실무적 적용 관점에서 신뢰성 분포의 유형화 모형의 고찰

최 성 운*

*경원대학교 산업공학과

Review of Classification Models for Reliability Distributions from the Perspective of Practical Implementation

Sung-Woon Choi*

*Dept. of Industrial Engineering, Kyungwon University

Abstract

The study interprets each of three classification models based on Bath-Tub Failure Rate (BTFR), Extreme Value Distribution (EVD) and Conjugate Bayesian Distribution (CBD). The classification model based on BTFR is analyzed by three failure patterns of decreasing, constant, or increasing which utilize systematic management strategies for reliability of time. Distribution model based on BTFR is identified using individual factors for each of three corresponding cases. First, in case of using shape parameter, the distribution based on BTFR is analyzed with a factor of component or part number. In case of using scale parameter, the distribution model based on BTFR is analyzed with a factor of time precision. Meanwhile, in case of using location parameter, the distribution model based on BTFR is analyzed with a factor of guarantee time.

The classification model based on EVD is assorted into long-tailed distribution, medium-tailed distribution, and short-tailed distribution by the length of right-tail in distribution, and depended on asymptotic reliability property which signifies skewness and kurtosis of distribution curve.

Furthermore, the classification model based on CBD is relied upon conjugate distribution relations between prior function, likelihood function and posterior function for dimension reduction and easy tractability under the occasion of Bayesian posterior updating.

Keywords : Classification Models, BTFR, EVD, CBD, Shape, Scale, Location, Long-Tailed, Medium-Tailed, Short-Tailed, Prior, Likelihood, Posterior

1. 서 론

산업경쟁이 치열해질수록 과학과 기술의 발전으로 인해 기업, 공급자 또는 생산자의 R&D기술, 생산기술, 시험측정 기술조건에 대해 스펙(Specification)이 부적합품(Nonconforming Unit) 또는 부적합(Nonconformities)을 탐지(Detection), 예방(Prevention)하는 품질(Quality) 개선 활동이 더욱 요구되고 있다. 더불어 기업 생산기술조건에 의해 합격된 양품도 고객, 구입자 또는 소비자의 사용 환경조건에 따라 고장(Failure), 클레임(Claim)이 발생되기 때문에 이를 설계 초기단계에서 고려한 신뢰성(Reliability) 혁신활동이 필요하다. ICT(Information and Communication Technology), 조선, 자동차, 반도체 등 한국 수출산업의 원동력이 되는 제품의 구성요소인 핵심부품과 이를 가공, 조립하기 위한 핵심설비가 대부분 선진 외국에서 수입되고 우리는 이를 단순 임가공하

† 본 논문은 2011년도 경원대학교 교내연구비 지원에 의한 결과임

† 교신저자: 최성운, 경기도 성남시 수정구 복정동 산 65 경원대학교 산업공학과

M・P: 011-256-0697, E-mail: swchoi@kyungwon.ac.kr

2011년 1월 12일 접수; 2011년 3월 7일 수정본 접수; 2011년 3월 7일 게재확정

고 있는 실정이다. 외국 바이어(Buyer)가 한국 제품은 국산으로 표기되어 있는데 수리를 위해 분해해 보면 대부분의 부품이 외산인 것을 보고 제품의 신뢰성에 강한 의문감을 가져 판매조건에 불리한 입장에 놓일 수 있다.

이렇듯 무차별적인 원가절감과 성급한 조립성 신제품 응용개발로 인해 국내의 핵심부품과 설비의 생산기반기술이 무너져 내려가고 있다. 이런 취약한 산업구조 환경하에서는 생산자의 제품, 생산기술조건에 대한 정적(Static)인 품질활동으로 고객의 요구를 단기적으로 만족시킬 수 있으나 고객의 다양한 사용조건에 대한 장기적이고 동적인(Dynamic) 신뢰성은 충족시킬 수 없다.

