romanova V. Ya. (Eds.), *Psihologiya individualnyh razlichii*. Moskva: Chero(2002), pp. 262-272.

Kim, Sung Hyun

Hamyang High School, Gyeongsang-namdo

676-803, Korea

E-mail address: cactusys@hanmail.net

Han Inki³⁾

Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University
660-701, Korea

E-mail address: inkiski@gnu.ac.kr

³⁾ correspondent author