

섭동/상관관계 기반 최적화 기법

Perturbation/Correlation based Optimization

이 수 용*
(Sooyong Lee¹)
¹Hongik University

Abstract: This paper describes a new method of estimating the gradient of a function with perturbation and correlation. We impose a known periodic perturbation to the input variable and observe the output of the function in order to obtain much richer and more reliable information. By taking the correlation between the input perturbation and the resultant function outputs, we can determine the gradient of the function. The computation of the correlation does not require derivatives; therefore the gradient can be estimated reliably. Robust estimation of the gradient using perturbation/correlation, which is very effective when an analytical solution is not available, is described. To verify the effectiveness of perturbation/correlation based estimation, the results of gradient estimation are compared with the analytical solutions of an example function. The effects of amplitude of the perturbation and number of samplings in a period are investigated. A minimization of a function with the gradient estimation method is performed.

Keywords: perturbation, correlation, optimization

I. 서론

최적화는 시스템의 설계[1], 제어[2], 측정[3] 등 다양한 분야에 널리 사용되어왔다. 성능 최적화를 위한 다양한 알고리즘들은 오랜 기간 동안 연구되어 왔으며 대부분의 방법들이 필수적으로 요구하는 정보는 최적화하려는 목적 함수의 기울기(gradient)이다. 가장 널리 사용되는 방법들 중 최급강하(steepest descent) 알고리즘은 1차 테일러 급수 전개식, 뉴턴 방법은 2차 테일러 급수에 기반을 둔다[4]. 함수 기울기의 해석해가 존재한다면 이러한 방법들을 적용하여 최적화할 수 있으나, 해석해가 존재하지 않는 경우에는 함수의 1차 또는 2차 기울기 값을 추정하는 방법이 필요하다. 이 논문은 함수의 기울기에 대한 해석해가 존재하지 않는 경우, 단순한 수치해석(numerical difference)적인 기울기를 사용하는 대신 섭동 신호를 함수의 입력변수에 가하고, 이 신호와 함수 출력 사이의 상관관계 값으로부터 기울기를 추정하는 방법에 대하여 소개한다.

조립 자동화 분야에서는 작은 진폭, 높은 주파수의 섭동 신호를 가하여 마찰을 줄이는 방법이 오래 전부터 사용되고 있다[5]. 주어진 조립 작업에 대하여 최적의 진폭과 주파수를 구하는 연구가 이루어졌으며[6], 로봇을 사용한 열교환기 조립작업에서 로봇의 움직임에 진동을 가하여 로봇의 위치 명령을 수정하는 제어방법이 소개되었다[7]. 이 연구에서는 진동 신호가 마찰을 줄이는 목적뿐만 아니라 조립작업이 수월해지는 로봇의 위치를 구하는 정보를 얻기 위하여 사용되었다. 기존의 수동적인 센싱 방법과는 달리 센서에 움직임을 가하여 센서 정보를 해석하는 연구에서는 능동적인 센서 움직임과 센서 측정량과의 상관 관계 값이 보다 유용한 환경 정보를 제공하였다[8]. 내연기관의 출력을 최대화하기 위한

튜닝을 위하여 각종 입력 변수들의 수동 조작이 아니라 이 변수들에 섭동신호를 가하여 이 신호와 엔진 출력과의 상관관계로부터 입력 신호의 증/감 정보를 얻는 방법이 연구되었다[9]. 이 연구에서는 스파크 타이밍, 연료 분사 펄스폭이 두 개의 입력 변수들이고, 엔진 출력을 최대화하는 입력 변수들의 최적값을 찾는 예가 소개되었다. 주행로봇의 경로 생성에도 목적 함수를 설정하여 이를 최적화하는 방법이 많이 사용된다. 예를 들어 현재 위치로부터 목적지까지 거리를 최소화하는 속도 명령이 필요하다. 이때 거리를 최소화 하기 위하여 거리에 대한 속도의 기울기 값이 필요하고, 이를 섭동/상관관계로부터 구하는 연구가 소개되었다[10].

이 논문에서는 섭동/상관관계의 일반화와 다양한 함수에 대한 적용을 소개하고, 이에 사용되는 다양한 매개 변수들의 영향에 대한 고찰이 이루어졌다.

II. 섭동/상관관계

함수의 기울기를 구하기 위하여 본 논문에서는 섭동/상관 관계를 제안한다. 이 장에서는 이 방법의 일반화를 위하여 몇 가지 종류의 함수에 대하여 그 유효성을 검증한다.