품질개선 활동에서는 생산자의 정적인 생산기술 또는 시험측정 조건하에서 대량의 데이터를 손쉽게 구할 수 있어 계량연속형(Continuous) 데이터인 경우 Z, t, χ^2, F 분포로, 계수이산형(Discrete) 데이터인 경우 초기하, 이항, 포아송분포 등의 [5, 8] 단변량(Univariate), 다변량(Multivariate) 접근방법[11-16]을 사용한다. 그러나 신뢰성 활동에서는 고객의 동적인 사용조건을 시간(Time)의 함수인 분포를 사용해야 하며 실제 Field데이터 또는 고장의 극한 사용조건을 고려한[9, 17] Burn-In, Aging, ALT(Accelerated Life Test), 중도중단(Censoring, Truncated) 시험 또는 베이지안(Bayesian) 신뢰성 분석[10, 19]등을 수행하여야 한다. 이렇듯 신뢰성 혁신 활동은 품질개선보다 시간과 비용의 관점에서 효율성과 효과성을 동시에 고려해야 하는 고등통계 분석기법을 요구한다. 이를 위해 분포사용시 전 생애구간의 데이터를 요구하는 PDF(Probability Density Function)의 확률밀도함수보다 특정구간의 데이터를 효율적으로 처리하는 FR(Failure Rate), HR(Hazard Rate)를 활용한다.[1-4, 6-8]

따라서 본 연구에서는 신뢰성 분포를 대상으로 실무적 적용 관점에서 유형화된 모형을 고찰해 보기로 한다.

유형화 요소는 i) 데이터의 종류에 따른 계수이산형, 계량연속형, ii) 변수의 수에 따른 단변량, 다변량, iii) 확률변수에 따른 고장시간, 고장개수, 샘플수, iv)BTFR (Bath-Tub Failure Rate)에 따른 DFR(Decreasing Failure Rate:DFR), CFR(Constant FR), IFR(Increasing FR), v) EVD(Extreme Value Distribution) 유형에 따른 Short Tail, Medium Tail, Long Tail, vi) CBD(Conjugate Bayesian Distribution)에 따른 분포족(Distribution Family) 등이 있다.

2. BTFR 관점의 유형화 모형

<u>용어</u>

BTFR : Bath-Tub Failure Rate
PDF : Probability Density Function
PMF : Probability Mass Function
CDF : Cumulative Distribution Function
RF : Reliability Function
SF : Survival Function
FR : Failure Rate
HR : Hazard Rate
MVF : Mean Value Function
MRL : Mean Residual Life
MTB(T)F : Mean Time Between (To) Failure
MGF : Moment Generating Function
CF : Characteristic Function
CMF : Cumulative Moment Function
PMF : Probability Moment Function
ISD : Independent and Stationary Distribution
DFR : Decreasing FR
CFR : Constant FR
IFR : Increasing FR
EVD : Extreme Value Distribution
LT : Long Tail
MT : Medium Tail
ST : Short Tail
RS : Right Skew
LS : Left Skew
NPP : Normal Probability Plot
CBD : Conjugate Bayesian Distribution
HPD : Highest Posterior Density
EPD : Equal Posterior Density

2.1 모수, 비모수 척도

2.1.1 모수척도

계수이산형 PMF(Probability Mass Function) $p(x)$는 로트 N개, 샘플 n개 전체에서 고장 x개 나올 확률이며 CDF(Cumulative Distribution Function) $F(x)$는 고장 x개까지의 누적 확률로 $F(x) = \sum_x f(x)$이다.

계량연속형 PDF(Probability Density Function) $f(x)$는 전구간에서 고장 x개 나올 확률이며 CDF $F(x) = \int_x f(x)dx$, RF(Reliability Function), SF(Survival Fuction) $R(t) = 1 - F(t)$, FR(Failure Rate), HR(Hazard Rate) $h(t)$, $\lambda(t) = f(t)/R(t)$, MVF(Mean Value Function) $\overline{H}(t) = (1/t)\,H(t) = (1/t)\int_0^t h(t)dt = (-1/t)\ln R(t)$, MRL(Mean Residual Life) $m(t) =$

$\int_{t}^{\infty} R(t)dt/R(t)$ 이다.

PDF에서 순서통계량 Quantile, Percentile($t_{p,}B_{10}$), Fractile과 Mean $E(t)$ (MTBF, MTTF), Variance $V(t)$, Mode, Median, Avaliability(특정시점), Dependability(전구간)를 구한다. Mean $E(t)$와 Variance $V(t)$를 복잡한 PDF와 직교 Kernel을 효율적인 계산이 가능한 사용해서 MGF(Moment Generating Function)= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}f(t)$ (Laplace Transform= $\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$), CF(Characteristic Function) $=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}f(t)dt$ (Fourier Transform= $\int e^{-iwt}f(t)dt$)로부터 구한다. $w=2\pi f$ 이고 직교하는 Eigenvalue로 Legendre, Hermit, Bessel등과 같이$e^{iwt}=\cos wt+\ isinwt$ Euler 직교 Kernel을 사용한다.