다음 식과 같이 간단한 형태의 단일 입력 변수, x 를 갖는 함수 F 에 대하여

$$F = F(x) \quad (1)$$

공칭점(nominal point) x_0 에 섭동 값 $\delta(t)$ 를 더한 입력 변수가 주어진다.

$$x(t) = x_0 + \delta(t) \quad (2)$$

섭동 값은 일반적으로 연속이며 미분 가능한 함수 값이 사용되며, 흔히 다음과 같이 진폭 ε , 주파수 ω 값을 갖는 $\sin()$ 함수가 사용된다.

$$\delta(t) = \varepsilon \sin(\omega t) \quad (3)$$

상관 관계 값 R 은 다음 식과 같이 정의된다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 5. 20., 수정: 2011. 6. 5., 채택확정: 2011. 6. 20.

이수용: 홍익대학교 기계시스템디자인공학과(sooyong@hongik.ac.kr)

※ 이 논문은 2011년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0007794).

$$R = \int_{t_0}^{t_0+2\tau_0} \delta(\tau)F(x(\tau))d\tau \quad (4)$$

마찬가지로 이산 시스템에 대하여 상관 관계 값 \hat{R} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{2N} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right)F(x(t_i)) \quad (5)$$

입력변수 x 에 대한 섭동입력의 이산 시스템 표현은

$$x(t_i) = x_0 + \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right); i=1, \dots, 2N \quad (6)$$

과 같이 표현되므로, 상관 관계 값은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{2N} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right)F\left(x_0 + \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right)\right) \quad (7)$$

상관 관계 값과 함수의 기울기 사이의 관계를 유도하기 위하여 선형회귀 방법을 적용한다. 즉, $(x(t_i), F(x(t_i))); i=1, \dots, 2N$ 데이터의 선형회귀분석으로부터 기울기 K 는 다음과 같이 유도된다.

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{2N} (x(t_i) - \bar{x}) [F(x(t_i)) - \bar{F}]}{\sum_{i=1}^{2N} (x(t_i) - \bar{x})^2} \quad (8)$$

여기서 $\bar{x} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} x(t_i)$ 이며 $\bar{F} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} F(x(t_i))$ 로 정의된다. 섭동이 가해진 $x(t_i)$ 를 대입하면 위 식은

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{2N} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right) [F(x(t_i)) - \bar{F}]}{\sum_{i=1}^{2N} \varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N}i\right)} \quad (9)$$

와 같이 표현되며, 이때 분자의 둘째 항과 분모는 다음과 같이 단순화된다.

$$\sum_{i=1}^{2N} \bar{F} \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right) = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{2N} \varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{N}i\right) = N\varepsilon^2 \quad (11)$$

따라서 섭동이 가해진 데이터의 선형 회귀분석으로부터 함수의 기울기 추정 값은

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{2N} F(x(t_i)) \sin\left(\frac{\pi}{N}i\right)}{N\varepsilon} \quad (12)$$

이므로, 이를 상관계수 \hat{R} 식과 비교하여 둘 사이의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\hat{R} = n\varepsilon^2 K \quad (13)$$

위의 관계식은 상관 값과 함수의 기울기 사이의 관계를 나타낸다.

다음은 섭동/상관관계를 두 개의 입력 변수를 갖는 함수에 대하여 적용해본다. 아래 식과 같이 두 개의 입력변수 x, y 를 갖는 함수 F 에 대하여

$$F = F(x, y) \quad (14)$$

테일러 급수 전개를 통하여 이 함수는

$$F[x(\tau + \Delta t), y(\tau + \Delta t)] = F[x(\tau), y(\tau)] + \delta_x(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\tau} + \delta_y(t) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\tau} \quad (15)$$

와 같이 표현된다. 두 개의 입력 변수에 동시에 섭동을 주기 위해서 다음과 같은 직교(orthogonal) 함수를 각각 사용한다.

$$\delta_x = \varepsilon_x \sin(\omega t) \quad (16)$$

$$\delta_y = \varepsilon_y \cos(\omega t) \quad (17)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 는 각 섭동입력의 진폭, ω 는 섭동 주파수이다. 입력변수 x 와 함수 F 간의 상관관계를 구하면,

$$\overline{\delta_x F} = \int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x F[x(\tau), y(\tau)] dt + \int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x^2 \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\tau} dt + \int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x \delta_y \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\tau} dt \quad (18)$$

하나의 입력변수인 경우와 마찬가지로 섭동 함수로 사용된 $\sin()$ 함수의 특성으로 다음과 같이 식이 정리되며,

$$\int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x dt = 0 \quad (19)$$

$$\int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x^2 dt = \frac{\pi \varepsilon_x^2}{\omega} \quad (20)$$

또한 직교관계인 $\sin()$ 함수와 $\cos()$ 함수의 특성으로 인하여

$$\int_{t_0-2\pi/\omega}^{t_0} \delta_x \delta_y dt = 0 \quad (21)$$

와 같이 단순화 된다. 따라서 입력변수 x 와 함수 F 간의 상관관계는

$$\overline{\delta_x F} = \frac{\pi \varepsilon_x^2}{\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\tau} \quad (22)$$