CMF(Cumulative Moment Function)= $\log CF=\log MGF$ 이며, PMF(Probability Moment Function)= $\sum x^n p(n)$(Z Transform= $\sum Z^{-n}p(n)$)이다.

2.1.2 비모수 척도

비모수 척도는 순위(Order, Rank)나 모수척도 $h(t), m(t), R(t)$ 가 미분 불가능한 함수인 경우 단조성(Monotonicity)에 의하여 분포의 Class를 구분하는 방법이다.

2.2 계수이산형 고장갯수

2.2.1 확률변수 x개 고장

Bernoulli($x|p$)는 모고장 p인 샘플 1개에서 고장 $x(=0,1)$개를, Binomial ($x|n,p$)는 모고장 np인 샘플 n개에서 고장$x(=0,1,2,\cdots n)$개를 파악하는 분포이다. 모고장 np인 로트 N이 유한모집단($N/n \le 10$)인 경우 Hypergeometric($x|N,n,p$)를, $np=0.1 \sim 10$인 경우 Poisson(($x|n,p$)를 사용한다. 모고장 $\sum_{i=1}^{k} np_i$, 모고장$\sum_{i=1}^{k} Np_i$ 형태의 다항인 경우 각각 Multinomial, Multivariate Hypergeometric PMF를 활용한다.

Poisson($x|\lambda$)는 FR λ[개/시간]= $1/\theta$[시간/개]= 1/MTB(T)F)로 계량연속형 Exponential($t|\theta$)와 Duality관계를 갖는다. Homogeneous(Memoryless, Markovian, Foregetness) ISD(Independent and Stationary Distribution)인 경우 Poisson($x|\lambda t$)이다. Poisson분포는 MGF성질에 의하여 $x_1 \sim Poisson(x_1|\lambda_1)$, $x_2 \sim Poisson(x_2|\lambda_2)$는 $x_1+x_2 \sim Poisson(x_1+x_2|\lambda_1+\lambda_2)$가 된다.

양구간으로 Bound Binding되는 Rectangular형인 Uniform ($x|a,b$)는 샘플 $(b-a)$개에서 고장 x개를, Beta($x|\alpha,\beta$)는 시간구간 0과 1에서 $(\alpha+\beta)$개중 모고장 α개가 고장나는 x를 파악하는 분포이다.

$B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$이며 다변량 베타분포는 Dirichlet로 나타낸다.

2.2.2 확률변수 n개 샘플

Geometric($n|p$)은 모고장 p인 첫 번째 고장이 일어나는 샘플 n개를, Negative Binomial (Pascal)($n|x,p$)는 모고장 np인 x번째 고장이 일어나는 샘플 n개를 파악하는 방법이다. Geometric 분포는 $(n-1)$개는 고장이 일어나지 않고 n개에서 첫 번째 고장이 일어나므로 2.2.1절의 Poisson, Exponential과 같이 Memoryless의 성질을 가지며 Negative Binomial은 Pascal 분포라고 불리우며 Truncated Negative Binomial을 Logarithm분포라고 한다.

2.3 계량연속형 고장시간

2.3.1 포괄적 BTFR 유형

2.1.1절의 모수척도에서 전 구간을 고려하는 PDF보다 특정구간의 데이터를 효율적으로 사용하는 FR을 전 생애구간에서 적용하는 것이 BTFR(Bath-Tub FR)이다. BTFR은 출하전 기업에서 고장률을 감소시키는 DFR (Decreasing FR, Initial Inherent Failure, Infant Mortality, Early Failures)과 고객의 사용중의 CFR(Constant FR,Change, Random Failure), 폐기 교체시점의 IFR(Increasing FR, Wearout, Preventive Maintenance) 등의 형태로 구성된다.

계량연속형 분포는 Shape(Power) 모수 m, σ와 Scale 모수 θ, $1/\lambda$, α, β, n, Location(Threshold, Guarantee)모수 r, μ, e^{μ}에 의해 형태와 적용의미가 달라진다.

Shape 모수는 분포의 형태와 모양을 결정하며 실무적 관점으로는 부품의 수에 해당된다. Scale 모수는 분포의 폭인 산포 정밀도를 결정하며 Location 모수는 위치 정확도인 수명의 평행이동된 시작점에 해당된다.

ALT(Accelerated Life Test)에서 Location 모수는 Zero로, Shape 모수는 같게 하여 통계적 모형의 Scale 모수와 물리적 모형의 결합관계에 의해 가혹수명으로 정상수명을 Extrapolation한다.

Weibull($t|r,\theta,m$)은 시작점 위치 정확도시간 r에서 정밀도 산포시간 θ[개/시간]인 부품 m개의 수명시간 t를 파악하는 경우 적용되며, $w(t|r,\theta,m=1)$=Exponential 분포, $w(t|r,\theta,m=2)$=Rayleigh분포, $w(t|r,\theta,m=2.5 \sim 4)$=Normal분포가 된다.

Gamma($t|\alpha,\beta$)는 산포 정밀도시간 β[개/시간]인 부품 α개의 수명시간 t를 알아 보는 경우 적용되며 Gamma ($t|1,\beta$)=Exponential 분포가 되며 $\sum_{i=1}^{k} t_i$는 Convolution

에 의하여 구한다. $\chi^2(t|n)=\text{Gamma}(t|\alpha=n/2,\beta=2)$이며, α개가 정수인 경우 Erlang분포라 한다. Gamma분포는 MGF 성질에 의하여 $x_1 \sim \text{Gamma}(t_1|\alpha_1,\beta_1)$, $x_2 \sim \text{Gamma}(t_2|\alpha_2,\beta_2)$는 $x_1+x_2 \sim \text{Gamma}(t_1+t_2|\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$가 된다. 다변량 Gamma는 Wishart분포가 되며 Euler 상수 $r=\lim_{x\to 0}(\Gamma(x)-1/x)$이다.

전자 부품등으로 구성된 시스템의 파국고장(Catastrophic Failure)과는 다른 재료 기계 토목 시스템의 마모고장인 경우 Shape 척도는 개수가 아닌 함수차수의 Power에 의해 분포의 모양을 결정해 주는 모수 역할을 한다.

2.3.2 CFR, IFR 유형

CFR의 대표적 분포가 $\text{Exp}(t|r,\theta=\frac{1}{\lambda})$로 Memoryless, Homogenous ISD, Drenick 정리에 의하여 가장 쉽게 사용되는 신뢰성 대표 분포이다. θ는 평균 수명[시간/개]이고 λ는 고장률[개/시간]의 역수로 각각 Time Domain의 Exponential 분포와 Frequency Domain인 Poisson분포와의 관계와 같다. 즉 Exponential 분포 θ그대로 1개가 몇시간 생존하느냐에 관심이 있다면 Poisson분포 λ는 1시간에 몇 개 고장나느냐의 역수관계이다. 이는 Gamma분포 α개가 몇시간 생존하느냐와 λt Poisson분포 t시간에 몇 개 고장나느냐의 확장된 관계와 같다.

IFR분포는 $\text{Normal}(t|\mu,\sigma^2)$, $\text{Logistic}(t|\mu,\sigma^2)$ Smallest Extreme $\text{Value}(t|\mu,\sigma^2)$으로 위치정확도 μ와 산포정밀도 σ^2인 수명 t를 파악하는 분포이다. 중심극한정리를 사용하는 $\text{Normal}(t|\mu,\sigma^2)$은 $Z=(t-\mu)/\sigma$ 또는 $Z=(\bar{t}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$에 Normal ($t$ 또는 $\bar{t}|0,1^2$)으로 표준정규화되며 $\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=\chi^2(n)$, $Z/(\chi^2(n-1)/(n-1))^{1/2}=t$, $(\chi_1^2,(n_1-1)/(n_1-1))/(\chi_2^2(n_2-1)/(n_2-1))=F$의 Sampling분포가 유도된다. $t_1 \sim \text{Normal}(t_1|\mu_1,\sigma_1^2)$, $t_2 \sim \text{Normal}(t_2|\mu_2,\sigma_2^2)$은 $t_1+t_2 \sim \text{Normal}(t_1+t_2|\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$이 된다.

이 장의 신뢰성분포를 데이터종류, 확률변수, 고장률 형태에 따라 유형화하면 <표 1>과 같다.