로 단순화되고, 이 식으로부터 함수 F 의 입력 변수 x 에 대한 기울기는

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\tau} = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_x^2} \overline{\delta_x F} \quad (23)$$

와 같이 표현된다. 마찬가지로 단순화 과정을 거쳐, 함수 F 의 입력 변수 y 에 대한 기울기는 다음 식과 같이 정리된다.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\tau} = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_y^2} \overline{\delta_y F} \quad (24)$$

두 개를 초과하는 다수의 입력변수를 갖는 일반 함수인 경우, 섭동함수의 선정은 함수의 직교성에 기반한다. 두 함수 f, g 의 내적(inner product)은 양의(positive) 가중치(weighting) 함수 $w(x)$ 를 사용하여 다음과 같이 정의하면,

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad (25)$$

두 함수는 다음 식과 같이 내적이 0일 때 직교(orthogonal)

함수로 분류된다.

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0 \quad (26)$$

예를 들어 $\sin(mx), \cos(mx) : n=1, 2, 3, \dots$ 함수들은 0에서 2π 까지 구간에서 직교함수들이다. 따라서 다수의 입력변수를 갖는 함수의 경우 입력 변수들에 식 (26)을 만족하는 직교함수들을 사용하여 섭동을 가하여 상관관계를 구하는 식을 정리한다.

다음 단계는 다 변수 함수인 경우, 특히 섭동을 가하지 않는 다수의 입력 변수가 존재하는 경우의 섭동/상관관계에 대한 고찰이다. 앞서 유도한 두 개의 입력 변수 함수의 경우, 함수의 입력변수가 두 개뿐이며 이 두 변수에 각각 직교성을 갖는 섭동을 가하였다. 보다 일반적인 경우에 대한 검증은 위하여, 다음과 같이 다수의 입력변수가 존재하고, 이중 4개의 입력 변수, x_1, x_2, x_3, x_4 는 섭동이 가해지는 입력 변수이며, ξ_1, \dots, ξ_m 는 그 이외의 입력변수인 경우이다.

$$F = F(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \dots, \xi_m) \quad (27)$$

네 개의 입력변수에 다음과 같이 각각 서로 직교하는 함수로 섭동이 가해진다.

$$\delta_{x_1} = \varepsilon_1 \sin(\omega t) \cos(2\omega t) \quad (28)$$

$$\delta_{x_2} = \varepsilon_2 \sin(\omega t) \sin(2\omega t) \quad (29)$$

$$\delta_{x_3} = \varepsilon_3 \cos(\omega t) \cos(2\omega t) \quad (30)$$

$$\delta_{x_4} = \varepsilon_4 \cos(\omega t) \sin(2\omega t) \quad (31)$$

앞의 경우와 같이 테일러 급수 전개를 하면,

$$\begin{aligned} & F[x_1(\tau + \Delta t), x_2(\tau + \Delta t), x_3(\tau + \Delta t), x_4(\tau + \Delta t), \\ & \quad \xi_1(\tau + \Delta t), \dots, \xi_m(\tau + \Delta t)] \\ &= F(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau), \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)) \\ & \quad + \delta_{x_1}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r + \delta_{x_2}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_r + \delta_{x_3}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x_3} \right|_r + \delta_{x_4}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x_4} \right|_r \\ & \quad + \delta_{\xi_1}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \right|_r + \dots + \delta_{\xi_m}(t) \left. \frac{\partial F}{\partial \xi_m} \right|_r + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (32)$$

입력변수 x_1 에 대하여 함수와의 상관관계식을 풀어보면,

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{x_1} F} &\approx \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1}(t) F[x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau), \\ & \quad \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)] dt \\ & \quad + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1}^2 \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r dt + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{x_2} \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_r dt \\ & \quad + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{x_3} \left. \frac{\partial F}{\partial x_3} \right|_r dt + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{x_4} \left. \frac{\partial F}{\partial x_4} \right|_r dt \\ & \quad + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{\xi_1} \left. \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \right|_r dt + \dots + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{\xi_m} \left. \frac{\partial F}{\partial \xi_m} \right|_r dt \end{aligned} \quad (33)$$

위 식 우변의 각 항에 대하여 섭동 입력 식을 대입하여 단순화하면, 우변의 둘째 항은,

$$\int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1}^2 \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r dt = \left(\frac{\varepsilon_1^2 t}{4} - \frac{3\varepsilon_1^2 \sin(2\omega t)}{16\omega} \right) \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r \quad (34)$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon_1^2 \sin(4\omega t)}{16\omega} - \frac{\varepsilon_1^2 \sin(2\omega t)}{48\omega} \right) \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r = \frac{\varepsilon_1^2 \pi}{2\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r$$

셋째 항은,

$$\begin{aligned} & \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{x_2} \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_r dt = \\ & \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(2\omega t)}{16\omega} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(4\omega t)}{16\omega} \right) \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_r \\ & \quad + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos(6\omega t)}{48\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_r = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

넷째, 다섯째 항도 이와 유사하며, 따라서 식 (33)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{x_1} F} &\approx 0 + \frac{\varepsilon_1^2 \pi}{2\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \left. \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{\xi_1} dt + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial F}{\partial \xi_m} \left. \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{\xi_m} dt \right. \end{aligned} \quad (36)$$

이때 우변의 둘째 항만을 남기고 ξ_1, \dots, ξ_m 입력 변수들에 대한 영향을 받지 않는 조건은 다음 식과 같다.

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \left. \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_{x_1} \delta_{\xi_i} dt \right| \ll \left| \frac{\varepsilon_1^2 \pi}{2\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_r \right| \quad (37)$$

위의 조건을 만족한다면 함수 F 의 각 입력변수 x_i 에 대한 기울기는

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{2\omega}{\varepsilon_i^2 \pi} \overline{\delta_{x_i} F} \quad (38)$$

와 같이 일반화된다.

다음 예는 입력변수 중 하나가 입력변수의 시간에 대한 미분 값을 포함하는 경우이다[7].

$$F = F(x, z, \dot{z}) \quad (39)$$

이 예는 에어컨용 열 교환기의 조립과정을 로봇을 사용하는 작업의 모델링이며 함수 F 는 Z 방향으로 파이프를 삽입할 때 저항력이며 삽입방향과 직각인 X 방향으로 섭동이 가해진다. 또한 삽입속도는 $\dot{z} = V_o$ 로 일정하게 설정되어 삽입 깊이는

$$z = z_o + V_o t \quad (40)$$

와 같이 표현된다. 이 시스템에 대하여 테일러 급수 전개를 통하여 해석하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & F[x(\tau + \Delta t), z(\tau + \Delta t), V_o] = \\ & F[x(\tau), z(\tau), V_o] + \delta_x(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r + \delta_z(t) \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_r + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (41)$$

상관관계를 근사화하면,

$$\begin{aligned} \overline{\delta_x F} &\approx \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r F[x(\tau), z(\tau), V_o] \delta_x(t) dt \\ & \quad + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r \delta_x^2 \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r dt + \int_{r-\frac{2\pi}{\omega}}^r V_o t \delta_x \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_r dt \end{aligned} \quad (42)$$

입력 변수 x 에 다음과 같은 섭동이 가해지면

$$\delta_x = \varepsilon_x \sin(\omega t) \tag{43}$$

식 (42)는 다음과 같이 단순화 되어

$$\overline{\delta_x F} \approx 0 + \frac{\varepsilon_x^2 \pi}{2\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r - \frac{2\varepsilon_x \pi}{\omega^2} V_o \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_r \tag{44}$$

이 경우 셋째 항의 영향을 무시하기 위해서는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\left| \frac{2\varepsilon_x \pi}{\omega^2} V_o \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_r \right| \ll \left| \frac{\varepsilon_x^2 \pi}{2\omega} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r \right| \tag{45}$$

즉, 섭동 주파수를 가능한 큰 값을 사용하고 진폭은 작은 값, 삽입속도는 작은 값을 사용해야 하는 것을 알 수 있다. 이와 같이 각 응용 예에 대하여 위와 같은 해석을 수행하면 오차를 줄이기 위한 조건을 구할 수 있다.

III. 센서 잡음 및 불확실성

본 논문에서 기술한 섭동/상관 관계 기반의 함수 기울기 추정방법을 전자/기계시스템을 대상으로 구현할 때 가장 큰 문제는 함수 출력을 측정하는 센서의 출력에 더해지는 잡음 및 센서 정보의 불확실성이다. 이를 고려하기 위하여 student t -distribution에 기반한 섭동/상관 관계를 유도한다. Student t -distribution은 모평균(population mean)에 대한 통계적 추론에서 모분산(population variance)값을 알 수 없을 때, 특히 표본의 크기가 작을 때 유용하게 사용된다.