3. EVD관점의 유형화 모형

3.1 Skewness와 Kurtosis에 의한 EVD 유형화

EVD(Extreme Value Distribution)의 Asymptotic Tail 분포의 3가지 유형은 <표 2>와 같이 오른쪽 꼬리를 기준으로 긴꼬리 Long Tail(LT)분포, 중간 꼬리 Medium Tail(MT)분포, 가장 짧은 꼬리 Short Tail(ST)분포이다.[9]

<표 1> 신뢰성 데이터, 확률변수에 의한 FR유형화

<표 1.1> 계수형 고장

데이터 유형	확률변수유형	Distribution Family
계수이산형 데이터	x개 고장	Bernoulli분포, Binomial분포, Poisson분포, Truncated Poisson분포, Multinomial분포, Hypergeometric분포, Multivariate Hypergeometric분포, Uniform분포, Truncated Uniform분포, Beta분포, Beta-Binomial Mixed분포
	n개 샘플	Geometric분포, Negative Binomial (Pascal)분포, Logarithm분포

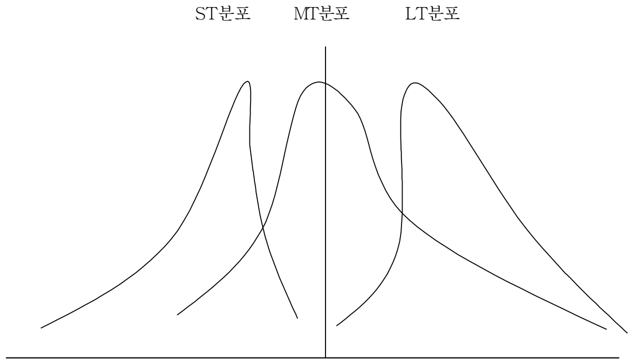
<표 1.2> 계량형 고장

데이터유형	FR유형	Distribution Family
계량연속형 데이터	BTFR 포괄형	Weibull(2, 3-Parameter)분포, Gamma(Erlang)분포, Inverted Gamma분포, Log Gamma분포, Negative Log Gamma분포, Hjorth분포, Dhillon분포
	CFR형	Exponential(1, 2-Parameter)분포)
	IFR형	Normal(Gaussian)분포, Inverse Gaussian분포, Log Normal분포, Rayleigh분포, LIFR(Linearly IFR)분포, PIFR(Power IFR), EIFR(Exponentially IFR)분포, Makeham분포

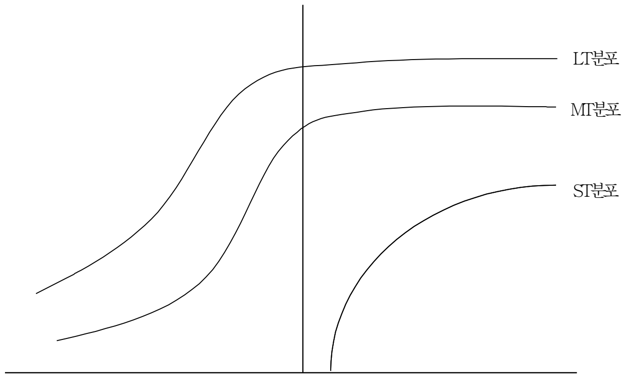
Skewness는 <표 3>과 같이 평균 중앙값, 최빈값의 위치 정확도, 치우침 변화에 따라 음수값이 나오는 Right Skew(RS)와 양수값이 나오는 Left Skew(LS)로 유형화된다. 또한 Kurtosis의 산포 정밀도의 변화에 따라 3보다 작은 Light(Thin) Tail(LT), 3보다 큰 Heavy (Thick) Tail(HT)로 유형화된다. 꼬리분포는 공통적으로 $e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$의 떨어지지 않는 실수를 가지며 Cauchy분포인 경우 원의 지름과 원의 둘레의 비인 π의

<표 2> EVD의 Densities와 Distribution

<표 2.1> Densities



<표 2.2> Distributions



LT분포 : Long Tail분포
MT분포 : Medium Tail분포
ST분포 : Short Tail분포

떨어지지 않는 실수를 가진다.

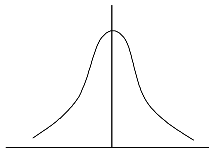
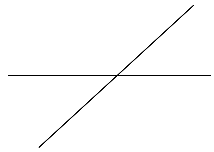
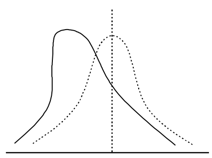
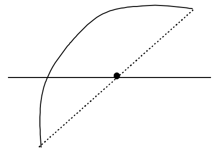
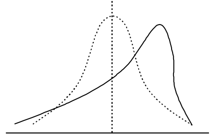
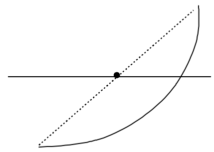
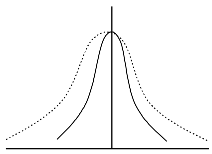
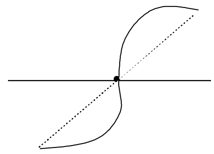
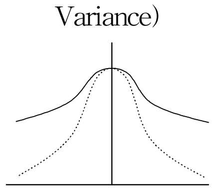
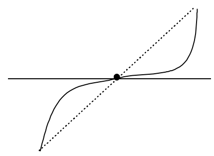
이상의 오른쪽 꼬리기준, Skewness, Kurtosis에 의해 유형화된 EVD분포는 <표 4>와 같다.

3.2 Log변환에 의한 Tail분포

Log변환에 의해 꼬리가 긴 분포의 생성이 가능하며 Normal분포, Logistic분포, SEV분포는 $t = \ln y(dt = dy/y)$에 의하여 Log Normal, Log Logistic, Weibull분포가 되며 $y = e^t(dy = e^t dt)$에 의하여 역변환이 된다.

여기서 Logistic분포의 $h(t|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma}(e^{(t-\mu)/\sigma})/(1+e^{(t-\mu)/\sigma})$에서 $p = e^{(t-\mu)/\sigma}/(1+e^{(t-\mu)/\sigma})$는 계수이산형 신뢰성 데이터에 적용될 수 있다. 선형화(Linearization)를 위해 Logistic Unit 인 $Logit(p) = E(p) = \ln(Odds\ Ratio) = \ln(p/(1-p)) = \beta_0 + \beta_1 x$가 되고 Normal분포인 경우 S자 NPP(Normal Probability Paper)의 함수를 Probit이라 한다.

<표 3> Normal Densities와 NPP

	Densities	NPP : Normal Proppahility Paper
Normal		
Skewness	Right Skew 	커지다가 작아지는 Concave* 
	Left Skew 	작아지다 커지는 Convex** 
Kurtosis	Thin(Light) Tail (Platykurtic, Small Variance) 	Convex에서 Concave 
	Thick(Heavy) Tail (Leptokurtic, Large Variance) 	Concave에서 Convex로 

* : Concave : 양끝점의 두 선분보다 위에 있는 곡선
** : Convex : 양끝점의 두 선분보다 아래에 있는 곡선

<표 4> Asymptotic EVD 유형화

EVD유형	Distribution Family
Long Tail분포 Heavy(Thick) Tail분포 Right Skew분포	Frechet분포, Exp($-x^{-\alpha}$)형 분포, GEV (Greatest EV), MEV(Maximum EV), LEV(Largest EV), Pareto(Power)분포, Log Pareto분포, Log Gamma분포, Cauchy (Laplace)분포, Logistic(Sigmoid, Gompertz, Error Function)분포, Log Logistic분포, Inverted Gamma분포, Inverse Gaussian(Normal)분포, t분포, F분포, Rayleigh분포, Makeham분포, Normal Distribution을 제외한 Stationary 분포
Medium Tail분포	Gumbel분포, Exp(-Exp($-x$))형 분포, Exponential분포, 정규(Gaussian)분포, Log Normal분포, Gamma(Erlang)분포, Double Exponential분포, Epanechinkov 분포, Biweight분포
Short Tail분포 Light(Thin) Tail분포 Left Skew분포	Weibull분포, Exp($-(-x)^{\alpha}$)형 분포, LEV (Least EV), MEV(Minimum EV), SEV (Smallest EV), Uniform(Rectangular) 분포, Beta분포, Negative Log Gamma 분포, Triangular분포, Trapezoidal 분포, Beta분포

4. CBD관점의 유형화 모형

4.1 CBD단계

CBD(Conjugate Bayesian Distribution)에 의한 점 추론단계는 다음과 같다.

단계1. Likelihood($x|\theta_1$)을 Sampling하고 <표5>에 의 해[10] Prior 분포족의 Candidate $f(y|\theta_2)$와 θ_2 모수 에 의한 μ, σ^2 계산방법을 선택한다.

단계2. $f(y|\theta_2)$에서 y를 Likelihood($x|\theta_1$)의 모수 θ_1으로 치환하여 Prior($\theta_1|\theta_2$)를 생성한다.

단계3. Prior($\theta_1|\theta_2$)×Likelihood($x|\theta_1$) = Posterior ($\theta_1|x, \theta_2$)로 Updating한다.