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ 인 정규집단에서 표본평균(sample mean)은 \bar{X}_n , 표본분산(sample variance)은 S_n^2 로 표현하면, 자유도 $n-1$ 인 t -distribution은 다음과 같이 정의된다.

$$t = (\bar{X}_n - \mu) \frac{\sqrt{n}}{S_n} \tag{46}$$

예를 들어 90 퍼센트 신뢰도(confidence level) 구간은

$$\bar{X}_n \pm t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{47}$$

이다. 이러한 분포를 갖는 잡음 X 을 포함하는 단일 입력함수의 섭동/상관 관계를 다음과 같이 추정한다. 테일러 급수 전개를 통하여 이 함수는

$$\begin{aligned} F[x(\tau + \Delta t)] + X(\tau + \Delta t) = \\ F[x(\tau)] + \delta_x(t) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r + \delta_y(t) \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_r + X(\tau) \end{aligned} \tag{48}$$

와 같이 표현된다. 단일 입력 변수 함수이므로 식 (16)과 같은 $\sin()$ 함수를 섭동항으로 사용한다. 이때 잡음관련 항은 다음과 같은 변수, ΔX 를 사용하여

$$\Delta X = X(\tau + \Delta t) - X(\tau) \tag{49}$$

90 퍼센트 신뢰도 구간의 표본평균이 다음과 같이 표현되므로

$$-t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{50}$$

ΔX 크기의 최댓값은

$$|\Delta X| = 2t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{51}$$

와 같이 표현된다. 잡음을 포함하는 경우에 대하여 입력변수 x 와 함수 F 간의 상관관계를 구하면,

$$\begin{aligned} \overline{\delta_x F} = \int_{\tau - \frac{2\varepsilon_x}{\omega}}^{\tau} \delta_x F[x(\tau)] dt + \int_{\tau - \frac{2\varepsilon_x}{\omega}}^{\tau} \delta_x^2 \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r dt \\ + \int_{\tau - \frac{2\varepsilon_x}{\omega}}^{\tau} \delta_x 2t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} dt \end{aligned} \tag{52}$$

위의 식의 마지막 항의 크기가 최대인 경우는 한 주기 동안 잡음 항의 부호가 섭동항인 $\sin()$ 함수와 같은 부호를 갖고 변화할 때이며, 그 최댓값은,

$$\left| \int_{\tau - \frac{2\varepsilon_x}{\omega}}^{\tau} \delta_x 2t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} dt \right| = 8\varepsilon_x t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{53}$$

이다. 따라서, 잡음이 존재하는 경우 함수 F 의 입력 변수 x 에 대한 기울기는 식 (52)로부터

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_r = \frac{\omega}{\pi \varepsilon_x^2} \overline{\delta_x F} \pm \frac{8\omega}{\pi \varepsilon_x} t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{54}$$

와 같이 표현된다. 그러므로, 센서 잡음의 영향을 줄이기 위한 조건은

$$\left| 8t_{(0.05, n-1)} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right| \ll \left| \frac{1}{\varepsilon_x} \overline{\delta_x F} \right| \tag{55}$$

와 같다. 즉, 잡음의 표본분산이 작은 경우, 자유도가 높은 경우, 섭동 진폭이 작은 경우에 잡음의 영향이 적음을 알 수 있다.

IV. 최적화 적용 예 및 매개 변수 설정

두 개의 입력변수를 갖는 함수에 섭동/상관관계를 이용한 최적화를 적용하기 위하여 [11]에서 예로 든 다음 함수를 사용하였다.

$$F(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^4 + 8x_1x_2 - x_1 + x_2 + 3 \tag{56}$$

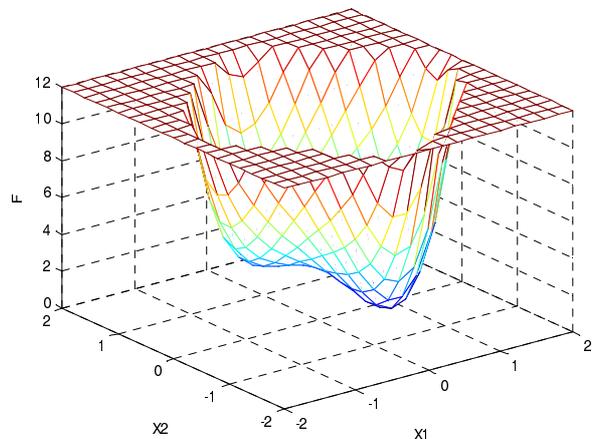


그림 1. 최소점을 갖는 함수.
Fig. 1. A function with minimums.

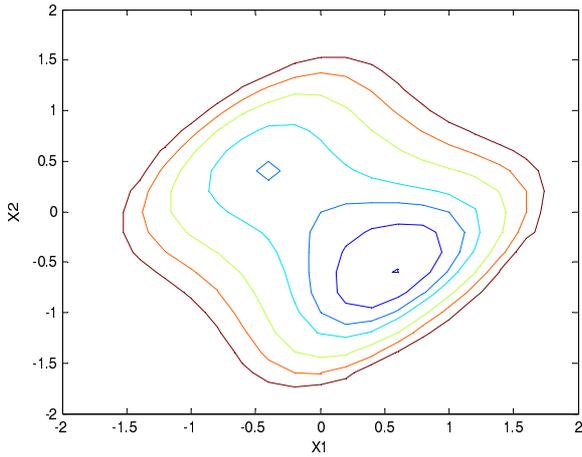


그림 2. 함수의 등고선도.
Fig. 2. Contour of a function.