단계4. Posterior($\theta_1|x, \theta_2$)로 단계1의 $f(y|\theta_2)$의 μ, σ^2 계산방법으로 θ_1의 μ, σ^2을 점추정한다.

단계 1에서 다양한 특성의 Conjugate Prior를 생성하기 위해서 Gamma분포는 $t=1/y$의 Inverted Gamma분포, $t=\log y$의 Log Gamma분포, $t=-\log y$의 Negative Log Gamma분포를 생성한다. Inverted Gamma 분포는 Shape 모수가 1보다 작은 경우 μ가, 2보다 작고 1을 초과할 경우 σ^2이 존재하지 않아 신뢰성 분포에서는 사용하지 않고 모분산 역수로 취하는 경우 사용된다. Negative Log Gamma분포는 <표 4>와 같이 Short Tail분포 즉 Left Skew된 가장 취약하게 견디는 고장모형에 적용된다.

Normal분포는 $t=\ln y$인 Log Normal분포와 $t=y^{-1}$인 Inverse Normal분포가 유도된다. Log Normal분포는 Medium Tail분포인 Normal분포보다 오른쪽 꼬리가 긴 분포로 피로균열(Fatigue Crack)같은 경우 적용되며 Inverse Normal은 Left Skew로 왼쪽 꼬리가 긴 분포로 초기고장 또는 직렬구조의 가장 약한 부품의 고장률에 적용된다.

4.2 CBD 점(Point)추론 예

4.2.1 모 고장률(Rate) 추정[19]

단계1. Likelihood Poisson($x|\lambda$) $=\lambda^x e^{-\lambda}/x!$ 샘플링하고 후보(Candidate) Beta($y|\alpha,\beta$) $=1/(\beta^\alpha\Gamma(\alpha))$, • $y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}$, $\mu=\alpha\beta$, $\alpha^2=\alpha\beta^2$을 선택한다.

단계2. y를 λ로 치환하여 Conjugate Prior($\lambda|\alpha,\beta$) $=1/(\beta^\alpha\Gamma(\alpha))$ • $\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\beta}$를 생성한다.

단계3. Prior Beta($\lambda|\alpha,\beta$)×Likelihood Poisoon($x|\lambda$) =Posterior Beta($x|\lambda,\alpha,\beta$)에서 $1/(\beta^\alpha\Gamma(\alpha))(x!)$ •

$\lambda^{(\alpha+x)-1}$ Exp$(-\lambda/(1+1/\beta)^{-1})$이다.

단계4. 단계2의 Candidate Beta $\mu=\alpha\beta, \sigma^2=\alpha\beta^2$에서 Posterior Beta의 모수로 $\mu_\lambda=(\alpha+x)/(\beta^{-1}+1)$이다.

4.2.2 모 고장비율(Ratio) 추정[19]

단계1. Likelihood Binomial$(x|n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$,후보(Candidate) Beta$(x|n_0,x_0)=1/(B(x_0,n_0-x_0))x^{x_0-1}(1-x)^{n_0-x_0-1}$, $\mu=x_0/n_0$

단계2. Prior Beta$(p|n_0,x_0)=1/(B(x_0,n_0-x_0))p^{x_0-1}(1-p)^{n_0-x_0-1}$

단계3. Posterior Beta$(x|n_0,x_0,p)=\binom{n}{x}/(B(x_0,n-x_0))p^{x+x_0}(1-p)^{(n+n_0)-(x+x_0)-1}$

단계4. $\mu_p=(x+x_0)/(n+n_0)$

4.3 CBD 구간 추론

고전적 신뢰구간(Confidence Interval)은 대표본의 Likelihood에 의하여 고정된 모수를 신뢰수준 $1-\alpha=95\%$, 99%로 추정하는 것으로 구간에 포함될 확률은 0아니면 1이다.

이를 보완하는 방법으로 CBD에서는 모수의 사전정보를 Prior의 확률변수로 파악하여 Likelihood Sampling정보로 Posterior를 Updating하여 모수를 추정하는 것으로 신용구간(Credible, Probability Interval)은 100번 중 95번 또는 99번이 모수를 포함할 수 있다는 것을 의미한다.

CBD구간추정은 Outlier에 영향을 받는 평균대신 최대값을 갖는 최빈값(Mode)의 밀도가 같은(Ordinate) HPD (Highest Posterior Density)방법으로 구한다. 그러나 이 방법은 계산과 해석이 어려워 $100(\frac{\alpha}{2})\%\sim 100(1-\frac{\alpha}{2})\%$의 EPD(Equal Posterior Density)방법을 사용한다.