그림에서 알 수 있듯이 이 함수는 점(-0.42,0.42)와 점(0.55,-0.55)의 두 점에서 지역 강 최소점(strong minimum)을 가지고, 점(0.55,-0.55)는 전역 최소점(global minimum)이다. 또한 점(-0.13,0.13)은 안장점(saddle point)이다.

이 함수의 기울기 벡터는 다음과 같이 정의 되므로

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

기울기 벡터의 해석적 해는

$$\nabla F = \begin{bmatrix} -4(x_2 - x_1)^3 + 8x_2 - 1 \\ 4(x_2 - x_1)^3 + 8x_1 + 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

이다. 제안한 방법의 추정 정확도 및 설정 값들의 영향을 확인하기 위하여 점 $(x_1, x_2) = (0.5, -1.5)$ 에서 제안한 방법을 사용하여 추정한 기울기 값과 식 (58)의 해석적 해의 값들을 비교하였다. 먼저 섭동 진폭의 영향을 살펴보기 위하여 다음과 같은 다섯 조건에서 두 가지 방법의 결과를 비교하였다.

$$\varepsilon = [0.0001 \quad 0.001 \quad 0.01 \quad 0.1 \quad 1]$$

그림 3과 그림 4는 섭동 진폭에 따른 해석적 해의 값과 제안한 방법으로 구한 기울기 값들을 보여준다. 진폭이 1인 경우를 제외하고는 두 가지 방법의 결과가 거의 일치하는 것을 보여준다. 진폭의 값을 결정하는 정형화된 식은 없으나, 그 점에서의 기울기보다 충분히 작으면 진폭에 관계없이 정확한 값을 얻을 수 있다. 그러나 대부분 해석해가 존재하지 않는 경우에 미지의 기울기 값을 구하기 위하여 이 방법을 사용하므로, 기울기 값을 얻기 전에 미리 그보다 충분히 작은 진폭 값을 설정할 수 없으며, 일반적으로 충분히 작으나 계산 과정에서 잘라버림(truncation) 오차보다는 큰 값을 사용한다.

다음은 한 주기당 샘플링 수의 영향을 확인하기 위하여 다음과 같은 다섯 가지 조건에 대하여 앞의 경우와 같은 계산을 수행하였다.

$$N = [2 \quad 5 \quad 10 \quad 50 \quad 100]$$

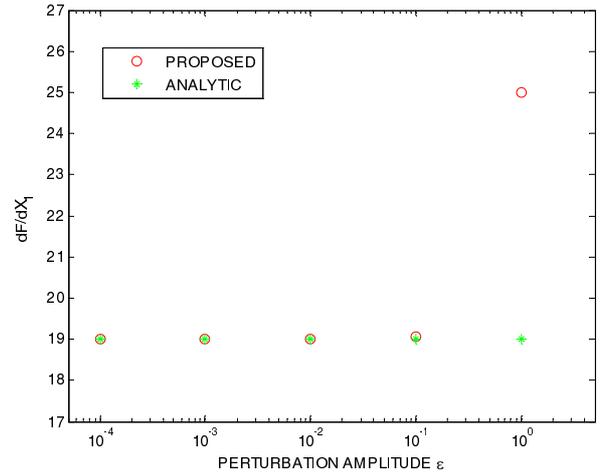


그림 3. 섭동 진폭과 $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ 추정 값.

Fig. 3. Perturbation amplitude vs. estimated $\frac{\partial F}{\partial x_1}$.

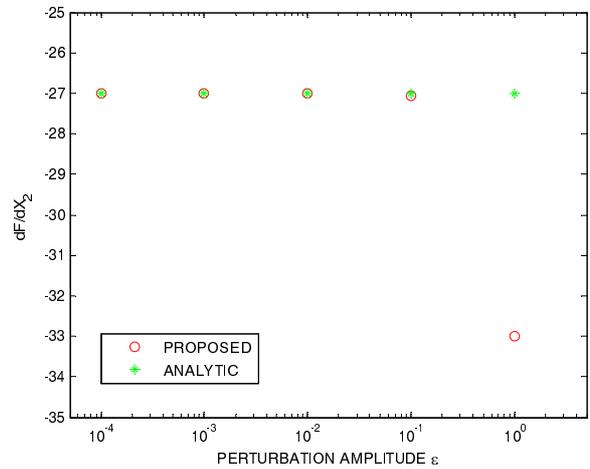


그림 4. 섭동 진폭과 $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ 추정 값.

Fig. 4. Perturbation amplitude vs. estimated $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

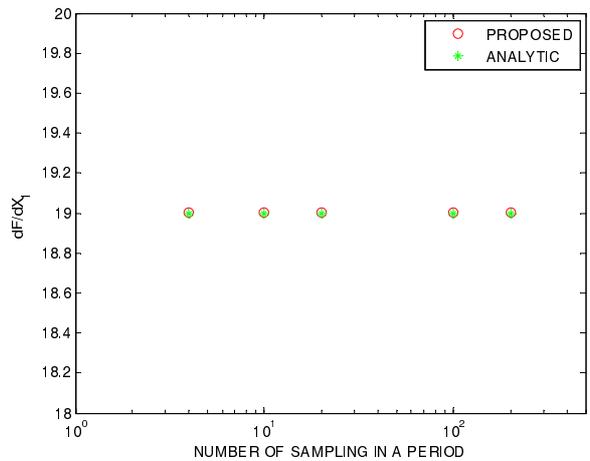


그림 5. 한 주기당 샘플링 수와 $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ 추정 값.

Fig. 5. Number of samplings in a period vs. estimated $\frac{\partial F}{\partial x_1}$.

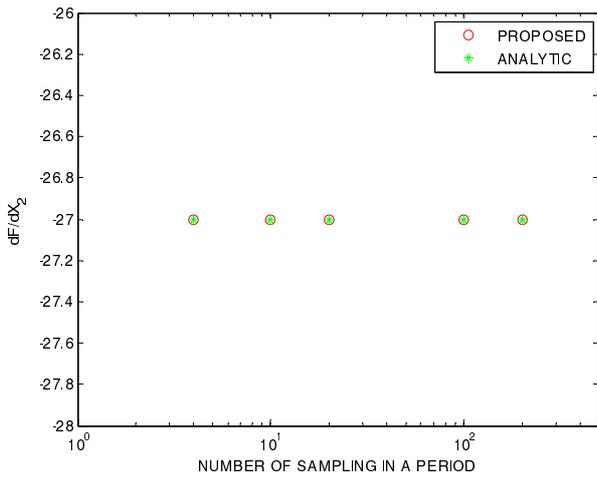


그림 6. 한 주기당 샘플링 수와 $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ 추정 값.

Fig. 6. Number of samplings in a period vs. estimated $\frac{\partial F}{\partial x_2}$.

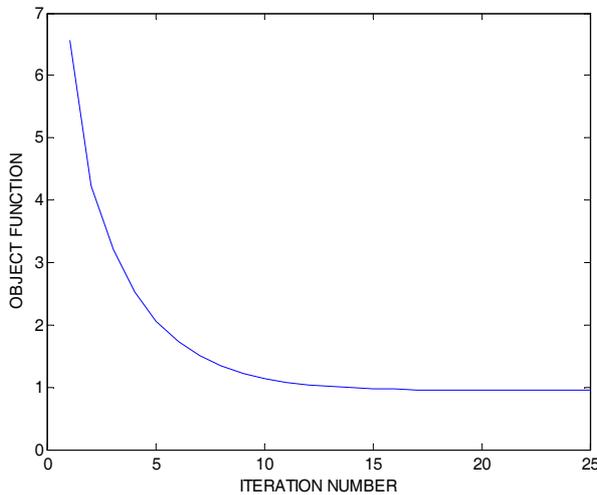


그림 7. 목적함수 최소화 과정.

Fig. 7. Minimization of an object function.

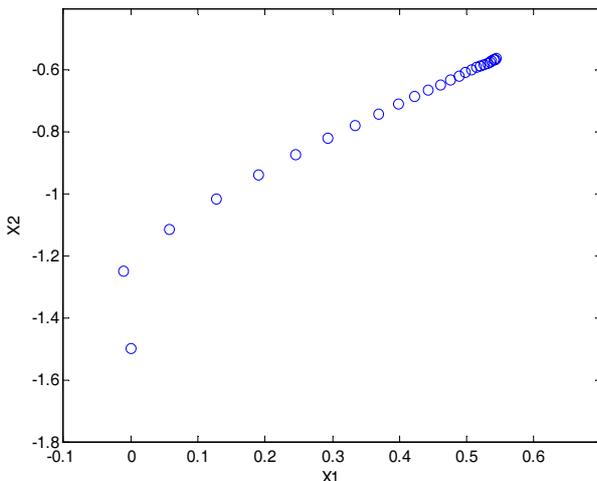


그림 8. 입력변수 궤적.