5. 결 론

본 연구에서는 신뢰성 분포를 BTFR, EVD, CBD의 3가지 관점에서 도표로 유형화하고 실무적 적용방안을 제시하였다.

첫째, 계수이산형 데이터는 고장개수와 샘플크기의 확률변수에 따라 유형화하고 계량연속형 데이터는 고장유형에 따라 3가지 모수의 사용방법을 제안하였다. 즉 전자제품의 시스템 고장에서 형상모수는 부품의 개수, 척도모수는 산포 정밀도시간, 위치모수는 보증수명 등으로 활용된다.

둘째, 가장 취약한 직렬부품과 가장 오래 견디는 피로파괴등에 적용되는 왜도와 첨도를 고려한 근사꼬리분포를 오른쪽 꼬리관점과 더불어 유형화하였다.

끝으로 우도함수, 사후분포와 공액분포 관점에서 사전함수를 적용하는 단계와 유형화 방안을 제시하였다.

<표 5> CBD 유형화

Conjugate Prior Distribution Family	Likelihood Sampling	Updating Posterior
Beta분포	Binomial Negative Binomial(Pascal)분포	Beta분포
Gamma분포	Poisson분포 Exponential분포 Normal분포	Gamma분포
	Normal분포	Normal분포
	Poisson분포	Negative Log Gamma분포
Inverted Gamma분포	Normal분포	Inverted Gamma분포
Normal분포	Normal분포	Normal분포
Uniform분포	Binomial분포	Beta분포

6. 참 고 문 헌

[1] 김원경, 시스템 신뢰도 공학, 교우사, 1999.
[2] 박동호 외, 공학도를 위한 수명분포개념과 응용, 영지문화사, 2006.
[3] 백재욱, 가속수명시험, 에피스테메.
[4] 서순근, MINITAB 신뢰성 분석, 이레테크, 2006.
[5] 성내경, 통계분포, 제 2판, 자유아카데미, 2002.
[6] 이상용, 신뢰성공학, 형설출판사, 2003.
[7] 정해성 외, 신뢰성 시험분석평가, 영지문화사,2007.
[8] 최성운, "신뢰성 척도 및 분포의 적용", 대한안전경영과학회지, 7(5)(2005): 175-184.
[9] 최성운, "근사꼬리분포의 유형화에 따른 적용모형 고찰", 대한안전경영과학회 추계학술대회발표논문집,(2010): 35-39.
[10] 최성운, "품질 및 신뢰성 기법에서 연역 및 귀납 추론에 의한 Conjugate분석의 고찰", 대한안전경영과학회 추계학술대회발표논문집, (2010): 27-33.
[11] Johnson N.L., Kemp A.W., Univariate Discrete Distributions, 3rd Edition, Wiley, 2005.

[12] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Continuous Univariate Distributions, Volume 1, 2nd Edition, Wiley, 1994.
[13] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Continuous Univariate Distributions, Volume 2, 2nd Edittion,Wiley, 1995.
[14] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N., Discrete Multivariate Distributions, Wiley, 1997.
[15] Kotz S., Balakrishnan N., Johnson N.L.,Continuous Multivariate Distributions, Volume 1 :Models and Applications, 2nd Edition, Wiley, 2000.
[16] Kotz S., Nadarajah S., Extreme Value Distributions :Theory and Applications, Cambridge University Press, 2004.
[17] Kotz S., Nadarajah S., Extreme Value Distributions :Theory and Applications, Imperial College Press, 2000.
[18] Marshall A.W., Olkin I., Life Distributions : Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families, Springer, 2007.
[19] Martz H.F., Waller R.A., Bayesian Reliability Analysis, Wiley, 1982.

저 자 소 개

최 성 운

현 경원대학교 산업공학과 교수. 한양 대학교 산업공학과에서 공학사, 공학석사, 공학박사 학위를 취득하고, 1994년 한국과학재단 지원으로 University of Minnesota에서 1년간 Post-Doc을 수행했으며, 2002년부터 1년 반 동안 University of Washington에서 Visiting Professor를 역임하였음. 주요 관심분야는 자동화 생산 및 장치 산업에서의 품질관리이며, 통신, 정보시스템의 보안, 신뢰성 설계 및 분석, 서비스 사이언스, RFID시스템, Wavelet에도 관심을 가지고 있음.

주소: 경기도 성남시 수정구 복정동 산65번지 경원대학교 산업공학과