Fig. 8. Trajectory of input variables.

식 (6)에서 알 수 있듯이 한 주기당 샘플링 수는 $2N$ 이다. 그림 5와 그림 6에서 알 수 있듯이 샘플링 수에 따른 계산 정확도는 큰 변화가 없으나, 섭동함수에 대하여 에일리어싱 (aliasing)이 발생하지 않는 충분히 많은 샘플링으로부터 상관 관계를 구하는 것이 정확한 결과를 얻을 수 있다.

제안한 방법을 사용하여 함수의 기울기를 정확히 추정할 수 있음을 검증하였으며, 다음은 이 추정값을 사용하여 함수의 최소화를 수행하여본다. 다양한 최적화 방법들이 연구되었으며 그들 중 하나인 급강하 알고리즘은 다음과 같이 정의되었다[12].

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \alpha \nabla F(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_k} \quad (59)$$

섭동/상관관계로부터 구한 함수의 기울기 값을 사용한 급강하 알고리즘을 기반으로 그림 1의 목적함수를 최소화하는 과정 및 결과를 그림 7과 그림 8에 나타내었다. 초기값은 $[0, -1.5]$, 식 (59)에서 α_1, α_2 의 값은 0.02를 사용하였다. 그림 7은 목적함수의 최소화 진행과정을 나타내며 그림 8은 입력변수 값들의 변화를 보여준다.

V. 결론

본 논문에서는 함수의 최적화를 위하여 입력 변수에 섭동을 가한 후, 이 입력 변화와 함수 출력간의 상관관계를 구하여 이로부터 함수의 기울기를 구하는 방법을 제안하고 이를 증명하였다. 단일 입력변수, 다 변수 입력함수에 대한 고찰이 이루어졌으며 특히 다 변수 입력 함수의 경우, 섭동을 가하는 입력과 그렇지 않은 입력이 존재하는 경우에 제안한 방법을 적용할 수 있는 조건을 제시하였다. 제안한 섭동/상관관계 방법을 구현할 때 발생하는 문제점인 센서 잡음을 student t -distribution 기반 해석을 통하여 그 영향을 줄이는 조건을 구하였다. 섭동/상관 방법으로 구한 함수의 기울기 정보를 이용한 함수의 최적화 사례를 통하여 제안한 방법의 유효성을 검증하였다.

참고문헌

- [1] J. S. Lee, "Optimal design and simulation of SCARA robot arm," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 15, no. 6, pp. 612-618, 2009.
- [2] C.-H. Chung, S.-H. Lee, K.-S. Kim, Y.-S. Cha, and Y.-S. Ryuh, "Optimization of input parameters by using DOE for dynamic analysis of bio-inspired robotic fish 'Ichthus'," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 8, pp. 799-803, 2010.
- [3] Y. Choi and H.-J. Yu, "Optimization-based real-time human elbow joint angle extraction method," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 12, pp. 1278-1285, 2008.
- [4] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [5] T. Goto, T. Inoyama, and K. Takeyasu, "Precise insert operation by tactile controlled robot," *Industrial Robot: An International Journal*, vol. 1, no. 5, pp. 225-228, 1974.
- [6] S.-H. Li and H. Asada, "Automated robotic assembly using a vibratory work table: Optimal tuning of vibrators based on the

Taguchi method,” Thesis (Master of Science) - Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Mechanical Engineering, 1992.

[7] S. Lee and H. Harry Asada, “A perturbation/correlation method for force guided robot assembly,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 4, pp. 764-773, 1999.

[8] B. Chung, P. Knuepfer, and S. Lee, “Obstacle avoidance with perturbation/correlation method,” *Proc. of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2425-2430, 2002.

[9] S. Lee, “Perturbation/correlation based optimal internal combustion engine tuning,” *International Journal of Automotive Technology*, vol. 9, no. 4, pp. 429-436, 2008.

[10] J. Bae, G-W. Kim, and S. Lee, “Application of perturbation/correlation based gradient estimation for environment exploration,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 233-242, April 2009.

[11] M. T. Hagan, H. B. Demuth, and M. H. Beale, *Neural Network Design*, PWS Publishing company, 2002.

[12] R. Battiti, “First and second order methods for learning: between steepest descent and newton’s method,” *Neural Computation*, vol. 4, no. 2, pp. 141-166, 1992.



이수용

1989년 서울대학교 기계공학과(공학사). 1991년 서울대학교 기계공학과(공학석사). 1996년 MIT 기계공학과(공학박사). 1996년~1999년 한국과학기술연구원 선임연구원. 2000년~2003년 Texas A&M대학 기계공학과 조교수. 2003년~현재 홍익대학교 기계시스템디자인공학과 부교수. 관심분야는 Robotics.